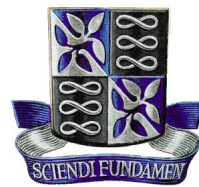




Universidade Federal da Bahia
Instituto de Matemática
Departamento de Matemática-UFBA



Notas de aula- Cálculo A

Professora Vanessa Barros

Estas notas foram escritas para você que quer aprender Cálculo A de maneira informal - sem demonstrações, mas com muitos exemplos. Espero que você curta a leitura tanto quanto eu curti escrevê-las!

Um agradecimento especial aos alunos Yasmin Santana da Silva, Leonardo Rodrigues Martins e Paulo Ricardo dos Santos Silva pela enorme ajuda digitando estas notas.

Boa leitura!



Conteúdo

1	Grande revisão de funções	5
1.1	Conjuntos	5
1.1.1	Números Naturais	5
1.1.2	Números Inteiros	5
1.1.3	Números Racionais	5
1.1.4	Números Irracionais	6
1.1.5	Números Reais	6
1.1.6	O infinito	6
1.2	Desigualdades	7
1.3	Intervalos	7
1.3.1	Como representar Intervalos com um desenho	8
1.4	Valor absoluto	8
1.4.1	propriedades do Valor absoluto	8
1.5	Função	10
1.5.1	Lei de uma Função	11
1.5.2	Gráfico de uma Função	11
1.5.3	Operações com Funções	13
1.5.4	Produto de uma função por um número real	14
1.5.5	Composição de funções	14
1.5.6	Funções elementares	15
1.5.7	Qualidades das funções	20
1.5.8	Algumas funções especiais	26
2	Limite e continuidade	34
2.1	Noção intuitiva	34
2.2	Metendo a mão na massa	37
2.3	Propriedades elementares dos limites	40
2.4	Limites laterais	41
2.5	Limites envolvendo infinito	44
2.5.1	Caso 1	44
2.5.2	Caso 2	47
2.5.3	Caso 3	51
2.5.4	Propriedades de limites infinitos	52
2.6	Assíntotas	61
2.7	Limite da função exponencial	65
2.8	Limite da função $\ln(x)$	66

2.9	Limite das funções $\cos(x)$ e $\sin(x)$	67
2.10	Limite da função composta	67
2.11	Teorema do confronto	69
2.12	Limite fundamental	72
2.13	Continuidade	73
3	Derivadas	81
3.1	Reta tangente ao gráfico de f	81
3.1.1	Situação 1- O limite existe e é finito	82
3.1.2	Situação 2- O limite é infinito	83
3.1.3	Situação 3- O limite não existe	83
3.2	A função derivada	84
3.2.1	Derivada de f num ponto x_0	84
3.2.2	Derivada lateral de f	85
3.2.3	Função derivada	86
3.2.4	Equação da reta tangente	89
3.2.5	A derivada do $\sin(x)$ e $\cos(x)$	91
3.2.6	Propriedades da derivada	93
3.2.7	Derivada de função composta	99
3.3	Usando a derivada para estudar funções	101
3.3.1	A primeira derivada x crescimento da função	101
3.3.2	A segunda derivada	110
3.3.3	A segunda derivada x concavidade	111
3.4	Regra de L'Hôpital	116
4	Integrais	128
4.1	Motivação	128
4.2	Integral indefinida e Primitiva	135
4.3	Teorema Fundamental do cálculo	137
4.4	Integração por substituição	138
4.5	Integração por partes	143
4.6	Integração de funções racionais por frações parciais	146

1 Grande revisão de funções

Antes de aprender sobre funções, precisamos entender a noção de conjuntos.

1.1 Conjuntos

1.1.1 Números Naturais

São os números que usamos para contar. Em geral os livros não consideram o zero como um natural, então eu vou seguir o fluxo. Denotamos este conjunto por $\mathbb{N}$. Assim:

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4 \dots\}$$

1.1.2 Números Inteiros

São os números naturais junto com o número zero e mais os naturais negativos. Denotamos este conjunto por $\mathbb{Z}$. Assim:

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -4, -3, -2, -1, -0, 1, 2, 3, 4 \dots\}.$$

Pra quem conhece a união de conjuntos, podemos dizer que os inteiros são a união de 3 conjuntos:

$$\mathbb{Z} = -\mathbb{N} \cup \{0\} \cup \mathbb{N}$$

Pra quem não conhece união não tem problema. Fique com a primeira versão de $\mathbb{Z}$ que eu te apresentei.

1.1.3 Números Racionais

São os números da forma $\frac{p}{q}$, onde p é um inteiro e q é um natural. Os números da forma $\frac{p}{q}$ são chamados de fração. A coisa mais importante pra se lembrar sobre as frações é que o denominador q nunca pode ser zero. Como nosso q é um natural, não temos este problema. Denotamos este conjunto por $\mathbb{Q}$. Assim:

$$\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q}, p \in \mathbb{Z} \text{ e } q \in \mathbb{N}\}.$$

Agora vamos ver se você entendeu sobre os racionais. Pergunta: será que 2 é racional? Se você respondeu que sim, acertou. Mas por quê? nós matemáticos precisamos justificar tudo. A justificativa é simples, $2 = \frac{2}{1}$. Outra pergunta: zero é racional? essa eu não vou responder. Não esqueça de justificar:)

Pra você pensar: Se um número tem uma quantidade finita de decimais, por exemplo 2.5, então este número é um racional. Você consegue justificar porque?

1.1.4 Números Irracionais

Existem números que não podem ser escritos como fração. São os irracionais. Sabe aquele número que tem decimal que não acaba mais? por exemplo 1.123456789...? Pois é, ele é um irracional. Alguns exemplos de irracionais são $\sqrt{2}$ e π . Denotamos este conjunto por $\mathbb{Q}'$ ou também $\mathbb{I}$. Se juntarmos os racionais e os irracionais obtemos os números reais.

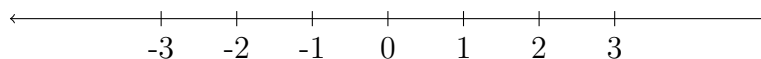
1.1.5 Números Reais

Usando união de conjuntos, podemos representar os reais assim:

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}.$$

Este é o conjunto que dará suporte às nossas funções, que você verá no final deste capítulo.

Representamos os reais por uma linha sem fim (bom, aqui não dá pra desenhar pois a folha acaba), mas a idéia é essa aqui:



No meu desenho eu só marquei os inteiros mas todos os reais estão por aí, em algum lugar desta reta...

1.1.6 O infinito

Até parece poesia! O que é o infinito? O infinito existe para responder à pergunta: qual é o maior número dentre todos os reais? A resposta é, não tem. Não existe um número real maior do que todos os números reais. Mas tem o infinito, que se representa com o símbolo $+\infty$ (lê-se mais infinito). Quem não tem cão caça com gato né;)?

Tem também o menos infinito, denotado por $-\infty$, que é alguma coisa menor do que todos os reais.

Moral da história: o mais infinito não é um número real, mas é alguma coisa maior do que todos os reais. Entenderemos melhor o infinito quando falarmos de limite, lááá na frente destas notas, no infinito...

1.2 Desigualdades

O que significa a expressão $x > 2$? Significa que x é qualquer valor real maior que o número natural 2. Por exemplo, x pode ser 2.1 assim como x pode ser 10 ou 100 ou ... qualquer coisa maior que 2. Veja que existem infinitos (lá vem o infinito de novo!) valores de x possíveis.

Outra expressão de desigualdade é $x \geq 2$. A única diferença agora é que o valor de x , além de poder ser 10, 2.1 ou 100, também pode ser 2.

Analogamente temos $x < 2$ e $x \leq 2$. Você pode me dar alguns exemplos de valores de x que satisfaçam a desigualdade $x < 2$?

Podemos também misturar os símbolos $>$ e $<$ numa expressão só. Por exemplo $2 < x < 50$. Agora o x pode ser 2.1, pode ser 10, mas já não pode ser 100. Outras misturas são possíveis, por exemplo, $2 \leq x < 50$ e $2 < x \leq 50$.

1.3 Intervalos

Existe um maneira bem prática de expressar todos os valores de x que satisfazem à expressão $2 < x < 50$. É usando intervalos. No nosso caso o intervalo é $(2, 50)$. Dizemos que este intervalo é aberto porque ele não inclui os extremos, ou seja, o 2 e o 50. Agora digamos que eu queira incluir os números 2 e 50, ou seja $2 \leq x \leq 50$. Nesse caso o intervalo é $[2, 50]$. Dizemos que este intervalo é fechado, porque ele inclui os extremos. Veja que no lugar de parêntesis, agora eu usei colchete. Vamos complicar um pouco. Como eu represento os valores de x que satisfazem à expressão $2 \leq x < 50$? Simples, usando o intervalo $[2, 50)$. Ele é fechado à esquerda e aberto à direita.

O intervalo também serve para exprimir os valores de x na expressão $x > 2$. Neste caso utilizamos a notação de intervalo $(2, +\infty)$, que se estende além de 2 até o infinito. Nunca usamos a notação $(2, +\infty]$, pois o infinito não é um número real e nos intervalos só moram números reais. Da mesma forma, para $x \leq 2$, usamos a notação $(-\infty, 2]$, representando todos os números reais menores ou iguais a 2.

1.3.1 Como representar Intervalos com um desenho

Dá pra representar intervalos graficamente, ou seja, desenhando. O desenho abaixo representa o intervalo $[3, 8)$. Veja que a bolinha do 3 foi preenchida de preto pra indicar que o 3 pertence ao intervalo e a bolinha do 8 foi preenchida de branco pra indicar que o 8 não pertence ao intervalo. E a parte laranja, como você pode imaginar, representa o recheio do intervalo.



Pra representar o intervalo $[2, +\infty)$ fazemos assim:



1.4 Valor absoluto

Qual é a distância do número 2 até o número zero? é 2 certo? e qual é a distancia do número -2 até o zero? a resposta é a mesma, 2. Valor absoluto de um número qualquer x é só isso. A distância de x até o zero. Então você concorda comigo que o valor absoluto de um número qualquer é sempre positivo (você nunca ouviu falar de distância negativa né?). A notação é a seguinte: $|2|$ representa o valor absoluto de 2. Então não é novidade que $|2| = 2$ e que $|-2| = 2$.

No geral escrevemos assim: $|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$

Calma! Não se assuste. Essa expressão esquisita só está dizendo que $|2| = 2$ pois $2 \geq 0$ e que $|-2| = -(-2) = 2$ pois $-2 < 0$. Então, se x for positivo você olha para a primeira linha da expressão esquisita, e se x for negativo você olha para a segunda linha.

1.4.1 propriedades do Valor absoluto

Agora vamos misturar desigualdade com Valor absoluto:

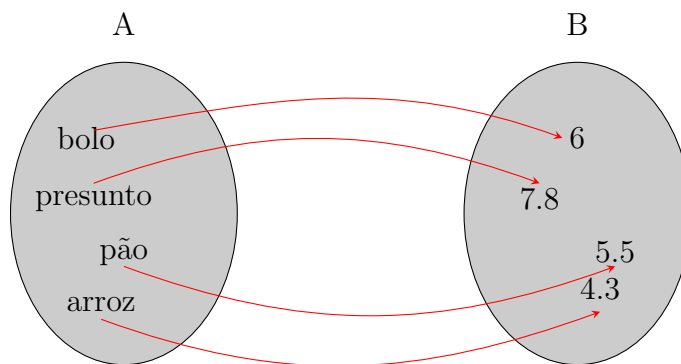
- A expressão $|x| < 2$ é equivalente a $-2 < x < 2$, ou seja, se o valor absoluto de x é menor que 2 é porque a distância de x a zero é menor que

2. x pode ser por exemplo 1, mas ele também pode ser -1 . x pode ser qualquer valor entre 0 e 2 mas também pode ser qualquer valor entre -2 e 0.

- De maneira análoga podemos analisar a expressão $|x| > 2$. Se o valor absoluto de x é maior que 2 é porque a distância de x a zero é maior que 2, ou seja, x pode ser por exemplo 3, mas ele também pode ser -3 . x pode ser qualquer valor maior que 2 mas também pode ser qualquer valor menor que -2 . Então podemos dizer que $|x| > 2$ é equivalente a $x > 2$ ou $x < -2$.
- Agora vamos analisar o valor absoluto do produto, ou seja, $|x \cdot y|$. Veja que $|2 \cdot 3| = |6| = 6$ e $|2| \cdot |3| = 2 \cdot 3 = 6$. Agora vamos brincar com números negativos. $|-2 \cdot 3| = |-6| = 6$ e $|-2| \cdot |3| = 2 \cdot 3 = 6$. Você pode fazer outras brincadeiras, por exemplo tomar $x = -2, y = -3$ e ver que ainda vale $|x \cdot y| = |x||y|$. Na verdade, esta expressão vale para quaisquer x e y reais que você escolher.
- A mesma coisa vale para a divisão, ou seja, $|\frac{x}{y}| = \frac{|x|}{|y|}$ para quaisquer x e y reais que você escolher. Vou deixar você testar com alguns valores pra se convencer.
- A próxima propriedade é muito importante e se chama desigualdade triangular. Para quaisquer x e y reais temos que $|x + y| \leq |x| + |y|$. De novo, eu vou deixar você testar com alguns valores pra se convencer. Teste com valores negativos também!

1.5 Função

Digamos que você costuma fazer compras num certo mercado e que você já conhece de memória os preços de certos produtos neste mercado. Eu vou usar o diagrama abaixo para relacionar os produtos (conjunto A) aos preços (conjunto B).



Pronto! Função é isso. Relacionar os elementos de um conjunto aos elementos de outro conjunto. Tem uma regrinha que precisamos seguir pra poder chamar isso de função: **cada elemento do conjunto A deve estar relacionado a um único elemento do conjunto B**. Traduzindo, tem duas coisas que não podem acontecer. A primeira é, você não pode ter duas setas vermelhas saindo de um elemento do conjunto A, bolo, por exemplo. E se você parar pra pensar, não faz mesmo sentido que o bolo (aqui eu quero dizer um certo bolo de uma certa marca) tenha dois preços diferentes, certo? Outra coisa que não pode acontecer é ter um produto boiando no conjunto A, sem nenhuma seta vermelha saindo dele. Afinal, TODO produto tem um preço! O conjunto A é chamado de domínio da função.

Em vez de usar um desenho para representar minha função eu poderia dar um nome a ela, por exemplo f , e dizer que $f(\text{bolo})=6$, $f(\text{presunto})=7.8$, $f(\text{pão})=5.5$ e $f(\text{arroz})=4.3$. f é a função que relaciona produto com preço. Denotamos o domínio de f por $D(f)$. No nosso caso, $D(f)=A$.

Pra terminar esta sessão vou te explicar o que significa dizer que duas funções sejam iguais:

$$f : A \rightarrow B \quad \text{e} \quad g : C \rightarrow D$$

são iguais, e escrevemos $f = g$, se e somente se:

- $A = C$ e $B = D$;
- Para todo $x \in A$, temos $f(x) = g(x)$.

1.5.1 Lei de uma Função

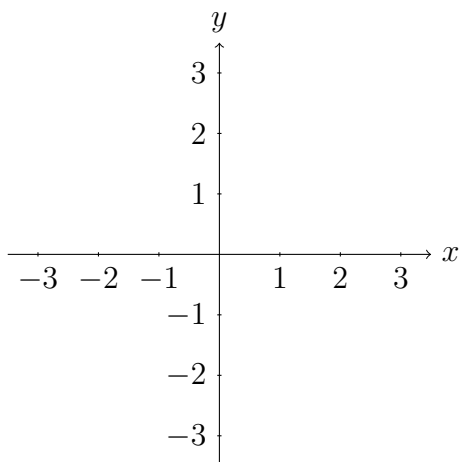
João estuda numa escola que faz avaliações mensais de matemática. O pai de João estabeleceu que a mesada de cada mês seria 10 vezes o valor da nota de matemática que João tirou naquele mês. Assim, se num determinado mês João tirou 1, ele vai receber de mesada 10 reais, mas se ele tirou 10, ele vai receber 100 reais (o que faz uma bela diferença não é?). Podemos imaginar a função f que associa a nota de cada mês à mesada que João receberá naquele mesmo mês. O que o pai de João estabeleceu foi uma lei para a função. $f(\text{nota de João naquele mês}) = 10 \times \text{nota}$, que é o valor da mesada daquele mês. Se chamarmos de x a nota de João então podemos dizer que $f(x) = 10x$ (e esta é a lei da função f). Faz sentido pra você?

Agora vamos analisar o domínio desta função. Ora, as notas só podem ir de zero a 10 então o domínio de f são todos os números reais entre zero e 10, i.e., $D(f) = [0, 10]$. Na verdade o João não vai tirar uma nota do tipo $\sqrt{2}$ né? mas pra simplificar digamos que são todos os números reais entre zero e 10. E quais são as possibilidades de mesada do João? mesada=10 vezes o valor da nota, certo? Então $[0, 100]$. Este último conjunto é chamado de imagem da função f . A imagem de uma função é o conjunto de todos os valores assumidos pela função, e a notação que usamos é $\text{Im}(f)$.

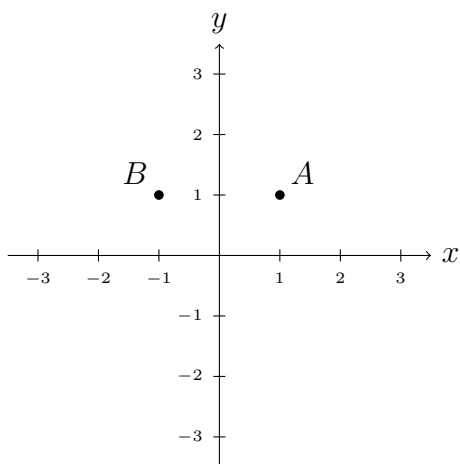
Aliás, quanto João vai ganhar de mesada se tirar zero? pobre João...

1.5.2 Gráfico de uma Função

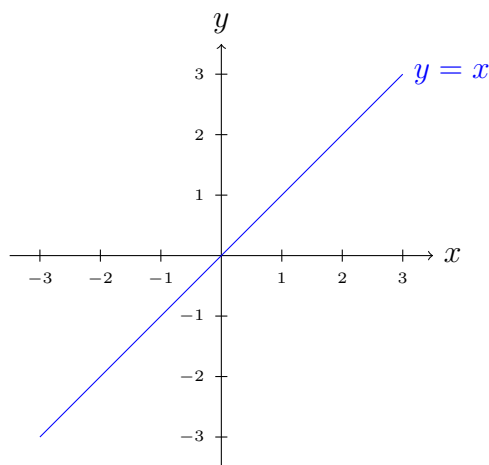
Antes de definir gráfico de função, deixe eu revisar coordenadas cartesianas. Considere o desenho abaixo. Vamos chamar de origem a interseção dos dois segmentos, de eixo X a linha horizontal e eixo Y a linha vertical. Chamamos este desenho de coordenadas cartesianas.



Ele serve pra marcar pontos. Por exemplo, se eu pedir pra você marcar uma bolinha na origem, você vai desenhar esta bolinha na interceção (que tem coordenadas $(0,0)$). Se eu pedir a você pra marcar o ponto de coordenadas $(1,1)$, você vai a partir da origem, andar um passinho para a direita até o número 1 e depois um passinho pra cima e você vai parar exatamente no ponto A, como indicado abaixo. A notação é a seguinte: $A(1,1)$. O primeiro valor do parêntesis se refere ao passinho que você deu no eixo X e o segundo valor ao passinho que você deu no eixo Y. Agora vamos marcar o ponto $B(-1,1)$. Você vai, a partir da origem, andar um passinho para a esquerda até o número -1 e depois um passinho pra cima e você vai parar exatamente no ponto B, como indicado abaixo. Entendeu como funciona? Então tente marcar o ponto $C(-1,-1)$.



Agora eu posso definir gráfico. Primeiro vou dar um exemplo. Considere a função $f(x) = x$, onde x pode ser qualquer valor real, ou seja $D(f) = \mathbb{R}$. Agora vou marcar as coordenadas cartesianas de TODOS os pontos do tipo $(x, f(x))$, o que no nosso exemplo são pontos do tipo (x, x) , já que $f(x) = x$. Prontos? Como $x \in \mathbb{R}$, temos infinitos (olha ele aí de novo, o infinito!) pontos. Alguns deles são fáceis de marcar como $(1, 1)$ e $(-1, -1)$, outros um pouco mais complicados como $(1/2, 1/2)$ e $(-1/2, -1/2)$ e outros ainda mais complicados como $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ e $(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$. Quando eu juntar esses 6 pontos e mais todos os outros do tipo (x, x) , o que obtemos é:



Você consegue enxergar os nossos seis pontos nesta reta azul?

O gráfico de nossa f é o conjunto de TODOS os pontos (x, x) onde $x \in D(f) = \mathbb{R}$, em outras palavras, é a linha azul. Em geral, **o gráfico de uma função f , denotado $G(f)$, é o conjunto de TODOS os pontos $(x, f(x))$ onde $x \in D(f)$.**

1.5.3 Operações com Funções

Do mesmo jeito que fazemos operações com os números reais, podemos também somar, subtrair, multiplicar e dividir funções. Como? Vou explicar agora!

Vou começar com um exemplo. Considere as funções $f(x) = x$ e $g(x) = 10x$. Pra somar estas duas funções eu somo as imagens no mesmo ponto x ou seja $(f + g)(x) = x + 10x = (1 + 10)x = 11x$. Eu uso a mesma tática pra subtrair, $(f - g)(x) = x - 10x = (1 - 10)x = -9x$. Pra multiplicar

fazemos $(f \cdot g)(x) = x \cdot 10x = 10x^{(1+1)} = 10x^2$ (se você sentiu dificuldade nesta conta, dê uma revisada em potência). Finalmente pra dividir fazemos $(\frac{f}{g})(x) = \frac{x}{10x} = \frac{x^{(1-1)}}{10} = \frac{x^{(0)}}{10} = \frac{1}{10}$, lembrando que qualquer número (que não seja o zero) elevado a zero é 1. E por falar em zero...lembra que fração não pode ter zero no denominador? pois é, então quando estamos dividindo f por g , temos que tomar cuidado para que g não seja 0. Então na hora de dividir precisamos ter algum cuidado com o domínio de g . No nosso exemplo basta pedir $x \neq 0$. Se x não se anula então $10x$ também não se anula e tá tudo certo!

Agora que você entendeu eu posso generalizar:

- Soma: $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$
- Subtração: $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$
- Produto: $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$
- Divisão: $(\frac{f}{g})(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, tomando cuidado pra g não zerar!

1.5.4 Produto de uma função por um número real

Vamos usar nosso exemplo $f(x) = x$. Multiplicar f por um número, por exemplo 3, é simplesmente fazer assim: $(3f)(x) = 3x$. No geral, se $k \in \mathbb{R}$ e f é uma função então $(kf)(x) = kf(x)$.

1.5.5 Composição de funções

Imagine que você está na Barra (em Salvador) e quer ir pra Itapuã de ônibus. Se não houver um ônibus que faça este trajeto então o jeito vai ser você pegar dois ônibus. Digamos, o primeiro para a estação da Lapa e o segundo da Lapa para Itapuã. Composição de funções é como pegar dois ônibus. Só que no lugar de ônibus, é função!

Considere as funções $f(x) = 2x$ e $g(x) = x^3$. Tome $x = 1$. Imagine que este número é o passageiro (quando ele está na Barra) e que o primeiro ônibus é a f . Ela vai levar o número 1 no 2, já que $f(1) = 2 \cdot 1 = 2$, agora o passageiro chegou na Lapa. Olha que doideira, o passageiro 1 se transformou em passageiro 2. E o próximo ônibus é a g . Ela vai levar o 2 no 8 já que $g(2) = 2^3 = 8$. E 8 é o passageiro final. É claro que você não se transforma em outra pessoa quando você pega um ônibus então fica meio

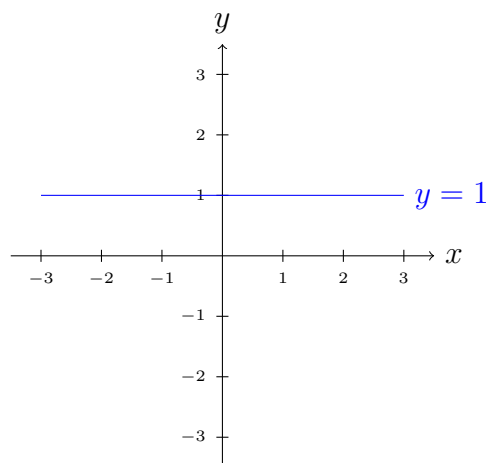
esquisito quando eu digo que o passageiro 1 virou o passageiro 2 mas você entendeu a idéia né? De maneira mais formal, **denotamos a composição de duas funções quaisquer f e g por $g \circ f$ e definimos a imagem desta nova função como $g(f(x))$** . Aplicando no ponto 1 e nas nossas funções do exemplo, obtemos $(g \circ f)(1) = g(f(1)) = g(2) = 8$. Tente calcular $(g \circ f)(-1)$.

Observação 1.1. *Observe que $g \circ f$ e $f \circ g$ NÃO é a mesma coisa! $g \circ f$ significa que o primeiro ônibus é a f e o segundo é a g . Já $f \circ g$ é o contrário.*

1.5.6 Funções elementares

(a) Função constante

Como o nome está dizendo, essa função não muda, ou seja, o gráfico dela nem sobe nem desce. Vamos construir pra você ver. Como sempre começamos com um exemplo. $f(x) = 1$ é uma função constante. Veja que não tem x do lado direito da equação. O gráfico dela é formado pelos pares coordenados $(x, 1)$ (veja a sessão de gráfico), onde x é qualquer valor real. Por exemplo, $(0, 1)$, $(1, 1)$, $(-1, 1)$..., então quando juntamos todos os pontos dessa forma obtemos



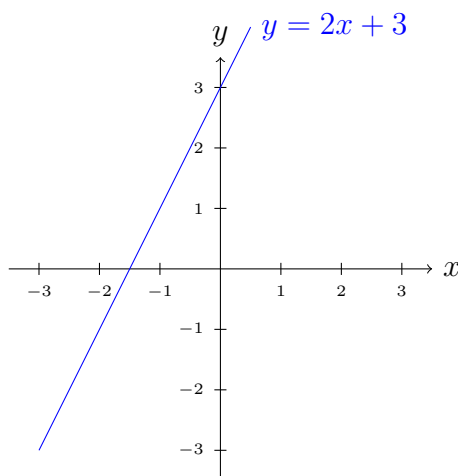
Generalizando, podemos trocar 1 por qualquer valor real, então podemos definir a função constante assim: fixe $k \in \mathbb{R}$. Defina $f(x) = k$ onde $x \in \mathbb{R}$, ou seja $D(f) = \mathbb{R}$. E essa é a função constante. Você consegue desenhar o gráfico dela?

(b) Função identidade

Nós já estudamos esta função na sessão gráfico de uma função. Só não demos um nome a ela. A lei da função identidade é $f(x) = x$, o domínio é $\mathbb{R}$ e o gráfico você já conhece.

(c) Funções do primeiro grau

As funções do primeiro grau são as retas (menos a reta horizontal, aquela da função constante, você vai entender daqui a pouco porquê). Você já conhece uma função do primeiro grau. Nós trabalhamos com ela na sessão de gráficos. É a função identidade. Agora vou te apresentar outras retas. Vamos construir o gráfico da função $f(x) = 2x + 3$ juntos? Os pontos do gráfico desta reta são do tipo $(x, 2x + 3)$. Então, por exemplo, tomando $x = 0$, obtemos o ponto $(0, 2 \cdot 0 + 3) = (0, 3)$. Outros pontos deste gráfico são $(1, 5)$ (basta tomar $x = 1$) e $(-1, 1)$ (basta tomar $x = -1$). Se eu marcar estes pontos e mais todos os outros da forma $(x, 2x + 3)$, obterei o seguinte desenho:



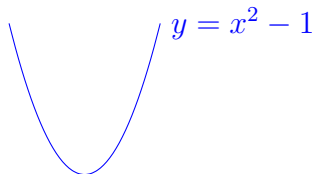
Veja que na verdade eu só precisava de dois pontos pra traçar este gráfico pois dois pontos determinam uma reta!

Generalizando, as funções do primeiro grau são definidas da seguinte forma. **Fixe dois números reais, digamos a e b . O número a não pode ser zero! Agora defina $f(x) = ax + b$, onde $x \in \mathbb{R}$.** Por exemplo, se $a = 2$ e $b = 3$, recuperamos a função do nosso exemplo.

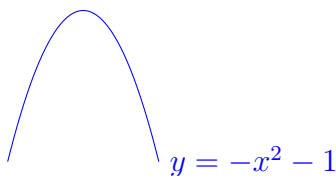
Agora veja que como $a \neq 0$, então nossa função do primeiro grau nunca será $f(x) = b$ que é a nossa função constante, cujo gráfico é uma reta horizontal. Moral da história: funções do primeiro grau são retas, excluindo as retas horizontais. E só precisamos de DOIS pontos para construir o seu gráfico.

(d) Funções quadráticas

Aqui eu vou começar com a definição geral, e depois faremos exemplos. Sejam a, b, c números reais, a não pode ser zero! defina $f(x) = ax^2 + bx + c, x \in \mathbb{R}$. A função quadrática (também chamada de função do segundo grau) é um pouco mais complicada de se desenhar apenas marcando pontos, então eu vou dar algumas dicas. Dica número 1. O formato do gráfico de uma função quadrática pode parecer com um vale:



Observe que no exemplo acima temos $a = 1, b = 0, c = -1$. O formato do gráfico de uma função quadrática também pode ser parecido com uma montanha:



Neste último exemplo temos $a = -1, b = 0, c = -1$.

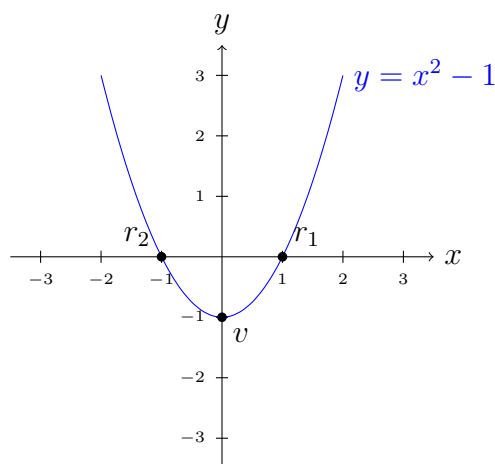
Então lá vai a segunda dica: se a for positivo, vale. Se a for negativo, montanha. Se lembre que $a \neq 0$!

A próxima dica é localizar o ponto mais alto (se montanha) ou mais baixo (se for vale) do gráfico. Esse ponto mais alto ou mais baixo se chama vértice. Pra encontrar as coordenadas do vértice $(x_v, f(x_v))$ a

fórmula é a seguinte: $x_v = -\frac{b}{2a}$. Vamos aplicar no primeiro exemplo $f(x) = x^2 - 1$ pra entender melhor. Neste caso temos $x_v = -\frac{0}{2 \cdot 1} = 0$. Agora basta substituir $x_v = 0$ na equação $f(x) = x^2 - 1$, ou seja, $f(0) = 0^2 - 1 = -1$, e portanto $f(x_v) = -1$. Assim o vértice é $v(0, -1)$.

A última dica é descobrir quais são as raízes (se houver, nem toda função quadrática tem raízes!) de $f(x) = x^2 - 1$, ou seja, para que valores de x temos $f(x) = 0$. Estes são os pontos onde o gráfico toca o eixo X. Usando a fórmula de Bhaskara (assista um vídeo no youtube se você não está familiarizado com ela) obtemos que $f(x) = 0$ para $x = 1$ e $x = -1$. Então o gráfico toca o eixo X nos pontos $r_1(1, 0)$ e $r_2(-1, 0)$.

Agora colocando tudo isso em prática temos o gráfico desenhado com os eixos e marcamos também os pontos que encontramos:



Observe que você é capaz de esboçar o gráfico de uma função quadrática sabendo que ele tem a forma de um vale e conhecendo as coordenadas do vértice e das raízes .

As funções quadráticas também são chamadas de parábola. Sabe a antena parabólica? imagine uma. Agora dê uma olhada nos gráficos acima e veja se encontra alguma semelhança com a antena parabólica.

Pra terminar eu vou deixar você fazer todo o processo que acabamos de fazer com a função vale mas agora com a função montanha $f(x) = -x^2 - 1$. Pra você não se desesperar vou logo te dando uma dica. Essa função não tem raízes (use Bhaskara e verifique). Nada a fazer, você vai usar o vértice e o formato montanha. Boa sorte!

(e) Função polinomial

É uma função da forma $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots a_1 x + a_0$, $x \in \mathbb{R}$, $a_n \neq 0$. O número n é o grau da função. Como de costume, a_n não pode ser zero. Os outros coeficientes podem. Veja que função polinomial generaliza as funções de primeiro e segundo grau. Um exemplo de função polinomial é $f(x) = 9x^3 - 8x^2 + 5x + 1$. Nesse caso $n = 3$, $a_3 = 9$, $a_2 = -8$, $a_1 = 5$, $a_0 = 1$. Não vamos analisar o gráfico de funções polinomiais (com grau maior que 2) aqui pois não queremos que você entre em pânico e desista de ler estas notas 😊

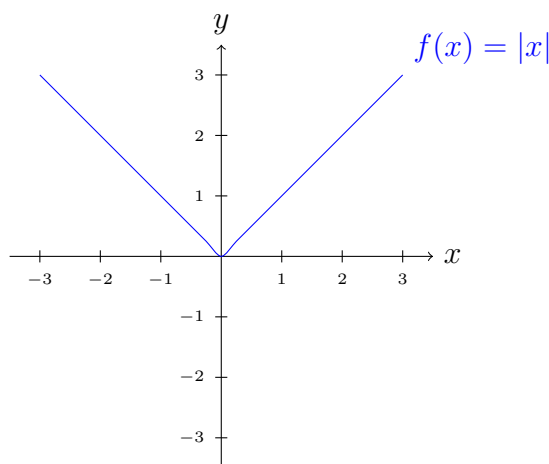
(f) Função racional

São as frações onde o numerador é uma função polinomial e o denominador também, digamos $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$. Lembre-se que numa fração precisamos ter cuidado para que o denominador não se anule. Traduzindo, as raízes de $q(x)$ não podem estar no domínio de f .

Exemplo: Considere a função $f(x) = \frac{x^2-1}{x-2}$. O numerador $x^2 - 1$ é um polinômio, assim como o denominador $x - 2$. Note que f não está definida em $x = 2$, pois nesse ponto o denominador se anula. Logo, o domínio de f é $\mathbb{R} \setminus \{2\}$.

(g) Função módulo

Na verdade você já conhece essa função. Ela é construída a partir do valor absoluto (lembra das expressões esquisitas da sessão 1.4?). **A definição é a seguinte:** $f(x) = |x|$, $x \in \mathbb{R}$, onde $|x|$ é igual a x se x for maior ou igual a zero e $-x$ caso contrário. O gráfico desta função é formado por pontos do tipo $(x, |x|)$. Se x for positivo, por exemplo 2, então obtemos o seguinte ponto do gráfico: $(2, |2|) = (2, 2)$ e se x for negativo, por exemplo -2 então $(-2, |-2|) = (-2, 2)$ é um ponto do gráfico. Seguindo este raciocínio, obtemos mais alguns pontos: $(3, 3)$, $(-3, 3)$, $(4, 4)$, $(-4, 4)$ e assim por diante. Ah! veja que a origem também está no gráfico! O desenho fica assim:



Moral da história: A função módulo é sempre positiva. Veja que o gráfico dela está sempre na parte superior do eixo X. E o formato do gráfico é um v (de vingança! conhece esse filme?)

(h) Função raiz quadrada

A função raiz quadrada é a função $f : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ que associa a cada número real não negativo x o seu único número real não negativo y cuja quadrado é igual a x ou seja $f(x) = y$ tal que $y^2 = x$. Denotamos y por $\sqrt{x}$. Assim:

$$f(x) = \sqrt{x}.$$

Exemplo:

$$f(0) = \sqrt{0} = 0, \quad f(4) = \sqrt{4} = 2, \quad f(9) = \sqrt{9} = 3.$$

- Domínio: $x \geq 0$, pois não se pode extrair raiz quadrada real de número negativo.
- Imagem: também $[0, +\infty)$, já que a raiz quadrada nunca é negativa.

1.5.7 Qualidades das funções

As funções podem ser classificadas segundo certas propriedades que descrevem o seu comportamento. Essas qualidades ajudam a entender melhor como a função se comporta em relação ao seu domínio e imagem, e permitem prever características importantes, como simetria ou variação.

(a) Funções pares e ímpares

Vamo estudar as seguintes funções:

- (i) $f(x) = x^2$
- (ii) $f(x) = |x|$
- (iii) $f(x) = x$
- (iv) $f(x) = x^3$

Vamos calcular $f(-x)$ para cada uma destas funções.

- (i) $f(-x) = (-x)^2 = (-1)^2 \cdot x^2 = x^2$
- (ii) $f(-x) = |-x| = |-1| \cdot |x| = |x|$
- (iii) $f(-x) = -x$
- (iv) $f(-x) = (-1)^3 \cdot x^3 = -x^3$

Você consegue perceber uma semelhança entre as duas primeiras? E uma semelhança entre as duas últimas? Pois é. As duas primeiras são funções pares porque $f(-x) = f(x)$ e duas últimas são funções ímpares porque $f(-x) = -f(x)$. Se você observar o gráfico das duas primeiras funções, vai perceber que elas são simétricas com respeito ao eixo Y, ou seja, se você dobrar sua folha de papel com a dobra bem no eixo Y vai perceber que os dois lados do gráfico se encontram. E isso é verdade para TODAS as funções pares. Já as funções ímpares são simétricas com respeito à origem.

Observação 1.2. *Curiosidade :*

Seja $a \in \mathbb{R}$, f uma função par e g uma função ímpar. Então:

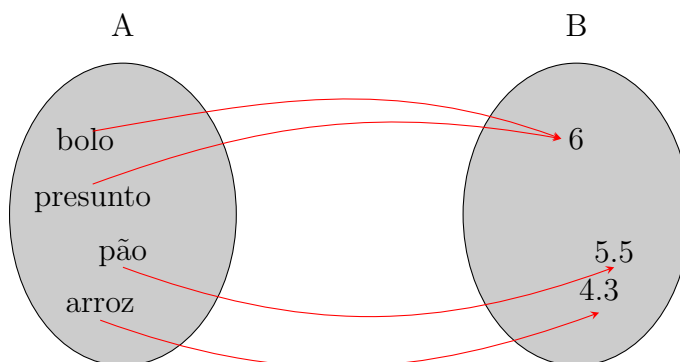
- af é uma função par;
- ag é uma função ímpar;
- as funções compostas $f \circ g$ e $g \circ f$ são pares.

(b) Função injetora (ou injetiva)

Uma função $f : A \rightarrow B$ é chamada **injetora** se elementos distintos do domínio têm imagens distintas. Ou seja, para todo $x_1, x_2 \in A$,

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2.$$

Em outras palavras, não existem dois elementos diferentes em A que sejam enviados para o mesmo elemento em B . A figura abaixo ilustra o exemplo de uma função que **não** é injetora:



Você concorda que bolo $\neq$ presunto e estes dois elementos estão indo no 6. Isso NÃO pode numa função injetora. Cada um no seu quadrado;)

Exemplo: A função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 2x + 1$ é injetora, pois:

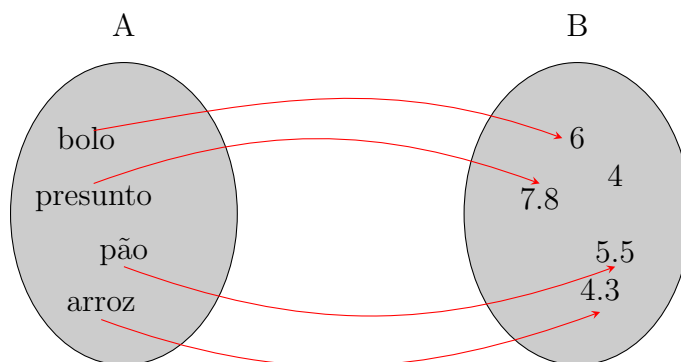
$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow 2x_1 + 1 = 2x_2 + 1 \Rightarrow x_1 = x_2.$$

(c) Função sobrejetora (ou sobrejetiva)

Uma função $f : A \rightarrow B$ é chamada **sobrejetora** se todo elemento de B é imagem de algum elemento de A . Formalmente, para todo $y \in B$, existe pelo menos um $x \in A$ tal que

$$f(x) = y.$$

Isso significa que a imagem de f é exatamente todo o contradomínio B . Analise a figura abaixo:

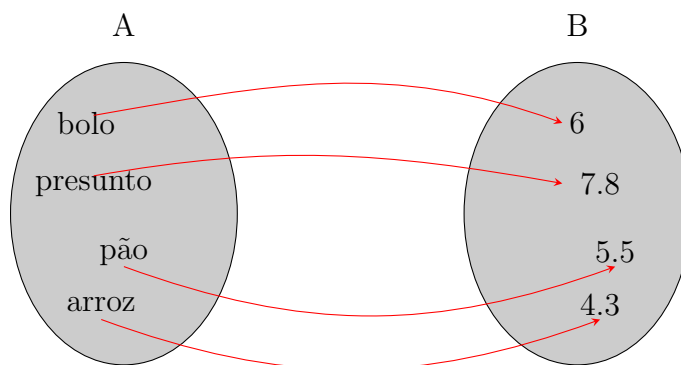


Percebeu que tem um 4 sobrando em B ? Na sobrejetora isso não pode!!!!

Exemplo: A função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 2x + 1$ é sobrejetora, pois, dado qualquer $y \in \mathbb{R}$, existe $x = \frac{y-1}{2} \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = y$.

(d) Função bijetora (ou bijetiva)

Uma função $f : A \rightarrow B$ é chamada **bijetora** quando é **simultaneamente injetora e sobrejetora**. Assim, não sobra nem falta nenhum elemento! Existe uma correspondência perfeita entre os elementos de A e os de B .



Nenhum valor de B ficou de fora e não há dois elementos de A ligados ao mesmo elemento de B . Tudo certo!

Exemplo: A função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x + 1$ é bijetora. De fato, ela é:

- Injetora: $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 + 1 = x_2 + 1 \Rightarrow x_1 = x_2$;
- Sobrejetora: dado $y \in \mathbb{R}$, basta tomar $x = y - 1$, e temos $f(x) = y$.

(e) Função inversível

Uma função $f : A \rightarrow B$ é chamada **inversível** se existe uma outra função $g : B \rightarrow A$ tal que, para todo $x \in A$ e $y \in B$, temos:

$$g(f(x)) = x \quad \text{e} \quad f(g(y)) = y.$$

Isso significa que se a função f leva bolo em 6 (que é o preço), a função g traz de volta o elemento 6 em bolo. A notação para a função g que é a inversa da função f é f^{-1} .

Importante: Uma função é inversível se, e somente se, ela for **bijetora**. Isso garante que cada elemento de B corresponde a um único elemento de A , e vice-versa.

Exemplos:

- A função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = 2x + 3$, é inversível. Sua inversa é:

$$f^{-1}(y) = \frac{y - 3}{2}.$$

De fato:

$$f^{-1}(f(x)) = \frac{2x + 3 - 3}{2} = x, \quad \text{e} \quad f(f^{-1}(y)) = 2 \cdot \frac{y - 3}{2} + 3 = y.$$

- A função raiz quadrada é a inversa da função $f(x) = x^2$ restrita ao intervalo $[0, +\infty)$.

(f) Função crescente e decrescente

Considere uma função $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, onde $A \subseteq \mathbb{R}$. Dizemos que:

- f é **crescente** em A se, para quaisquer $x_1, x_2 \in A$, com $x_1 < x_2$, temos:

$$f(x_1) \leq f(x_2).$$

Se a desigualdade for estrita ($f(x_1) < f(x_2)$), dizemos que f é **estritamente crescente**.

- f é **decrecente** em A se, para quaisquer $x_1, x_2 \in A$, com $x_1 < x_2$, temos:

$$f(x_1) \geq f(x_2).$$

Se a desigualdade for estrita ($f(x_1) > f(x_2)$), dizemos que f é **estritamente decrecente**.

Exemplos:

- A função $f(x) = 2x$ é estritamente crescente em $\mathbb{R}$, pois quanto maior o valor de x , maior é o valor de $f(x)$.
- A função $f(x) = -x^2$ é decrecente no intervalo $[0, +\infty)$, pois quanto maior x , menor o valor de $f(x)$.

Observação: A noção de crescimento ou decrescimento depende do intervalo considerado. Por exemplo, a função $f(x) = -x^2$ é crescente no intervalo $(-\infty, 0)$ e depois ela decresce.

(g) Função limitada

Uma função $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ é dita **limitada** se seus valores não explodem para $+\infty$ ou $-\infty$; ou seja, se existe um número real $M > 0$ tal que:

$$|f(x)| \leq M \quad \text{para todo } x \in A.$$

Isso significa que a função está presa entre dois valores reais.

Exemplos:

- A função $f(x) = \sin(x)$, definida em $\mathbb{R}$, é limitada, pois $-1 \leq \sin(x) \leq 1$. Veja que isso significa que $|\sin(x)| \leq 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$.
- A função $f(x) = 2$, definida em $\mathbb{R}$, é limitada pois $1 \leq f(x) \leq 3$.

Podemos também falar em:

- **Função limitada superiormente:** existe $M \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) \leq M$ para todo $x \in A$;

- **Função limitada inferiormente:** existe $m \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) \geq m$ para todo $x \in A$.

Exemplos:

- A função $f(x) = -x^2$, definida em $\mathbb{R}$, é limitada superiormente (por 0), mas não é limitada inferiormente.
- A função $f(x) = |x|$, definida em $\mathbb{R}$, é limitada inferiormente (por 0), mas não é limitada superiormente.

1.5.8 Algumas funções especiais

(a) Função exponencial

Existe um número muito especial na matemática, tão especial que recebeu um nome próprio: o **número de Euler**.

Esse número irracional, aproximadamente igual a $2,71828\dots$, é denotado por e e foi estudado pelo matemático suíço *Jacob Bernoulli* no contexto de juros compostos.

A partir dele, definimos a função exponencial

$$f(x) = e^x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

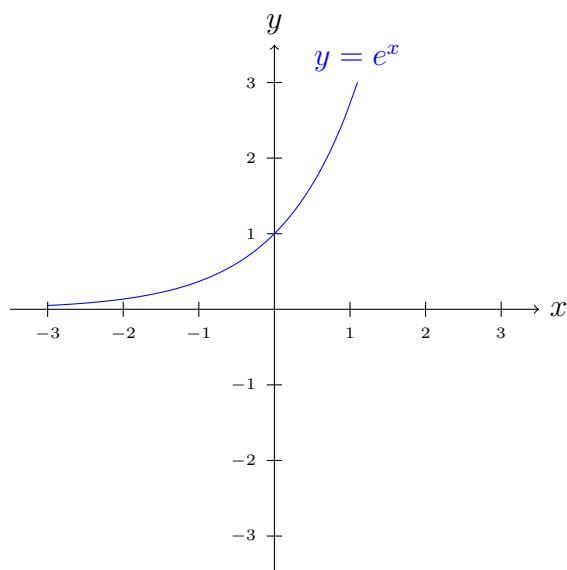
A função exponencial possui algumas propriedades importantes:

- a) $e^x \cdot e^y = e^{x+y}$;
- b) $(e^x)^y = e^{xy}$;
- c) $\frac{e^x}{e^y} = e^{x-y}$;
- d) $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$.

Na verdade, podemos substituir e por qualquer número real positivo a que essas propriedades continuam válidas.

No entanto, neste curso, a função mais importante será a exponencial de base e . Por isso, focaremos principalmente nela e em suas propriedades.

Vou mostrar o gráfico da exponencial pra você começar a ganhar intimidade com ela, pois vocês vão se encontrar muitas vezes na matemática:



Caso especial: função exponencial decrescente

Considere a função

$$g(x) = e^{-x}.$$

Essa função é chamada de **exponencial decrescente**, pois, à medida que x aumenta, o valor de $g(x)$ diminui.

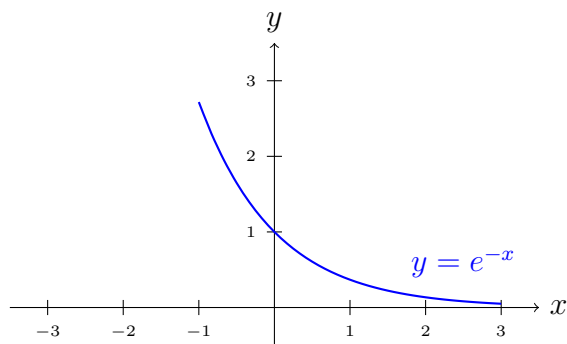


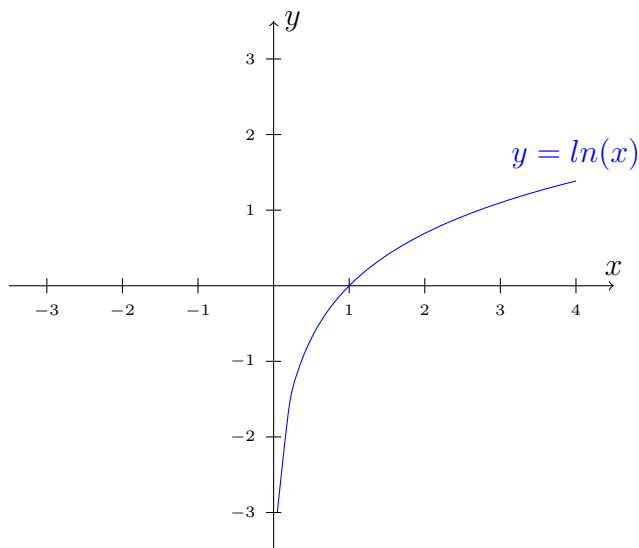
Gráfico de $y = e^{-x}$.

No gráfico, vemos que a função decresce continuamente e se aproxima do eixo x (reta $y = 0$), mas nunca o toca.

(b) Função logarítmica

A função logarítmica (Log para os íntimos) é definida da seguinte maneira: sejam $a > 0$, $a \neq 1$. Dado um número real x positivo definimos o log de x na base a como sendo um número, digamos b , tal que $a^b = x$. Vixi! o que é isso meu Deus!? Eu explico. Digamos que $a = 2$. Então o log de 8 na base 2 é 3 porque $2^3 = 8$. A notação é assim: $\log_2(8) = 3$. No geral $\log_a(x) = b$. Agora tome $a = 3$. Quem é $\log_3(81)$? Precisamos de um número b tal que $3^b = 81$. Vamos testar. $3^1 = 3$ então b não é 1. $3^2 = 9$, então b não é 2. $3^3 = 27$, então b não é 3. $3^4 = 81$, então ...bingo! $\log_3(81) = 4$. Exercício pra você, encontrar $\log_{10}(100)$.

Quando a base $a = e$, o número de Euler, então em vez de escrever $\log_e(x)$, escrevemos apenas $\ln(x)$. Vou apresentar o gráfico da $\ln(x)$ pra você :



Aqui cabe uma observação especial. A função exponencial e a função logaritmo natural são inversas uma da outra. Isso significa que uma desfaz a ação da outra. Em particular, para todo $x > 0$, temos

$$e^{\ln(x)} = x,$$

e, para todo $x \in \mathbb{R}$,

$$\ln(e^x) = x.$$

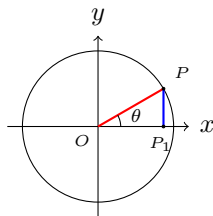
Essa é uma característica extremamente útil em exercícios envolvendo logaritmos e exponenciais.

(c) Funções trigonométricas

Eu vou te apresentar 3 funções trigonométricas. As funções seno e cosseno, denotadas respectivamente por $\sin$ e $\cos$, e a função tangente denotada por $\tan$.

(i) A função $\cos(\theta)$

Abaixo, desenhamos um círculo de raio 1. Consideramos um ponto P sobre o círculo, localizado no primeiro ou no quarto quadrante, e projetamos esse ponto ortogonalmente sobre o eixo x . Chamei esta projeção de P_1 . Finalmente chamei de θ , o ângulo entre o segmento OP e o eixo X .



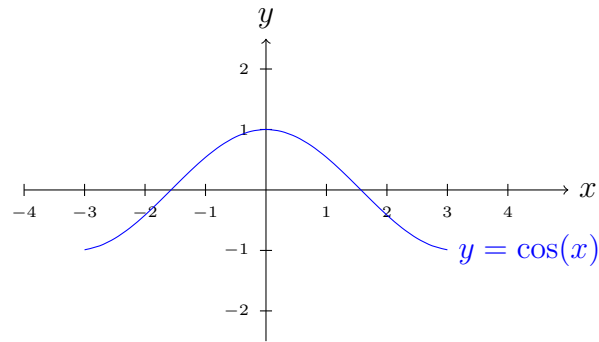
Por definição, $\cos(\theta)$ é o tamanho do segmento OP_1 . Se você quer calcular o cosseno de um outro ângulo θ , tudo o que você tem que fazer é mexer o ponto P mais pra cima ou mais pra baixo, sem tirar ele do círculo! Uma observação importante é que se o ponto P estiver no segundo ou no terceiro quadrante então a definição de $\cos(\theta)$ muda um pouco. Agora $\cos(\theta)$ é -1 vezes o tamanho do segmento OP_1 . Se θ estiver no primeiro (como no desenho) ou quarto quadrantes então não tem o produto por -1.

Vamos fazer algumas brincadeiras. Se eu posicionar o ponto P na interseção entre o círculo e o eixo X , à direita da origem, você concorda comigo que $\theta = 0^\circ$? Nesse caso, os pontos P e P_1 coincidem e o tamanho do segmento OP_1 é o tamanho do raio do círculo, que é 1. Portanto $\cos(0^\circ) = 1$. Veja que se eu posicionar o ponto P na interseção entre o círculo e o eixo X , à esquerda da origem (e portanto no segundo quadrante) então $\theta = 180^\circ$. Novamente teremos o tamanho do segmento $OP_1 =$ tamanho do raio do círculo, e assim $\cos(180^\circ) = -1$.

E se $\theta = 90^\circ$? Nesse caso P está bem em cima do eixo Y , na parte superior. P_1 vai coincidir com a origem e $OP_1 = OO$. Ora, um segmento que começa e termina no mesmo lugar tem tamanho zero né? Então $\cos(90^\circ) = 0$.

Outros ângulos são menos evidentes de se calcular, então vou te dar os valores: $\cos(30^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos(45^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos(60^\circ) = \frac{1}{2}$.

O gráfico do cosseno é o seguinte:



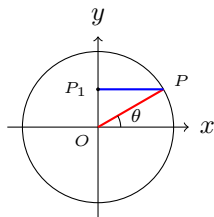
No gráfico acima, os valores de x estão em radiano, e não em grau. Se você não entende muito bem esta história de radiano e grau, dá uma olhada em vídeos no youtube.

Você sabia? A função cosseno é, por definição, uma função par. Por exemplo, volte na definição e calcule $\cos(45^\circ)$. Você vai ver que

$$\cos(-45^\circ) = \cos(45^\circ).$$

(ii) A função $\sin(\theta)$

A brincadeira aqui é bem parecida! Veja o desenho abaixo: um círculo de raio 1. Considere um ponto P qualquer sobre o círculo, localizado no primeiro ou no segundo quadrante, e projete esse ponto ortogonalmente sobre o eixo y . Denote essa projeção por P_1 . E θ continua sendo o ângulo entre segmento OP e o eixo X , como antes.

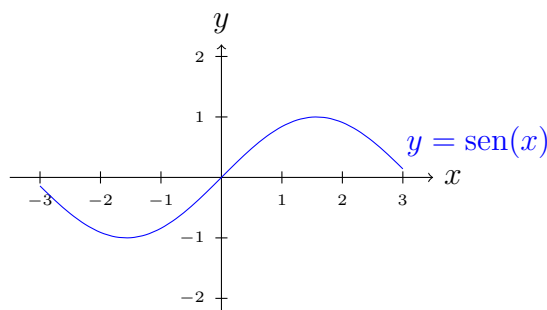


Por definição, $\text{sen}(\theta)$ é o tamanho do segmento OP_1 . Se o ponto P estiver no terceiro ou no quarto quadrantes então a definição de $\text{sen}(\theta)$ é -1 vezes o tamanho do segmento OP_1 . Se θ estiver no primeiro (como no desenho) ou segundo quadrante então não tem o produto por -1.

Vou deixar você brincar um pouco e verificar que $\text{sen}(0^\circ) = 0$, $\text{sen}(180^\circ) = 0$ e $\text{sen}(90^\circ) = 1$.

Seguem outros valores para o seno: $\text{sen}(30^\circ) = \frac{1}{2}$, $\text{sen}(45^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\text{sen}(60^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

E o gráfico, com valores de x em radiano.



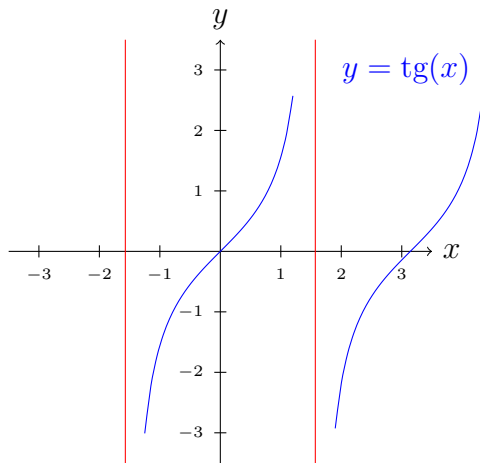
A função seno é, por definição, uma função ímpar. Volte na definição e calcule $\text{sen}(45^\circ)$. Você vai perceber que

$$\text{sen}(-45^\circ) = -\text{sen}(45^\circ).$$

(iii) A função $\text{tg}(\theta)$

A definição de tangente é simples: $\text{tg}(\theta) = \frac{\text{sen}(\theta)}{\cos(\theta)}$.

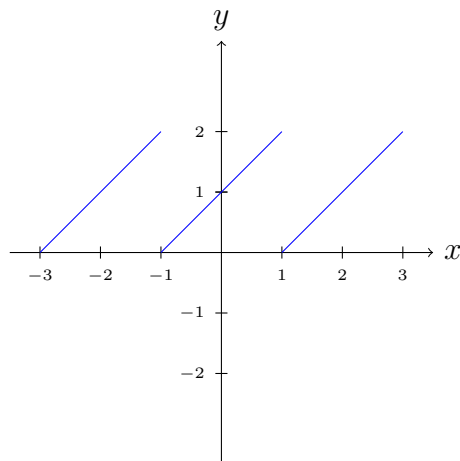
Exercício: Calcule $\text{tg}(0^\circ)$, $\text{tg}(30^\circ)$, $\text{tg}(45^\circ)$, $\text{tg}(60^\circ)$. Veja que $\text{tg}(90^\circ)$ não faz sentido, ou seja este ponto está fora do domínio da tangente já que $\cos(90^\circ) = 0$. Na verdade, existem infinitos pontos onde o cosseno é zero, e portanto, infinitos pontos que estão fora do domínio da tangente. Dá uma olhadinha no gráfico:



As retas vermelhas são retas que cruzam o eixo X exatamente nos pontos onde o cosseno se anula. Digamos que elas delimitam a área entre uma curva da tangente e a próxima. A curva da tangente nunca toca a reta vermelha. Elas são chamadas de assíntotas do gráfico da tangente. Veremos isso mais na frente.

(d) Funções periódicas

Observe o gráfico abaixo.



Você notou que os segmentos se repetem a cada dois passos no eixo x ? Por exemplo, de $x = -3$ até $x = -1$, há um segmento ascendente, e

depois de $x = -1$ até $x = 1$, o mesmo padrão se repete. Novamente, de $x = 1$ até $x = 3$, vemos o mesmo segmento. Essa função é chamada de periódica, e seu período é 2, o que significa que é necessário avançar 2 unidades no eixo x para que o padrão se repita. Observe que $f(x+2) = f(x)$ para a nossa função do desenho. Isso é verdade em geral: se uma função f é periódica de período T , então $f(x+T) = f(x)$. As funções seno e cosseno são ambas periódicas de período 2π . A função tangente também é periódica de período π .

2 Limite e continuidade

O primeiro capítulo foi só um aquecimento para o que vem agora. Vamos começar devagar...

2.1 Noção intuitiva

Considere os seguintes exemplos:

Exemplo 2.1.1. *O primeiro exemplo é a nossa velha conhecida parábola: $f(x) = x^2$*

Observe o que acontece com os valores de $f(x)$ quando fazemos os valores de x irem para zero pela direita do zero, ou seja, x se aproxima de zero por valores positivos:

x	2	1	1/2	1/3	1/4	1/5	1/6	...
x^2	4	1	$\frac{1}{4} = 0.25$	$\frac{1}{9} = 0.111$	$\frac{1}{16} = 0.0625$	$\frac{1}{25} = 0.04$	$\frac{1}{36} = 0.027$	...

Você percebeu que $f(x)$ também vai para zero? Veja agora o que acontece quando fazemos os valores de x se aproximarem de zero pela esquerda do zero, ou seja, por valores negativos:

x	-2	-1	-1/2	-1/3	-1/4	-1/5	-1/6	...
x^2	4	1	1/4	1/9	1/16	1/25	1/36	...

Opa! Mais uma vez $f(x)$ vai para zero! A notação matemática que representa toda esta conversa junto com as tabelas é $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$. É claro que as tabelas não provam nada. Mas este é o apenas o seu primeiro contato com limites.

Exemplo 2.1.2. *Mais um exemplo.*

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 2 \\ 1 & \text{se } x < 2 \end{cases}$$

Perceba que $2 \notin D(f)$! No exemplo anterior tínhamos $x \rightarrow 0$ e 0 estava no domínio da nossa função. Bom, mesmo que não faça sentido falar em $f(2)$, ainda faz sentido se perguntar o que acontece com $f(x)$ quando x está próximo de 2. Vamos começar com valores de x maiores que 2:

x	5	4	3	2.9	2.5	2.4	$\dots$	$\rightarrow 2^+$
$f(x)$	1	1	1	1	1	1	$\dots$	$\rightarrow 1$

Como f é a função constante, ela permanece sempre no valor 1. Aqui eu introduzi uma notação. A setinha com o 2^+ significa que x se aproxima de 2 pela direita, ou seja, por valores maiores que 2.

Agora vamos ver o que acontece com f se $x \rightarrow 2^-$?

x	-1	0	1	1.5	1.6	$\dots \rightarrow 2^-$
$f(x)$	1	1	1	1	1	$\dots \rightarrow 1$

Novamente f é sempre 1. Notação: $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 1$.

Exemplo 2.1.3. *Vou mudar um pouquinho a função do exemplo anterior:*

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 2 \\ -1 & \text{se } x < 2 \end{cases}$$

O que acontece com $f(x)$ se $x \rightarrow 2^+$?

x	4	3	2.5	2.4 $\dots \rightarrow 2^+$
$f(x)$	1	1	1	1 $\dots \rightarrow 1$

O que acontece com $f(x)$ se $x \rightarrow 2^-$?

x	-1	0	1	1.5	1.6 $\dots \rightarrow 2^-$
$f(x)$	-1	-1	-1	-1	-1 $\dots \rightarrow -1$

f foi para dois valores diferentes! Nesse caso dizemos que não existe o limite de f quando x se aproxima de 2. Em matemátiquês: $\nexists \lim_{x \rightarrow 2} f(x)$.

Formalizando...

Definição 2.1. *Seja I um intervalo real aberto e $a \in I$. Seja f uma função definida em I exceto, possivelmente, no ponto a . Dizemos que o limite de $f(x)$, quando x se aproxima de a é $L \in \mathbb{R}$ se $\forall \epsilon > 0, \exists \delta$ tal que $|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$. Notação: $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$.*

Calma!!! Essa frase só está dizendo de uma maneira complicada o que você já entendeu. Vou destrinchar: $|x - a| < \delta$ significa que x está muito próximo (pela direita ou pela esquerda) de a . Nos nossos exemplos tivemos $a = 0$ e depois $a = 2$. Depois temos $|f(x) - L| < \epsilon$ que significa que $f(x)$ está muito próximo de L . No primeiro exemplo tivemos $L = 0$, depois $L = 1$, e no último exemplo tínhamos dois valores de L (1 e -1), ou seja f não sabia muito bem o que ela queria da vida e por isso o limite não existiu.

2.2 Metendo a mão na massa

Agora vamos meter a mão na massa e começar a aprender como se resolvem alguns limites.

Antes de começar, deixa eu te falar duas coisas importantes que eu só vou poder justificar mais tarde.

Limites do tipo

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$$

em que o numerador e o denominador tendem a zero (limite do tipo $\frac{0}{0}$) têm de ser resolvidos por um plano B.

Ou seja, você não pode chegar dizendo que a resposta do limite acima é $\frac{0}{0}$. Isso não é resposta. $\frac{0}{0}$ nunca é resposta. Por outro lado dá pra calcular o limite abaixo porque o denominador não zera.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x + 2}$$

Qual é o resultado do limite acima?

Agora vamos aos exemplos:

(a) $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{4}} \sin(2\pi x)$

O primeiro limite é bem simples e intuitivo. Basta substituir. Mais tarde vamos justificar porque podemos fazer isso.

$$x \rightarrow \frac{1}{4} \Rightarrow 2\pi x \rightarrow \frac{\pi}{2} \Rightarrow \sin(2\pi x) \rightarrow \sin \frac{\pi}{2} = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \frac{1}{4}} \sin(2\pi x) = 1.$$

(b) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{2}}{x - 2}$

Este limite é um pouco mais complicado. Veja que 2 não está no domínio da função $f(x) = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{2}}{x - 2}$. De fato $f(2)$ daria $\frac{0}{0}$ e isso nós já sabemos que não é possível. Mas também sabemos que o limite não está interessado no que acontece no ponto 2, mas o que acontece ao redor dele.

Usando a igualdade $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$ vamos reescrever o denominador de f assim:

$$x - 2 = (\sqrt{x} + \sqrt{2})(\sqrt{x} - \sqrt{2}).$$

Basta tomar $a = \sqrt{x}$, $b = \sqrt{2}$ e se lembrar que o quadrado da raiz de um número é ele mesmo. Substituindo a expressão anterior em $f(x)$ vem

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{2}}{(\sqrt{x} + \sqrt{2})(\sqrt{x} - \sqrt{2})}.$$

Ora, e como $\sqrt{x} - \sqrt{2}$ dividido por si mesmo é igual a 1, obtemos

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{(\sqrt{x} + \sqrt{2})}.$$

E agora não há problema algum em substituir o 2.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{(\sqrt{x} + \sqrt{2})} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{(\sqrt{2} + \sqrt{2})} = \frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

Assim, $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{2}}{x - 2} = \frac{1}{2\sqrt{2}}.$

Agora vamos ao exemplo seguinte.

(c) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x}{|1-x|}$

Veja que novamente não podemos substituir o valor 1 diretamente na expressão ou obteríamos 0 sobre 0. Mas nesta altura do campeonato você já entendeu que ainda dá pra resolver o limite.

Aqui temos a função módulo. Se você não se lembra desta função, volte ao capítulo anterior e dê uma revisada. Vamos dividir o problema em duas partes. Primeiro faremos x tender a 1 por valores maiores que 1, ou seja, $x \rightarrow 1^+$. Nesse caso temos $x > 1 \Rightarrow 1 - x < 0 \Rightarrow |1 - x| = -(1 - x)$. Substituindo $|1 - x|$ por $-(1 - x)$ e lembrando que $(1 - x)$ dividido por ele mesmo é igual a 1 vem:

$$\frac{1 - x}{|1 - x|} = \frac{1 - x}{-(1 - x)} = -1.$$

Então

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1 - x}{|1 - x|} = -1. \quad (2.1)$$

Agora calculando o limite dessa mesma função com o x tendendo a 1 pela esquerda temos $x \rightarrow 1^- \Rightarrow x < 1 \Rightarrow 1 - x > 0 \Rightarrow |1 - x| = 1 - x$. Assim

$$\frac{1 - x}{|1 - x|} = \frac{1 - x}{1 - x} = 1,$$

e portanto

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1 - x}{|1 - x|} = 1. \quad (2.2)$$

Já sabemos que (2.1) e (2.2) significam que $\nexists \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x}{|1-x|}$.

E vamos ao nosso último exemplo:

(d) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 3x - 4}{x^2 - 16}$

Substituindo 4 na expressão acima, obtemos $\frac{4^2 - 12 - 4}{4^2 - 16} = \frac{0}{0}$. Novamente vamos procurar um plano B já que substituição direta não dá nenhum resultado. Veja que $4^2 - 12 - 4 = 0$ porque 4 é raiz do polinômio $p(x) = x^2 - 3x - 4$. Análogo para $q(x) = x^2 - 16$. Vamos encontrar todas as raízes dos polinômios p e q . Usando Bhaskara obtemos 4 e -1 como raízes de p e 4 e -4 como raízes de q . Veja que é possível reescrever p usando suas raízes assim $p(x) = (x - r_1)(x - r_2) = (x - 4)(x - (-1)) = (x - 4)(x + 1)$. Analogamente temos $q(x) = (x - 4)(x + 4)$.

Logo é possível reescrever o nosso limite assim:

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x - 4)(x + 1)}{(x - 4)(x + 4)} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x + 1)}{(x + 4)}.$$

Agora podemos usar o plano A, substituir o valor 4 na expressão acima e obter a resposta do nosso limite:

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 3x - 4}{x^2 - 16} = \frac{5}{8}.$$

Pra finalizar esta sessão eu vou responder à seguinte pergunta: Será que nos 4 exemplos de limite resolvidos acima, a resposta que encontramos é a única resposta?

Imagine que eu peça a dois alunos diferentes (João e Joana) para resolver o mesmo limite. Aí o João encontra uma resposta e a Joana encontra outra resposta, diferente da resposta do João. Pode isso? Não, né? Senão a definição de limite não estaria boa. Pois a proposição abaixo garante que João e Joana não podem encontrar respostas diferentes para o mesmo exercício de limite.

Proposição 2.1. (*Unicidade do limite*)

Se $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L_1$ e $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L_2$ então $L_1 = L_2$. Isto é, o limite, se existir, é único.

Exercício 1

Calcule o limite: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x^2 - 3x + 2}$

2.3 Propriedades elementares dos limites

Esta sessão, apesar de ser um pouco teórica demais para o meu gosto (e provavelmente para o seu também) é muito importante na hora de resolver os exercícios. Por exemplo, quando calculamos $\lim_{x \rightarrow 1} (x+1) = \lim_{x \rightarrow 1} x + \lim_{x \rightarrow 1} 1 = 2$, estamos usando diversas propriedades aí. A primeira delas é que o limite da soma é a soma dos limites, como vemos logo abaixo.

Sejam f e g funções tais que o $\text{Dom} f \cap \text{Dom} g \neq \emptyset$ e $c \in \mathbb{R}$. Então

- (a) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm g(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x)$,
- (b) $\lim_{x \rightarrow a} (cf)(x) = c \lim_{x \rightarrow a} f(x)$, ou seja, a constante pode cair fora do limite,
- (c) O limite do produto, assim como a soma, também pode ser separado em um produto de limites: $\lim_{x \rightarrow a} (f \cdot g)(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x)$
- (d) O mesmo vale para o limite da divisão, tomando cuidado com o denominador. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f}{g}(x) = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}$, desde que g não se anule para valores de x perto de a e também $\lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0$.
- (e) A potência: $\lim_{x \rightarrow a} (f(x))^u = (\lim_{x \rightarrow a} f(x))^u$, $\forall u \in \mathbb{N}$

(f) A raiz quadrada: $\lim_{x \rightarrow a} \sqrt{f(x)} = \sqrt{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}$ desde que $f(x) \geq 0$

E finalmente cosseno e seno:

(g) $\lim_{x \rightarrow a} \cos(f(x)) = \cos(\lim_{x \rightarrow a} f(x))$

(h) $\lim_{x \rightarrow a} \sin(f(x)) = \sin(\lim_{x \rightarrow a} f(x))$

Veja que usando as propriedades acima podemos concluir que se $p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função polinomial e $a \in \mathbb{R}$ então $\lim_{x \rightarrow a} p(x) = p(a)$, o que faz sentido pois $a \in D(p)$. Vamos terminar esta sessão com um exemplo envolvendo função polinomial.

Exemplo 2.3.1. : Seja $p(x) = x^7 + 3x^3 - 8$. Vamos calcular $\lim_{x \rightarrow 1} p(x)$:

$$\lim_{x \rightarrow 1} p(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (x^7 + 3x^3 - 8) = 1^7 + 3 \cdot 1^3 - 8 = 1 + 3 - 8 = -4$$

Você consegue identificar quais propriedades foram usadas nesta conta?

2.4 Limites laterais

Vamos começar com um exemplo:

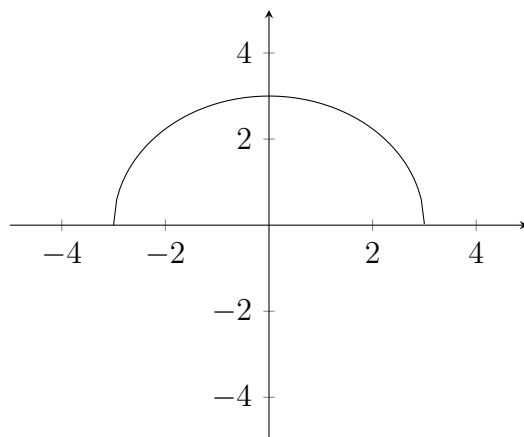
Exemplo 2.4.1.

$$f(x) = \sqrt{9 - x^2}$$

Você se lembra o domínio da função raiz quadrada? Tudo o que está dentro da raiz tem que ser maior ou igual a zero. Então:

$$9 - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow 9 \geq x^2 \Leftrightarrow -3 \leq x \leq 3$$

Vou traçar a parábola $y = 9 - x^2$ pra te ajudar:



Portanto nossa função só toma valores entre -3 e 3.

$$f : [-3, 3] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{9 - x^2}$$

Ora, se eu quiser calcular o limite de f em 3, por causa do domínio, só faz sentido quando x se aproxima de 3 por valores menores que 3. Isso se escreve assim:

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = 0$$

Analogamente se eu quiser calcular o limite de f em -3, por causa do domínio, só faz sentido quando x se aproxima de -3 por valores maiores que -3.

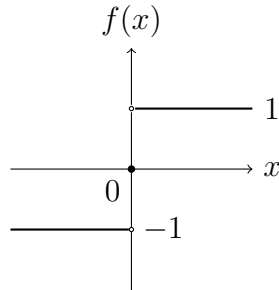
$$\lim_{x \rightarrow -3^+} f(x) = 0$$

E isso é limite lateral! Outro exemplo:

Exemplo 2.4.2. Neste exemplo o Domínio é $\mathbb{R}$ mas a função tem três pedaços.

$$f(x) = \begin{cases} -1, & \text{se } x < 0 \\ 0, & \text{se } x = 0 \\ 1, & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

Queremos calcular $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$. Dá uma olhada no gráfico de f :



Vamos calcular os limites laterais quando x tende a 0 pra ver o que acontece:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1 \text{ e } \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -1,$$

portanto

$$\nexists \lim_{x \rightarrow 0} f(x).$$

Sabe como eu sei que este limite não existe? Olha o teorema abaixo:

Teorema 2.4.1. Se f é definida em um intervalo aberto contendo a , exceto possivelmente no ponto a , então $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$, se e somente se $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$ e $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L$.

O nosso teorema nos diz várias coisas. Primeiro, Se o limite $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ existir, ou seja, for um número, então os limites laterais também existirão e darão o mesmo número. Segundo, se os limites laterais existirem e forem para o mesmo número (digamos L) então o limite $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ existe e vai para L . Terceiro, se um dos limites laterais não existir então o limite $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ não existe. Quarto, se os limites laterais existirem e não forem para o mesmo número então o limite $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ não existe. E este foi o caso do exemplo.

Mais um exemplo:

Exemplo 2.4.3. Vamos calcular $\lim_{x \rightarrow 0} |x|$. Sabemos que $|x|$ pode ser x , se $x \geq 0$ ou $-x$ se $x < 0$. Então precisaremos calcular os limites laterais.

$$x \rightarrow 0^+ \Rightarrow x > 0 \Rightarrow |x| = x \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} |x| = \lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0$$

$$x \rightarrow 0^- \Rightarrow x < 0 \Rightarrow |x| = -x \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} |x| = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-x) = -\lim_{x \rightarrow 0^-} x = 0$$

Pelo teorema, $\lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0$.

Último exemplo:

Exemplo 2.4.4. $\lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{3+x}{\sqrt{9-x^2}}$

$$\begin{aligned} \frac{3+x}{\sqrt{9-x^2}} &= \frac{3+x}{\sqrt{(3+x)(3-x)}} = \frac{3+x}{\sqrt{(3+x)}\sqrt{(3-x)}} = \frac{\sqrt{3+x}}{\sqrt{(3-x)}} \\ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{3+x}{\sqrt{9-x^2}} &= \frac{0}{\sqrt{6}} = 0 \end{aligned}$$

2.5 Limites envolvendo infinito

Até agora trabalhamos com $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ onde a e L são números reais.

Agora veremos a noção de limites nos seguintes casos:

- Caso 1: $\begin{cases} a = +\infty \text{ e } L \in \mathbb{R} \\ a = -\infty \text{ e } L \in \mathbb{R} \end{cases}$
- Caso 2: $\begin{cases} a \in \mathbb{R} \text{ e } L = +\infty \\ a \in \mathbb{R} \text{ e } L = -\infty. \end{cases}$
- Caso 3: $\begin{cases} a = +\infty \text{ e } L = \pm\infty \\ a = -\infty \text{ e } L = \pm\infty. \end{cases}$

2.5.1 Caso 1

Considere $L \in \mathbb{R}$ e $a = \pm\infty$. Como sempre apresentamos a teoria com exemplos:

Exemplo 2.5.1. $f(x) = \frac{1}{x}, x \in \mathbb{R}^*$. O que será que acontece com $f(x)$ quando $x \rightarrow +\infty$?

Definição 2.2. Seja f uma função definida em um intervalo aberto $(a, +\infty)$. Dizemos que o limite de $f(x)$ quando x tende a $+\infty$ é $L \in \mathbb{R}$ se $\forall \epsilon > 0 \exists \beta > 0$, tal que $x > \beta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$.

A notação é essa aqui: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$. No exemplo tivemos $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

Tente adaptar a definição para o caso $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$.

Antes de passar aos exemplos, tem outro caso que não pode acontecer, mas eu só vou poder justificar mais tarde, quando eu falar em indeterminação.

O primeiro exemplo que vamos estudar é

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x - 5}{x + 8}.$$

Veja que, na força bruta, isso daria $\frac{\infty}{\infty}$. Isso não pode. Mais tarde eu justifico porque. Também vamos ter que pensar num plano B toda vez que isso acontecer.

Então por enquanto guarde esses dois casos de NÃO mesmo se você não entende ainda qual é o problema: $\frac{\infty}{\infty}$ e $\frac{0}{0}$.

Vamos lá?

Exemplo 2.5.2.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x - 5}{x + 8}$$

À primeira vista temos $+\infty$ no numerador e no denominador.

Para resolver este exemplo, podemos colocar o x em evidência no numerador e no denominador:

$$\frac{x(2 - \frac{5}{x})}{x(1 + \frac{8}{x})}$$

.

Veja que " $\frac{5}{x}$ " e " $\frac{8}{x}$ " não são um problema pois $x \neq 0$. Portanto:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x - 5}{x + 8} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 - \frac{5}{x}}{1 + \frac{8}{x}} = \frac{2 - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5}{x}}{1 + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{8}{x}} = 2.$$

Obs: Todas as propriedades de limite que já estudamos ainda valem no caso 1, isto é, quando $a = \pm\infty$.

Exemplo 2.5.3. Vamos provar que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 - 3x + 5}{4x^5 - 2} = 0$.

Dividimos o numerador e o denominador por x^5 , obtendo assim:

$$\frac{x^5(\frac{2}{x^2} - \frac{3}{x^4} + \frac{5}{x^5})}{x^5(4 - \frac{2}{x^5})} = \frac{(\frac{2}{x^2} - \frac{3}{x^4} + \frac{5}{x^5})}{(4 - \frac{2}{x^5})}.$$

Veja que a quando x vai a infinito, a expressão do numerador vai para 0 e a expressão do denominador vai para quatro, e portanto o limite acima vai para $\frac{0}{4} = 0$.

Exemplo 2.5.4. Seja $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \frac{1}{x}.$$

Queremos saber o que acontece com $f(x)$ quando $x \rightarrow +\infty$.

À medida que x cresce cada vez mais, o denominador fica cada vez maior.

Como consequência, a fração $\frac{1}{x}$ vai ficando cada vez menor.

Por exemplo,

$$f(10) = \frac{1}{10}, \quad f(100) = \frac{1}{100}, \quad f(1000) = \frac{1}{1000}.$$

Ou seja, os valores de $f(x)$ vão se aproximando de zero.

Assim,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

E quando $x \rightarrow -\infty$?

O próximo é um exercício pra você:

Exercício 2

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} = 1.$$

Exercício 3

Seja $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \frac{1}{x^2}.$$

Calcule $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ e $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

Agora o exemplo de um limite que não existe.

Exemplo 2.5.5. *Os seguintes limites não existem: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \sin(x)$ e $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \cos(x)$.*

Observação 2.5.1. *Em geral as funções periódicas cumprem $\nexists \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)$, uma vez que elas se repetem a cada período T . A única função periódica para a qual esses limites existem é a função constante.*

2.5.2 Caso 2

Considere $a \in \mathbb{R}$ e $L = \pm\infty$.

Exemplo 2.5.6. Seja $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{1}{x}$. Queremos saber o que acontece com $f(x)$ quando $x \rightarrow 0^+$:

x	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{100}$	$\rightarrow 0^+$
$f(x)$	1	2	4	10	100	$\rightarrow +\infty$

Notação:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty.$$

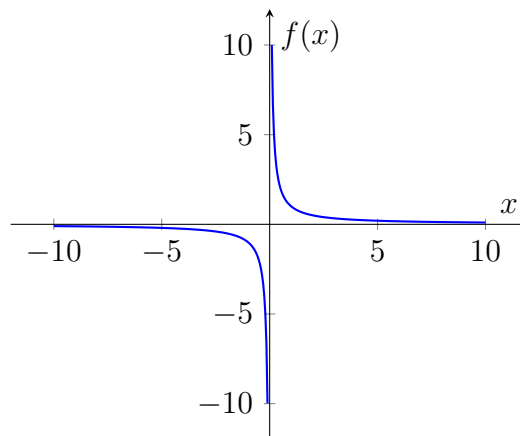
E quando $x \rightarrow 0^-$?

x	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{10}$	$-\frac{1}{100}$	$\rightarrow 0^-$
$f(x)$	-1	-2	-4	-10	-100	$\rightarrow -\infty$

Notação:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$$

Gráfico de $f(x) = \frac{1}{x}$:



Exemplo 2.5.7. $f(x) = \frac{1}{x^2}$, $x \in \mathbb{R}^*$. Queremos saber o que acontece com $f(x)$ quando $x \rightarrow 0^+$:

x	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{100}$	$\rightarrow 0^+$
$f(x)$	1	4	100	1000	$\rightarrow +\infty$

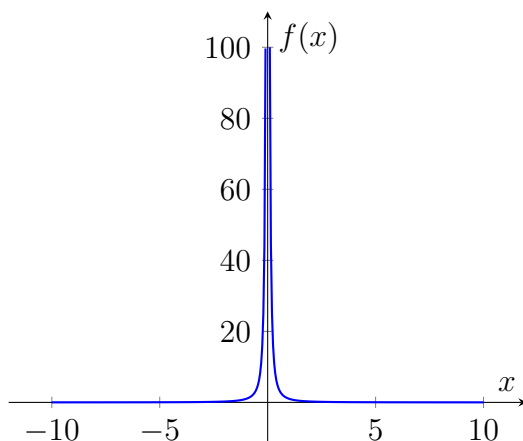
E quando $x \rightarrow 0^-$?

x	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{10}$	$-\frac{1}{100}$	$\rightarrow 0^-$
$f(x)$	1	4	100	1000	$\rightarrow +\infty$

Notação:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$$

Gráfico de $f(x) = \frac{1}{x^2}$:



Agora vamos formalizar os conceitos que você já entendeu:

Definição 2.3. *Seja f uma função definida em um intervalo aberto contendo $a \in \mathbb{R}$, exceto possivelmente no ponto $x = a$. Dizemos que o limite de $f(x)$, quando x se aproxima de a , é $+\infty$ (ou $-\infty$) se, para todo $A > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, se $0 < |x - a| < \delta$, então $f(x) > A$ (ou $f(x) < -A$).*

Notação:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty (-\infty).$$

E para o limite lateral:

Definição 2.4. *Seja f uma função definida em um intervalo aberto da forma (a, c) (ou (d, a)). Dizemos que o limite de $f(x)$, quando x se aproxima de a pela direita (ou pela esquerda), é $+\infty$ se, para todo $A > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, se $a < x < a + \delta$ (ou $a - \delta < x < a$), então $f(x) > A$.*

Notação:

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty \quad \text{ou} \quad \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty.$$

Sua vez:

Exercício 4

Defina

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty.$$

Mais exemplos:

Exemplo 2.5.8. a)

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 3x + 1}{x - 2}$$

Analisando os limites laterais:

- Para $x \rightarrow 2^+$:
 $x > 2 \Rightarrow x - 2 > 0 \Rightarrow x - 2 \rightarrow 0^+$
 $x^2 + 3x + 1 \rightarrow 11$

Portanto,

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 + 3x + 1}{x - 2} = +\infty$$

- Para $x \rightarrow 2^-$:
 $x < 2 \Rightarrow x - 2 < 0 \Rightarrow x - 2 \rightarrow 0^-$
 $x^2 + 3x + 1 \rightarrow 11$

Portanto,

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 + 3x + 1}{x - 2} = -\infty$$

Como os limites laterais são diferentes, concluímos que:

$$\nexists \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 3x + 1}{x - 2}$$

b)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x^2}$$

Analisando os limites laterais:

- Para $x \rightarrow 0^+$:
 $x > 0 \Rightarrow |x| = x$

$$\frac{|x|}{x^2} = \frac{x}{x^2} = \frac{1}{x} \rightarrow +\infty$$

- Para $x \rightarrow 0^-$:
 $x < 0 \Rightarrow |x| = -x$

$$\frac{|x|}{x^2} = \frac{-x}{x^2} = \frac{-1}{x} \rightarrow +\infty$$

Portanto,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x^2} = +\infty$$

Veja que no segundo limite o numerador era negativo mas x , no denominador, também era negativo. E negativo com negativo dá positivo. É muito importante verificar os sinais do numerador e do denominador.

c)

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x+1}{x}$$

Quando $x \rightarrow 0^+$, temos $x > 0$ e muito próximo de zero.

Note que $x+1 \rightarrow 1$.

Então, o numerador se aproxima de 1 e o denominador se aproxima de zero.

Logo, a função explode.

E vai para $+\infty$, porque o numerador se aproxima de um número positivo e o denominador se aproxima de zero por valores positivos.

Logo,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x+1}{x} = +\infty.$$

Exercício 5

a) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x+1}{x}$

b) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x-1}{x}$

c) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x-1}{x}$

2.5.3 Caso 3

Considere $a = \pm\infty$ e $L = \pm\infty$.

Definição 2.5. Dizemos que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

se, para todo $A > 0$, existe $B > 0$ tal que, se $x > B$, então $f(x) > A$.
Analogamente, dizemos que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$$

se, para todo $A > 0$, existe $B > 0$ tal que, se $x > B$, então $f(x) < -A$.
Vou deixar você completar as definições

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

e

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty.$$

Exemplo 2.5.9.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5+x^3}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 \left(\frac{5}{x^3} + 1 \right)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(\frac{5}{x^3} + 1 \right) = +\infty$$

Observação 2.5.2. Considere:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 - \lim_{x \rightarrow +\infty} x \stackrel{?}{=} +\infty - (+\infty)$$

Esse tipo de operação,

$$\infty - \infty,$$

não está bem definida, assim como os casos

$$\frac{0}{0} \quad e \quad \frac{\infty}{\infty}.$$

Veremos mais tarde que esses três casos são chamados de **indeterminações**.

Pergunta que não quer calar: Mas será que ainda conseguimos resolver o limite abaixo? Veremos isso com mais detalhes na próxima aula.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - x) = ?$$

Exercício 6

Identifique o caso e resolva o limite abaixo:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^4 + 3x^2 + 2x + 1}{4 - x^4}$$

2.5.4 Propriedades de limites infinitos

Considere duas funções f e g , e os limites

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x).$$

Suponha que

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L_1 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) = L_2.$$

Aqui a e L podem ser números reais ou ser o infinito. O importante é que tem que ser o mesmo a para as duas funções. A seguir, apresentamos algumas propriedades desses limites.

a) Se $L_1 = +\infty$ e $L_2 = +\infty$, então

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = +\infty.$$

b) Se $L_1 = -\infty$ e $L_2 = -\infty$, então

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = -\infty.$$

c) Se $L_1 = +\infty$ e $L_2 = +\infty$, então

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) - g(x))$$

é uma **indeterminação do tipo** $\infty - \infty$. Mas o que é isso professora? Você vai entender com os exemplos abaixo.

Exemplos:

- Considere

$$f(x) = x \quad \text{e} \quad g(x) = x.$$

Então, quando $x \rightarrow +\infty$, temos

$$f(x) \rightarrow +\infty \quad \text{e} \quad g(x) \rightarrow +\infty,$$

mas

$$f(x) - g(x) = x - x = 0,$$

logo,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - g(x)) = 0.$$

- Considere

$$f(x) = x + 1 \quad \text{e} \quad g(x) = x.$$

Quando $x \rightarrow +\infty$, temos

$$f(x) \rightarrow +\infty \quad \text{e} \quad g(x) \rightarrow +\infty.$$

No entanto,

$$f(x) - g(x) = (x + 1) - x = 1,$$

logo,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - g(x)) = 1.$$

- Considere

$$f(x) = 2x \quad \text{e} \quad g(x) = x.$$

Quando $x \rightarrow +\infty$, temos

$$f(x) \rightarrow +\infty \quad \text{e} \quad g(x) \rightarrow +\infty.$$

No entanto,

$$f(x) - g(x) = 2x - x = x,$$

logo,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - g(x)) = +\infty.$$

Esses exemplos mostram que a expressão $\infty - \infty$ não possui um comportamento único, podendo resultar em diferentes valores. Por isso, dizemos que é uma **indeterminação**.

d) Se $L_1 = +\infty$ e $L_2 = K$, com $K \in \mathbb{R}$, então

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = +\infty.$$

e) Se $L_1 = -\infty$ e $L_2 = K$, com $K \in \mathbb{R}$, então

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = -\infty.$$

f) Se $L_1 = +\infty$ e $L_2 = +\infty$, então

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) = +\infty.$$

g) Se $L_1 = +\infty$ e $L_2 = -\infty$, então

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) = -\infty.$$

h) Se $L_1 = +\infty$ e $L_2 = K$, com $K > 0$, então

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) = +\infty.$$

Se $L_1 = +\infty$ e $L_2 = K$, com $K < 0$, então

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) = -\infty.$$

Se $L_1 = \pm\infty$ e $L_2 = 0$, então

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x))$$

é uma **indeterminação do tipo** $0 \cdot \infty$.

Exemplos:

- Considere

$$f(x) = x \quad \text{e} \quad g(x) = \frac{1}{x}.$$

Quando $x \rightarrow +\infty$, temos

$$f(x) \rightarrow +\infty \quad \text{e} \quad g(x) \rightarrow 0,$$

mas

$$f(x) \cdot g(x) = x \cdot \frac{1}{x} = 1,$$

logo,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)g(x) = 1.$$

- Considere

$$f(x) = x \quad \text{e} \quad g(x) = \frac{1}{x^2}.$$

Quando $x \rightarrow +\infty$, temos

$$f(x) \rightarrow +\infty \quad \text{e} \quad g(x) \rightarrow 0,$$

mas

$$f(x) \cdot g(x) = x \cdot \frac{1}{x^2} = \frac{1}{x} \rightarrow 0.$$

- Considere

$$f(x) = x^2 \quad \text{e} \quad g(x) = \frac{1}{x}.$$

Quando $x \rightarrow +\infty$, temos

$$f(x) \rightarrow +\infty \quad \text{e} \quad g(x) \rightarrow 0.$$

Portanto,

$$f(x) \cdot g(x) = x^2 \cdot \frac{1}{x} = x \rightarrow +\infty.$$

Ou seja, nesse caso, a expressão do tipo

$$\infty \cdot 0$$

resultou em $+\infty$.

Esses exemplos mostram que a expressão $0 \cdot \infty$ pode resultar em diferentes valores. Portanto, trata-se de uma **indeterminação**.

- i) Se $L_1 = K$, com $K \in \mathbb{R}$, e $L_2 = \pm\infty$, então

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

- j) Se $L_1 = \pm\infty$ e $L_2 = \pm\infty$, então

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

é uma **indeterminação do tipo $\frac{\infty}{\infty}$** .

Exemplos:

- Considere

$$f(x) = x \quad \text{e} \quad g(x) = x.$$

Quando $x \rightarrow +\infty$, temos

$$f(x) \rightarrow +\infty \quad \text{e} \quad g(x) \rightarrow +\infty,$$

mas

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x}{x} = 1,$$

logo,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

- Considere

$$f(x) = x \quad \text{e} \quad g(x) = x^2.$$

Quando $x \rightarrow +\infty$, temos

$$f(x) \rightarrow +\infty \quad \text{e} \quad g(x) \rightarrow +\infty,$$

mas

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x}{x^2} = \frac{1}{x} \rightarrow 0.$$

- Considere

$$f(x) = x^2 \quad \text{e} \quad g(x) = x.$$

Quando $x \rightarrow +\infty$, temos

$$f(x) \rightarrow +\infty \quad \text{e} \quad g(x) \rightarrow +\infty,$$

mas

$$\frac{f(x)}{g(x)} = x \rightarrow +\infty.$$

Esses exemplos mostram que a expressão $\frac{\infty}{\infty}$ pode assumir diferentes valores. Portanto, trata-se de uma **indeterminação**.

- k) Se $L_1 = K$, com $K > 0$, e $L_2 = 0^+$ (isto é, $g(x) \rightarrow 0$ pela direita), então

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty.$$

Se $L_1 = +\infty$ e $L_2 = 0^+$, então

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty.$$

Se $L_1 = K$, com $K > 0$, e $L_2 = 0^-$ (isto é, $g(x) \rightarrow 0$ pela esquerda), então

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = -\infty.$$

Se $L_1 = +\infty$ e $L_2 = 0^-$, então

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = -\infty.$$

Se $L_1 = 0$ e $L_2 = 0$, então

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

é uma **indeterminação do tipo** $\frac{0}{0}$.

Exemplos:

- Considere

$$f(x) = x \quad \text{e} \quad g(x) = x.$$

Quando $x \rightarrow 0$, temos

$$f(x) \rightarrow 0 \quad \text{e} \quad g(x) \rightarrow 0,$$

mas

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x}{x} = 1 \quad (x \neq 0),$$

logo,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

- Considere

$$f(x) = x \quad \text{e} \quad g(x) = x^2.$$

Quando $x \rightarrow 0$, temos

$$f(x) \rightarrow 0 \quad \text{e} \quad g(x) \rightarrow 0,$$

mas

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x}{x^2} = \frac{1}{x}.$$

Assim,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x)}{g(x)} = -\infty.$$

Esses exemplos mostram que a expressão $\frac{0}{0}$ pode resultar em diferentes comportamentos. Portanto, trata-se de uma **indeterminação**.

Observação 2.1. *Uma observação importante é que, em todos os casos discutidos acima, podemos substituir o limite $\lim_{x \rightarrow a}$ por:*

- *limite lateral à direita:* $\lim_{x \rightarrow a^+}$,
- *limite lateral à esquerda:* $\lim_{x \rightarrow a^-}$,
- *limite no infinito:* $\lim_{x \rightarrow +\infty}$,
- *limite no menos infinito:* $\lim_{x \rightarrow -\infty}$.

Em todos esses casos, as propriedades continuam válidas, desde que a substituição seja feita de forma consistente, isto é, aplicada simultaneamente às funções f e g .

Exemplo 2.5.10. *Nos exemplos abaixo, não há indeterminação. As propriedades de limites permitem concluir o resultado diretamente.*

- *(Soma de infinitos)*

Considere

$$f(x) = x \quad \text{e} \quad g(x) = x.$$

Quando $x \rightarrow +\infty$, temos

$$f(x) \rightarrow +\infty \quad \text{e} \quad g(x) \rightarrow +\infty.$$

Portanto,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) + g(x)) = +\infty.$$

Observação: *não há indeterminação - não é necessário fazer contas.*

- (Soma com número real)

Considere

$$f(x) = x \quad e \quad g(x) = 3.$$

Quando $x \rightarrow +\infty$, temos

$$f(x) \rightarrow +\infty \quad e \quad g(x) \rightarrow 3.$$

Logo,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) + g(x)) = +\infty.$$

- (Produto com constante positiva)

Considere

$$f(x) = x \quad e \quad g(x) = 2.$$

Quando $x \rightarrow +\infty$, temos

$$f(x) \rightarrow +\infty \quad e \quad g(x) \rightarrow 2 > 0.$$

Assim,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)g(x) = +\infty.$$

- (Divisão por zero pela direita)

Considere

$$f(x) = 1 \quad e \quad g(x) = x.$$

Quando $x \rightarrow 0^+$, temos

$$f(x) \rightarrow 1 \quad e \quad g(x) \rightarrow 0^+.$$

Logo,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty.$$

Agora, vou ensinar um truque muito útil para algumas indeterminações.

Exercício 7

Agora podemos voltar no exemplo que ficou em aberto na sessão anterior:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - x)$$

Se tentarmos fazer na força bruta, aparece

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 - \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty - (+\infty),$$

que é uma indeterminação.

Então precisamos de um plano B. O plano B aqui é colocar x em evidência:

$$x^2 - x = x(x - 1).$$

Agora analisamos cada fator:

$$x \rightarrow +\infty \quad \text{e} \quad x - 1 \rightarrow +\infty.$$

Nós já sabemos que $(+\infty) \cdot (+\infty) = +\infty$.

Logo,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - x) = +\infty.$$

Exercício 8

Considere o limite

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^4 - 3} - x^2 \right).$$

Perceba que

$$\sqrt{x^4 - 3} \rightarrow +\infty \quad \text{e} \quad x^2 \rightarrow +\infty,$$

portanto temos uma indeterminação do tipo $\infty - \infty$.

Um truque que funciona muito bem aqui é multiplicar e dividir pela expressão conjugada:

$$\sqrt{x^4 - 3} + x^2.$$

Vamos resolver:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^4 - 3} - x^2 \right) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^4 - 3} - x^2)(\sqrt{x^4 - 3} + x^2)}{\sqrt{x^4 - 3} + x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4 - 3 - x^4}{\sqrt{x^4 - 3} + x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3}{\sqrt{x^4 - 3} + x^2}. \end{aligned}$$

Agora, como o denominador tende a $+\infty$, segue que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3}{\sqrt{x^4 - 3} + x^2} = 0.$$

Portanto,

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^4 - 3} - x^2 \right) = 0}$$

Exercício 9

Calcule

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(7x - 8)^{20}(8x + 7)^{30}}{(8x + 1)^{50}}$$

2.6 Assíntotas

Vamos começar com a **assíntota vertical**. Para isso, considere a função

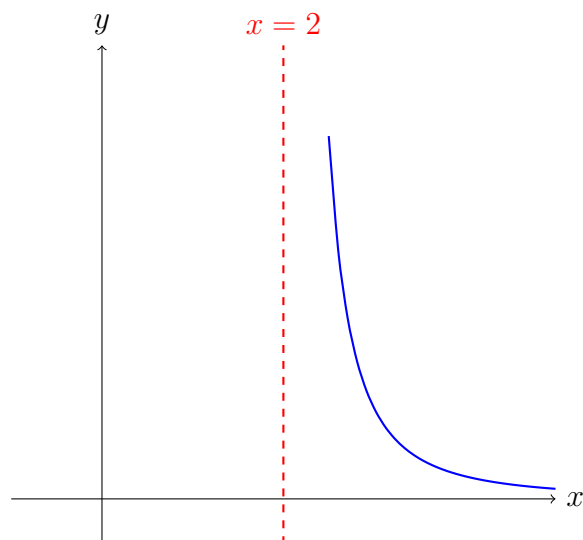
$$f(x) = \frac{1}{(x - 2)^2}, \quad x > 2$$

Vamos observar o comportamento de $f(x)$ quando x se aproxima de 2.

x	$f(x) = \frac{1}{(x - 2)^2}$
2,5	4
2,4	6,25
2,3	11,11
2,2	25
2,1	100

Observe que, quando $x \rightarrow 2^+$, o valor de $f(x)$ cresce muito rapidamente. Ou seja,

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty.$$



No gráfico, observe que a curva se aproxima cada vez mais da reta $x = 2$, mas nunca a toca. Isso caracteriza a presença de uma assíntota vertical. Como

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty,$$

dizemos que a reta

$$x = 2$$

é uma **assíntota vertical** do gráfico de f .

Definição 2.6. A reta $x = a$ é uma **assíntota vertical** do gráfico de $y = f(x)$ se pelo menos uma das seguintes condições for satisfeita:

a) $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty;$

b) $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty;$

c) $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty;$

d) $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty.$

Agora vamos para **Assíntotas horizontais**. Vamos começar com um exemplo.

Considere a função

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 2}}, \quad x > 0.$$

Vamos calcular o limite de $f(x)$ quando $x \rightarrow +\infty$.
Colocando x^2 em evidência dentro da raiz, temos:

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 \left(1 + \frac{2}{x^2}\right)}}.$$

Como $x > 0$, podemos retirar x da raiz:

$$f(x) = \frac{x}{x\sqrt{1 + \frac{2}{x^2}}}.$$

Simplificando,

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{2}{x^2}}}.$$

Agora, fazendo $x \rightarrow +\infty$, temos

$$\frac{2}{x^2} \rightarrow 0,$$

logo,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + 0}} = 1.$$

Como

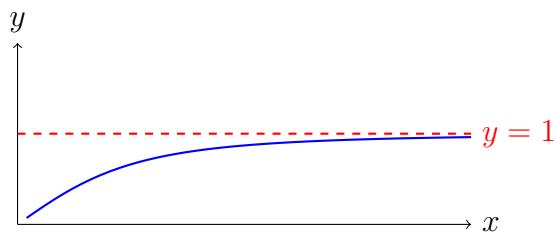
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1,$$

dizemos que a reta

$$y = 1$$

é uma **assíntota horizontal** do gráfico de f .

Gráfico



No gráfico, observe que a função se aproxima cada vez mais da reta $y = 1$ quando x cresce, mas nunca a atinge. Isso caracteriza a presença de uma assíntota horizontal.

Definição 2.7. A reta $y = b$ é uma **assíntota horizontal** do gráfico de $y = f(x)$ se pelo menos uma das seguintes condições for satisfeita:

$$a) \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b;$$

$$b) \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b.$$

Exemplo 2.6.1. Considere a função

$$f(x) = \frac{5x}{\sqrt{x^2 + 1}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Vamos estudar o comportamento de $f(x)$ quando $x \rightarrow +\infty$ e quando $x \rightarrow -\infty$.

Para $x \rightarrow +\infty$, temos

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x}{\sqrt{x^2 + 1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x}{|x|\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x}{x\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}} = 5.$$

Logo, $y = 5$ é uma assíntota horizontal.

Por outro lado, para $x \rightarrow -\infty$, temos

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x}{\sqrt{x^2 + 1}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x}{|x|\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x}{-x\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}} = -5.$$

Logo, $y = -5$ também é uma assíntota horizontal.

Observação 2.2. Este exemplo mostra que é importante calcular separadamente os limites quando $x \rightarrow +\infty$ e quando $x \rightarrow -\infty$, pois uma mesma função pode ter assíntotas horizontais diferentes em cada direção. Então se sua questão de prova pede pra você encontrar todas as assíntotas horizontais, é melhor você sair testando tudo, pra garantir o ponto;)

Exercício 10

a) (Assíntota vertical)

Considere a função

$$f(x) = \frac{1}{x-3}.$$

- i) Calcule os limites laterais de $f(x)$ quando $x \rightarrow 3$.
- ii) Determine se a reta $x = 3$ é uma assíntota vertical.
- iii) Esboce o gráfico da função indicando a assíntota.

b) (Assíntota horizontal)

Considere a função

$$g(x) = \frac{2x+1}{x+1}.$$

- i) Calcule $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$.
- ii) Calcule $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$.
- iii) Determine as assíntotas horizontais do gráfico de g .

2.7 Limite da função exponencial

É fácil ver, observando o gráfico da função exponencial, ou então fazendo uma tabelinha, que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0.$$

Agora observe o gráfico da função e^{-x} , que já vimos anteriormente. Essa função apresenta um comportamento inverso:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = +\infty.$$

Em ambos os casos, a reta $y = 0$ é uma **assíntota horizontal** dos gráficos das funções e^x e e^{-x} .

Um resultado que vai te ajudar muito na hora de resolver exercícios é o seguinte:

Lema 2.1. *Para todo $a \in \mathbb{R}$,*

$$\lim_{x \rightarrow a} e^x = e^a.$$

2.8 Limite da função $\ln(x)$

Considere a função logarítmica

$$f(x) = \ln(x), \quad x > 0.$$

É fácil ver, observando o gráfico da função $\ln(x)$ ou construindo uma pequena tabela de valores, que:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty.$$

Ou seja, a função cresce sem limite quando x cresce, e tende a menos infinito quando x se aproxima de zero pela direita.

Nesse caso, a reta

$$x = 0$$

é uma **assíntota vertical** do gráfico de $\ln(x)$.

Lema 2.2. Para todo $a > 0$,

$$\lim_{x \rightarrow a} \ln(x) = \ln(a).$$

Exercício 11

Esboce o gráfico da seguinte função:

$$f(x) = \begin{cases} \ln(x), & \text{se } x > 0, \\ e^x, & \text{se } x \leq 0. \end{cases}$$

b) Calcule os seguintes limites:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow 0} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x).$$

Exercício 12

Calcule os seguintes limites:

a) $\lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 + \ln(x));$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x \ln(2) - \ln(3^x + 1)).$

2.9 Limite das funções $\cos(x)$ e $\sin(x)$

Considere as funções trigonométricas

$$f(x) = \sin(x) \quad \text{e} \quad g(x) = \cos(x).$$

Observando seus gráficos, ou mesmo analisando seus valores, vemos que essas funções têm um comportamento bastante diferente da exponencial e do logaritmo.

De fato, tanto $\sin(x)$ quanto $\cos(x)$ são funções **limitadas**, ou seja,

$$-1 \leq \sin(x) \leq 1 \quad \text{e} \quad -1 \leq \cos(x) \leq 1.$$

Além disso, essas funções são **periódicas** e oscilam indefinidamente.

Por isso,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin(x) \text{ não existe} \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \cos(x) \text{ não existe.}$$

Da mesma forma,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sin(x) \text{ não existe} \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \cos(x) \text{ não existe.}$$

Ou seja, essas funções não possuem limite no infinito, pois continuam oscilando entre -1 e 1 .

Lema 2.3. *Para todo $a \in \mathbb{R}$,*

$$\lim_{x \rightarrow a} \sin(x) = \sin(a) \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow a} \cos(x) = \cos(a).$$

2.10 Limite da função composta

Você se lembra que falamos de função composta? Agora vamos estudar o limite de função composta. Começamos com um exemplo. Considere a função

$$h(x) = \sin(x^2).$$

Observe que essa função pode ser vista como a composição de duas funções:

$$f(x) = x^2 \quad \text{e} \quad g(x) = \sin(x).$$

De fato, compondo, temos

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \text{sen}(x^2) = h(x).$$

Agora vamos calcular

$$\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \text{sen}(x^2).$$

Sabemos que

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0.$$

Além disso, sabemos que o limite da função seno em um ponto qualquer $a \in \mathbb{R}$ é $\text{sen}(a)$. Então

$$\lim_{u \rightarrow 0} \text{sen}(u) = \text{sen}(0) = 0.$$

Lema 2.4. Se $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L_1$ e $\lim_{u \rightarrow L_1} g(u) = L_2$, então

$$\lim_{x \rightarrow a} (g \circ f)(x) = L_2.$$

Exemplo

Vamos ver mais um exemplo para fixar a ideia. Considere

$$f(x) = \frac{1}{x} \quad \text{e} \quad g(x) = \cos(x).$$

Queremos calcular

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \cos\left(\frac{1}{x}\right).$$

Observe que se trata de uma função composta:

$$(g \circ f)(x) = \cos\left(\frac{1}{x}\right).$$

Sabemos que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

Ou seja, $L_1 = 0$. Além disso

$$\lim_{u \rightarrow 0} \cos(u) = 1.$$

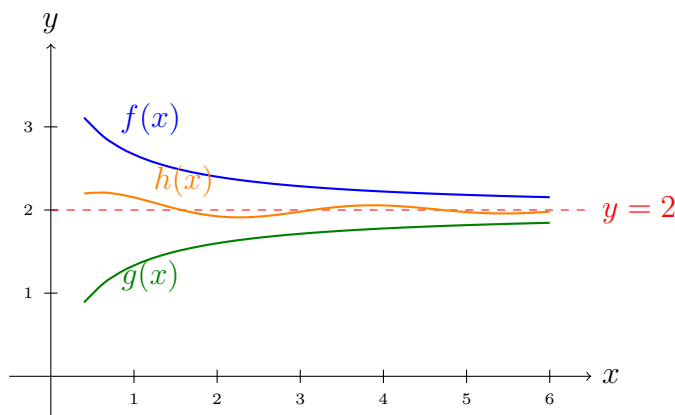
Logo, $L_2 = 1$.

Conclusão

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \cos\left(\frac{1}{x}\right) = 1.$$

2.11 Teorema do confronto

Observe a figura abaixo.



Tem três coisas importantes que eu quero que você observe nessa figura. Primeiro, o gráfico de h está sempre entre o gráfico de f e o gráfico de g . Ou seja,

$$g(x) \leq h(x) \leq f(x).$$

Segundo, o limite de $f(x)$, quando x tende a $+\infty$, é igual a 2:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2.$$

Terceiro, o limite de $g(x)$, quando x tende a $+\infty$, também é igual a 2:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 2.$$

Então o Teorema do Confronto diz exatamente o seguinte: nessa situação, $h(x)$ não tem para onde correr. Se ela está sempre presa entre duas funções que tendem a 2, então o limite dela também vai ter que ser 2. Ou seja,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = 2.$$

Lema 2.5. *Sejam f , g e h funções tais que*

$$f(x) \leq h(x) \leq g(x),$$

para todo x em um certo intervalo aberto contendo a , exceto possivelmente em $x = a$.

Se

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) = L,$$

então

$$\lim_{x \rightarrow a} h(x) = L.$$

Observação 2.3. *No lema, você pode trocar $x \rightarrow a$ por $x \rightarrow a^-$, $x \rightarrow a^+$, $x \rightarrow +\infty$ ou $x \rightarrow -\infty$, e também pode substituir L por $+\infty$ ou $-\infty$, que o resultado continua válido.*

Ou seja, o Teorema do Confronto funciona tanto para limites laterais quanto para limites no infinito.

Observação 2.4. *Antes de passar aos exercícios, vamos registrar um truque muito útil, bastante utilizado em problemas envolvendo o Teorema do Confronto.*

Seja h uma função. Se conseguirmos provar que

$$\lim_{x \rightarrow a} |h(x)| = 0,$$

então podemos concluir que

$$\lim_{x \rightarrow a} h(x) = 0.$$

De fato, como

$$-|h(x)| \leq h(x) \leq |h(x)|,$$

e

$$\lim_{x \rightarrow a} -|h(x)| = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow a} |h(x)| = 0,$$

segue, pelo Teorema do Confronto, que

$$\lim_{x \rightarrow a} h(x) = 0.$$

Atenção! Esse truque só vale para o limite de h indo para zero.

Agora vamos aos exercícios:

Exercício 13

Calcular o limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right).$$

Observe que a função $\cos\left(\frac{1}{x}\right)$ não possui limite quando $x \rightarrow 0$, pois $\frac{1}{x} \rightarrow \infty$ e o cosseno não admite limite no infinito. Então não dá pra fazer esse limite diretamente.

Por outro lado, temos que

$$x^2 \rightarrow 0 \quad \text{quando } x \rightarrow 0.$$

Definimos

$$h(x) = x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right), \quad f(x) = 0, \quad g(x) = |x^2|.$$

Vamos usar o Teorema do confronto + observação. Vamos provar que $\lim_{x \rightarrow 0} |h(x)| = 0$ usando o teorema do confronto e pela observação teremos $\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = 0$.

Como $|\cos(1/x)| \leq 1$, segue que

$$|h(x)| = \left| x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) \right| \leq |x^2| = g(x).$$

Além disso,

$$0 = f(x) \leq |h(x)| \leq g(x).$$

Sabemos que

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0.$$

Pelo Teorema do confronto + observação, concluímos que

$$\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = 0,$$

ou seja,

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) = 0.$$

Exercício 14

Calcular o limite

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\operatorname{sen} x}{x} \right).$$

Exercício 15

Calcule o limite

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + \cos x).$$

2.12 Limite fundamental

Esse é o resultado clássico conhecido como limite fundamental:

Lema 2.6.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1.$$

Exercício 16

Calcule o limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}(2x)}{x}.$$

Exercício 17

Prove que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0.$$

Mas também, no contexto do número e considera-se fundamental:

Lema 2.7. *a)*

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x = e.$$

b)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x = e.$$

c)

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e.$$

Exercício 18

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{10}{x}\right)^x.$$

Exercício 19

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+7}{x+2}\right)^{x+4}.$$

2.13 Continuidade

Vamos falar agora de uma outra característica muito importante das funções: a **continuidade**.

Começamos com um exemplo. Considere a função

$$f(x) = |x|.$$

Queremos duas coisas. Primeiro calcular

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$$

e verificar se esse limite existe e segundo, qual é o seu valor. Ele vai ser importante aqui. Para isso, analisamos os limites laterais.

Limite pela direita ($x \rightarrow 0^+$)

Se $x > 0$, então $|x| = x$. Logo,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} |x| = \lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0.$$

Limite pela esquerda ($x \rightarrow 0^-$)

Se $x < 0$, então $|x| = -x$. Logo,

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} |x| = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-x) = 0.$$

Conclusão

Como os limites laterais existem e são iguais, temos

$$\lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0.$$

Além disso,

$$f(0) = |0| = 0.$$

Ou seja, o valor do limite coincide com o valor da função no ponto. Traduzindo $L = f(0)$. Quando isso acontece, dizemos que a função f é **contínua** no ponto $x = 0$. Aqui é importante que o ponto em questão (no exemplo $a = 0$) esteja no domínio da função!

Outro exemplo. Considere a função

$$g(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x - 1}, & \text{se } x \neq 1, \\ 2, & \text{se } x = 1. \end{cases}$$

Vamos estudar a continuidade de g no ponto $x = 1$.

Passo 1: O ponto pertence ao domínio?

Sim, pois $g(1) = 2$ está definido.

Passo 2: O limite existe?

Para $x \neq 1$, temos

$$g(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1} = x + 1.$$

Logo,

$$\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (x + 1) = 2.$$

Passo 3: O limite coincide com o valor da função no ponto a ?

Temos $g(1) = 2$ e $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = 2$. Portanto $L = g(1)$

Conclusão: Como as três condições são satisfeitas, concluímos que a função g é **contínua em** $x = 1$.

Definição 2.8. Dizemos que uma função f é **contínua** no ponto a se as seguintes condições são satisfeitas:

- a) f está definida no ponto a , isto é, $a \in \text{Dom}(f)$;
- b) $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ existe;
- c) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

Exemplos onde a função não é contínua

Considere a função

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}.$$

Vamos investigar a continuidade em $x = 1$. Observe que o ponto $x = 1$ não pertence ao domínio de f , pois o denominador se anula. Se eu te perguntar se a função é contínua em $x = 1$, a resposta é **não**. Isso acontece porque a primeira condição da definição de continuidade não é satisfeita, ou seja, a função não está definida no ponto $x = 1$. Portanto, **f não é contínua em $x = 1$.**

Agora veja outro exemplo:

$$g(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x > 0, \\ 0, & \text{se } x < 0, \\ 2, & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Vamos investigar a continuidade em $x = 0$. Neste caso, a função está definida em $x = 0$, então a condição (a) está satisfeita. No entanto, quando x tende a 0 pela direita, temos $g(x) = 1$, e quando x tende a 0 pela esquerda, temos $g(x) = 0$. Como os limites laterais são diferentes, o limite de $g(x)$ quando x tende a 0 **não existe**. Portanto, a condição (b) falha, e assim **g não é contínua em $x = 0$.**

Agora veja um exemplo em que as condições (a) e (b) são satisfeitas, mas a condição (c) falha:

$$h(x) = \begin{cases} x + 1, & \text{se } x \neq 0, \\ 5, & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

A função está definida em $x = 0$, então a condição (a) está satisfeita. Além disso,

$$\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (x + 1) = 1,$$

logo a condição (b) também está satisfeita. Porém,

$$h(0) = 5.$$

Assim,

$$\lim_{x \rightarrow 0} h(x) \neq h(0).$$

Portanto, a condição (c) falha, e concluímos que h **não é contínua em** $x = 0$.

Definição 2.9. *Se f é contínua em todos os pontos do seu domínio, então dizemos simplesmente que f é uma função contínua.*

Lema 2.8. *As seguintes funções são contínuas em seus respectivos domínios:*

a) *A função constante é contínua em todo $\mathbb{R}$.*

b) *As funções*

$$f(x) = \operatorname{sen} x \quad \text{e} \quad g(x) = \cos x$$

são contínuas em todo $\mathbb{R}$.

c) *As funções polinomiais são contínuas em todo $\mathbb{R}$.*

d) *A função módulo*

$$f(x) = |x|$$

é contínua em todo $\mathbb{R}$.

e) *A função raiz*

$$f(x) = \sqrt{x}$$

é contínua em $[0, +\infty)$.

f) *A função exponencial é contínua em todo $\mathbb{R}$.*

g) *A função logaritmo natural*

$$f(x) = \ln x$$

é contínua em $(0, +\infty)$.

h) *As funções racionais*

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

são contínuas em todos os pontos em que $Q(x) \neq 0$, isto é, em todos os pontos do seu domínio.

Exercício 20

Verifique se a função a seguir tem algum ponto de descontinuidade e dê o seu domínio:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{|x|}, & \text{se } x \neq 0, \\ -1, & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Exercício 21

Calcule, se houver, um valor de p tal que a função abaixo seja contínua em todos os pontos de $\mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} x + 2p, & \text{se } x \leq -1, \\ p^2, & \text{se } x > -1. \end{cases}$$

Propriedades das funções contínuas

Sejam f e g funções contínuas em $x = a$. Então, também são contínuas em $x = a$ as seguintes funções:

- a) $f + g$;
- b) $f - g$;
- c) $f \cdot g$;
- d) $\frac{f}{g}$, desde que $g(a) \neq 0$.

Exemplo 2.13.1. a) *A função*

$$g(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$$

é contínua em todos os pontos a do conjunto $\{x \in \mathbb{R}; \cos x \neq 0\}$.

b) A função

$$f(x) = x|x|$$

é contínua em $\mathbb{R}$.

c) A função

$$h(x) = \frac{x^2 + 1}{x - 3}$$

é contínua em todos os pontos

$$a \in \mathbb{R} \setminus \{3\}.$$

Lema 2.9. Se f é contínua em $x = a$ e g é contínua em $y = f(a)$, então $g \circ f$ é contínua em a .

Exemplo 2.13.2. Considere a função

$$h(x) = e^{x^2}.$$

Podemos escrever h como composição de duas funções:

$$f(x) = x^2 \quad e \quad g(y) = e^y.$$

Assim,

$$h(x) = g(f(x)).$$

Sabemos que $f(x) = x^2$ é contínua em todo $x \in \mathbb{R}$.

Também sabemos que a função exponencial

$$g(y) = e^y$$

é contínua para todo $y \in \mathbb{R}$.

Logo, pelo lema da composição de funções contínuas, a função

$$h(x) = e^{x^2}$$

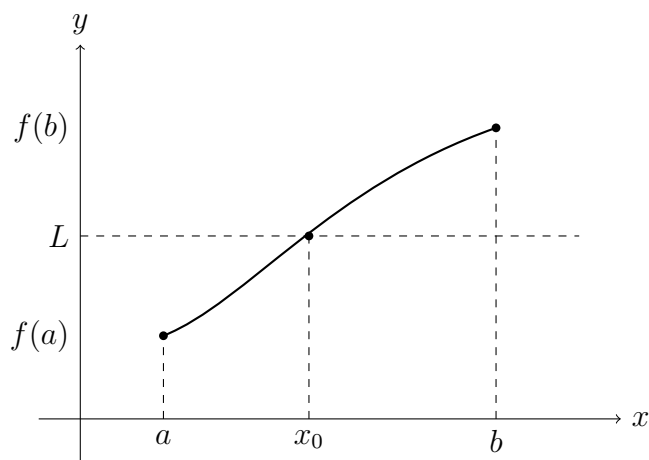
é contínua em todo $\mathbb{R}$.

Teorema 2.1 (Teorema do Valor Intermediário). Se f é contínua no intervalo fechado $[a, b]$ e L é um número tal que

$$f(a) \leq L \leq f(b) \quad \text{ou} \quad f(b) \leq L \leq f(a),$$

então existe pelo menos um $x_0 \in [a, b]$ tal que

$$f(x_0) = L.$$



Exemplo 2.13.3. *Vamos mostrar agora que o polinômio*

$$P(x) = 4x^3 - 6x^2 + 3x - 2$$

possui uma raiz entre 1 e 2, usando o Teorema do Valor Intermediário.

Solução:

Veja que

$$P(1) = 4 - 6 + 3 - 2 = -1,$$

que é negativo.

Além disso,

$$P(2) = 32 - 24 + 6 - 2 = 12,$$

que é positivo.

Como $P(x)$ é um polinômio, ele é contínuo no intervalo fechado $[1, 2]$.

Tomando $L = 0$, temos

$$P(1) < 0 < P(2).$$

Logo,

$$P(1) < L < P(2).$$

Pelo Teorema do Valor Intermediário, existe pelo menos um valor $x_0 \in [1, 2]$ tal que

$$P(x_0) = 0.$$

Ou seja, existe pelo menos uma raiz de $P(x)$ entre 1 e 2.

Exercício 22

Prove que o polinômio

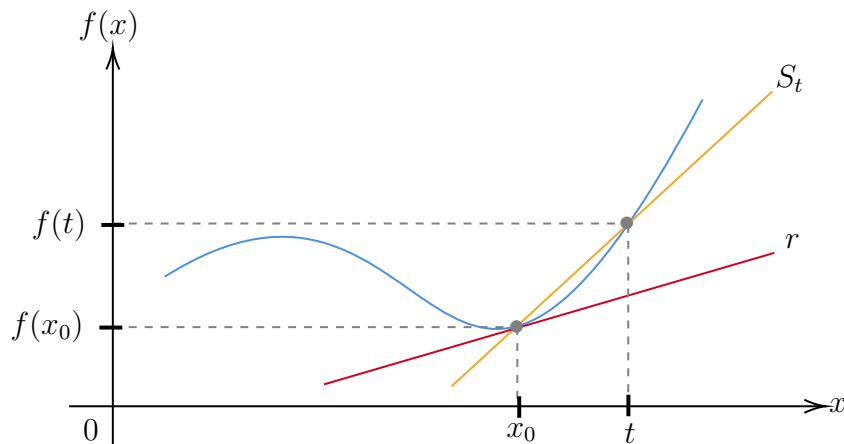
$$P(x) = x^3 - 3x^2 + 4x - 8$$

tem uma raiz em $[0, 1]$.

3 Derivadas

3.1 Reta tangente ao gráfico de f

Seja f uma função e x_0 um ponto do seu domínio. O gráfico de f é a linha azul na figura abaixo. Considere o ponto $(x_0, f(x_0))$ do gráfico de f . Agora sera r uma reta que passa por este ponto e tem uma certa inclinação especial, digamos a . Depois eu explico melhor quem é esse tal de a . Essa reta r se chama reta tangente ao gráfico de f . Problema: Encontrar a equação de r .



* A reta r passa por $(x_0, f(x_0))$. Se definirmos a inclinação da reta r , teremos sua equação.

Para isso vamos precisar de uma reta auxiliar. Seja $(t, f(t)) \neq (x_0, f(x_0))$, e seja S_t a reta que passa pelos pontos $(x_0, f(x_0))$ e $(t, f(t))$. S_t tem inclinação, digamos a_{S_t} . Observe que, se fizermos $t \rightarrow x_0$, então $S_t \rightarrow r$ e assim $a_{S_t} \rightarrow a$. Uma definição natural para a seria $\lim_{t \rightarrow x_0} a_{S_t}$. Vamos então calcular a_{S_t} e depois fazer o limite. Parece razoável pra você? Então mãos à obra:

S_t é uma reta então começamos com sua equação geral:

$$y = a_{S_t}x + b$$

S_t passa por $(x_0, f(x_0))$. Isso significa que quando $x = x_0$, $y = f(x_0)$:

$$f(x_0) = a_{S_t}x_0 + b \quad (1)$$

S_t passa por $(t, f(t))$:

$$f(t) = a_{S_t}t + b \quad (2)$$

Fazendo (2) - (1), temos:

$$\begin{aligned} f(t) - f(x_0) &= a_{S_t}(t - x_0) \\ \Rightarrow a_{S_t} &= \frac{f(t) - f(x_0)}{t - x_0} \end{aligned} \quad (3.3)$$

Podem acontecer três situações:

3.1.1 Situação 1- O limite existe e é finito

Digamos que o limite (3.3) exista:

$$\lim_{t \rightarrow x_0} \frac{f(t) - f(x_0)}{t - x_0} = a \in \mathbb{R}$$

Definição 3.1 (Definição - Reta tangente ao gráfico f em x_0). *Nesse caso, definimos a reta tangente ao gráfico de f no ponto x_0 como sendo a reta que passa pelo ponto $(x_0, f(x_0))$ e que tem inclinação $a = \lim_{t \rightarrow x_0} a_t$. Nesse caso a equação da reta é*

$$y - y_0 = a(x - x_0), \quad y_0 = f(x_0).$$

Exemplo 3.1.1. *Seja $f(x) = x^2$ e $x_0 = 1$.*

Vamos calcular a inclinação da reta tangente ao gráfico de f no ponto $x_0 = 1$:

$$\lim_{t \rightarrow 1} \frac{f(t) - f(1)}{t - 1} = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{t^2 - 1^2}{t - 1} = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{(t - 1)(t + 1)}{t - 1} = \lim_{t \rightarrow 1} (t + 1) = 2.$$

Portanto, a inclinação da reta tangente é $a = 2$.

Logo, a reta tangente ao gráfico de $f(x) = x^2$ no ponto $(1, f(1)) = (1, 1)$ é dada por:

$$y - 1 = 2(x - 1), \quad \text{ou seja,} \quad y = 2x - 1.$$

3.1.2 Situação 2- O limite é infinito

Agora suponha que aquele limite (3.3) exploda:

$$\lim_{t \rightarrow x_0} a_t = \pm\infty$$

Definição 3.2. Nesse caso, definimos a reta tangente ao gráfico de f no ponto x_0 como sendo a reta **vertical**:

$$x = x_0.$$

Exemplo 3.1.2. Seja $f(x) = \sqrt[3]{x}$ e $x_0 = 0$.

Temos:

$$\frac{f(t) - f(0)}{t - 0} = \frac{\sqrt[3]{t} - 0}{t} = \frac{\sqrt[3]{t}}{t}.$$

Esse limite, quando $t \rightarrow 0$, tende ao infinito (positiva ou negativamente, dependendo do lado), pois:

$$\frac{\sqrt[3]{t}}{t} = t^{-2/3} \rightarrow \infty \text{ quando } t \rightarrow 0.$$

Portanto, a reta tangente ao gráfico de $f(x) = \sqrt[3]{x}$ no ponto $(0, 0)$ é a reta **vertical**:

$$x = 0.$$

3.1.3 Situação 3- O limite não existe

Finalmente suponha que os limites laterais sejam diferentes:

$$\lim_{t \rightarrow x_0} a_t \text{ não existe.}$$

Nesse caso, diremos que não existe a reta tangente ao gráfico f em x_0 .

Exemplo 3.1.3. Considere a função valor absoluto $f(x) = |x|$ e o ponto $x_0 = 0$.

Vamos analisar o limite:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t) - f(0)}{t - 0} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{|t|}{t}.$$

Esse limite não existe, pois os limites laterais são diferentes:

$$\lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{|t|}{t} = \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{-t}{t} = -1, \quad \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{|t|}{t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{t}{t} = 1.$$

Como os limites laterais são distintos, o limite não existe. Portanto, **não existe reta tangente ao gráfico de $f(x) = |x|$ no ponto $(0, 0)$.**

3.2 A função derivada

A derivada de uma função em um ponto nos dá a inclinação da reta tangente ao gráfico naquele ponto. Se a função for derivável em todos os pontos de um intervalo, podemos associar a cada número real x o valor da derivada em x . Isso define uma nova função, chamada de **função derivada**, que descreve como a taxa de variação de f muda ao longo do domínio.

3.2.1 Derivada de f num ponto x_0

Definição 3.3. Sejam I um intervalo, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ uma função e $x_0 \in I$. Diremos que f é **derivável** em x_0 se:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = L \in \mathbb{R}$$

Ou seja, aquele limite (3.3) existe e é finito.

Neste caso, denotamos o limite L por $f'(x_0)$, e dizemos que $f'(x_0)$ é a **derivada** de f em x_0 .

Observação 3.2.1. • Outra notação possível para a derivada em x_0 é:

$$\left. \frac{df}{dx} \right|_{x=x_0}$$

- Podemos reescrever o limite da definição fazendo a mudança $x = x_0 + h$. Assim, quando $x \rightarrow x_0$, temos $h \rightarrow 0$, e o limite se transforma em:

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Essa forma é muito usada em cálculos práticos de derivadas.

Exemplo 3.2.1. Seja $f(x) = \sqrt{x}$. Vamos calcular a derivada de f no ponto $x_0 = 4$ usando a definição:

$$f'(4) = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x) - f(4)}{x - 4} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4}.$$

Essa expressão não pode ser avaliada diretamente, pois temos uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$. Multiplicamos o numerador e o denominador pelo conjugado do numerador:

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4} \cdot \frac{\sqrt{x} + 2}{\sqrt{x} + 2} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x - 4}{(x - 4)(\sqrt{x} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{1}{\sqrt{x} + 2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{4} + 2} = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Portanto, a derivada de $f(x) = \sqrt{x}$ no ponto $x = 4$ é:

$$f'(4) = \frac{1}{4}.$$

Exemplo 3.2.2. Seja $f(x) = x^2$. Vamos calcular a derivada de f no ponto $x_0 = 3$ usando a definição com $h \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned} f'(3) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(3+h)^2 - 3^2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{9 + 6h + h^2 - 9}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{6h + h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (6 + h) = 6. \end{aligned}$$

Portanto, a derivada de $f(x) = x^2$ no ponto $x = 3$ é:

$$f'(3) = 6.$$

3.2.2 Derivada lateral de f

Se o domínio da função é um intervalo fechado $I = [a, b]$, então só é possível falar da derivada nos extremos usando limites laterais:

$$f'_+(a) = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad (\text{limite pela direita})$$

$$f'_-(b) = \lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f(x) - f(b)}{x - b} \quad (\text{limite pela esquerda})$$

Se esses limites existirem (e forem finitos), dizemos que f é derivável em a e/ou b , com derivada dada pelo respectivo limite lateral.

Exemplo 3.2.3. Considere a função $f(x) = \sqrt{x}$, definida no intervalo fechado $I = [0, 4]$.

No ponto $x = 0$:

$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{0}}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty.$$

Logo, a derivada lateral não existe em $x = 0$, pois o limite é infinito.

No ponto $x = 4$:

$$f'_-(4) = \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{4}}{x - 4} = \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4}.$$

Multiplicando pelo conjugado:

$$= \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{1}{\sqrt{x} + 2} = \frac{1}{4}.$$

Portanto, a derivada lateral existe em $x = 4$, e $f'_-(4) = \frac{1}{4}$.

3.2.3 Função derivada

Definição 3.4 (Função derivada). Seja $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ uma função definida em um intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$.

Dizemos que f é **derivável em** I se for derivável em todo ponto $x \in I$. Nesse caso, podemos definir uma nova função, chamada de **função derivada** de f , denotada por f' , dada por:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}, \quad \text{para todo } x \in I.$$

A função derivada associa a cada ponto $x \in I$ o valor da inclinação da reta tangente ao gráfico de f naquele ponto.

Agora vamos considerar algumas funções elementares e vamos calcular a função derivada de cada uma delas.

Derivada da identidade:

Seja $f(x) = x$, com $x_0 \in \mathbb{R}$. Vamos aplicar a definição:

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x - x_0}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} 1 = 1.$$

Logo, f é derivável em todo ponto $x_0 \in \mathbb{R}$, e sua derivada é:

$$f'(x_0) = 1 \quad \text{ou} \quad \left. \frac{df}{dx} \right|_{x=x_0} = 1.$$

Portanto, a **função derivada** da identidade é a função constante:

$$f'(x) = 1, \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}.$$

Ou seja, a taxa de variação da função identidade é sempre 1 - a inclinação da reta $y = x$ é constante em todos os pontos.

Derivada da função constante:

Seja $f(x) = C$, com $C \in \mathbb{R}$ constante. Então:

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{C - C}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{0}{x - x_0} = 0,$$

Ou seja, $\left. \frac{df}{dx} \right|_{x=x_0} = 0$.

Portanto, a **função derivada** de uma função constante é a função nula:

$$f'(x) = 0, \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}.$$

Isso reflete o fato de que uma função constante não varia: sua taxa de variação em qualquer ponto é zero.

Derivada da função quadrática:

Seja $f(x) = x^2$, com $x_0 \in \mathbb{R}$. Vamos aplicar a definição:

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0}.$$

Aplicamos a fatoração da diferença de quadrados:

$$= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(x - x_0)(x + x_0)}{x - x_0}.$$

Cancelamos $x - x_0$ (com $x \neq x_0$):

$$= \lim_{x \rightarrow x_0} (x + x_0) = 2x_0.$$

Portanto, f é derivável em todo $x_0 \in \mathbb{R}$, e a sua derivada é:

$$f'(x_0) = 2x_0.$$

Logo, a **função derivada** de $f(x) = x^2$ é:

$$f'(x) = 2x.$$

Em geral, se

$$f(x) = x^\alpha,$$

com $\alpha \in \mathbb{R}$, então:

$$f'(x) = \alpha x^{\alpha-1},$$

sempre que a função estiver definida.

Como caso particular, tomando $\alpha = n$, com $n \in \mathbb{N}$, obtemos:

$$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}.$$

Outro caso importante ocorre quando $\alpha = \frac{1}{n}$. Nesse caso,

$$f(x) = x^{1/n},$$

e portanto

$$f'(x) = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1}.$$

Em particular, para a raiz quadrada,

$$f(x) = \sqrt{x} = x^{1/2},$$

temos

$$f'(x) = \frac{1}{2} x^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Derivada da função $\ln(x)$:

Essa eu não vou provar porque é um pouco mais complicada. Vou apenas te dar o resultado:

$$\ln'(x) = \frac{1}{x}, \quad x > 0.$$

Ou seja, se

$$f(x) = \ln(x),$$

então

$$f'(x) = \frac{1}{x} \quad x > 0.$$

Derivada da função e^x

Essa também eu não vou provar porque a demonstração exige alguns limites auxiliares. Então, vou te dar de presente apenas o resultado:

$$\frac{d}{dx}e^x = e^x.$$

Ou seja, se

$$f(x) = e^x,$$

então

$$f'(x) = e^x.$$

f' está definida para todo $x \in \mathbb{R}$.

3.2.4 Equação da reta tangente

O próximo resultado relaciona a derivada de f com a existência da reta tangente ao gráfico da função naquele ponto.

Proposição 3.1. *Se f é derivável em $x_0 \in I$, então existe a reta tangente ao gráfico de f no ponto x_0 , e sua equação é dada por:*

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Essa é a equação da reta que passa pelo ponto $(x_0, f(x_0))$ e tem inclinação igual à derivada $f'(x_0)$.

Agora que já calculamos a derivada das funções constante, identidade e quadrática, vamos determinar a equação da **reta tangente** ao gráfico de cada uma dessas funções em um ponto x_0 .

A equação da reta tangente a f no ponto x_0 é dada por:

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0),$$

onde $f'(x_0)$ é a derivada da função no ponto x_0 , e $(x_0, f(x_0))$ é o ponto de tangência.

1. Função identidade: $f(x) = x$

Já vimos que $f'(x_0) = 1$. Logo, a reta tangente em x_0 é:

$$y = f(x_0) + 1 \cdot (x - x_0) = x_0 + (x - x_0) = x.$$

A reta tangente é a própria função $y = x$, o que faz sentido, pois o gráfico da função identidade é uma reta com inclinação 1.

2. Função constante: $f(x) = C$

Já sabemos que $f'(x_0) = 0$, para qualquer $x_0 \in \mathbb{R}$. Portanto, a reta tangente é:

$$y = f(x_0) + 0 \cdot (x - x_0) = C.$$

Ou seja, a reta tangente é a própria reta horizontal $y = C$, coincidente com o gráfico da função.

3. Função quadrática: $f(x) = x^2$

Já vimos que $f'(x_0) = 2x_0$. Então a reta tangente é:

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) = x_0^2 + 2x_0(x - x_0).$$

Podemos desenvolver essa expressão:

$$y = x_0^2 + 2x_0x - 2x_0^2 = -x_0^2 + 2x_0x,$$

ou, mais naturalmente:

$$y = 2x_0x - x_0^2.$$

Essa é a equação da reta tangente ao gráfico de $f(x) = x^2$ no ponto $x = x_0$.

Em particular, para $x_0 = 2$, temos:

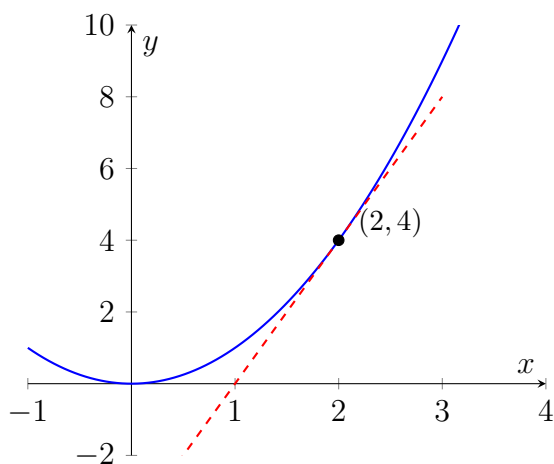
$$f(2) = 2^2 = 4, \quad f'(2) = 2 \cdot 2 = 4.$$

Substituindo na fórmula da reta tangente:

$$y = f(2) + f'(2)(x - 2) = 4 + 4(x - 2).$$

$$y = 4 + 4x - 8 = 4x - 4.$$

Segue o gráfico de $f(x) = x^2$ e da sua reta tangente.



3.2.5 A derivada do $\text{sen}(x)$ e $\cos(x)$

Para fazer as contas necessárias nesta seção, vamos precisar dos seguintes ingredientes:

a)

$$\text{sen}(a + b) = \text{sen}a \cos b + \text{sen}b \cos a.$$

b)

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \text{sen}a \text{sen}b.$$

c)

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos h - 1}{h} = 0.$$

d)

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Os dois primeiros ingredientes eu imagino que você já aprendeu lá na escola. O terceiro ingrediente é um exercício que fizemos no capítulo anterior, usando o limite fundamental. E o último ingrediente é simplesmente a definição de derivada no ponto x_0 . Então, não é nada demais: tudo o que está aí nós já vimos. Pronto, agora já temos os ingredientes necessários para calcular a derivada do seno.

Seja

$$f(x) = \operatorname{sen} x$$

e considere x_0 um ponto qualquer de $\mathbb{R}$.

O objetivo aqui é calcular $f'(x_0)$.

Ora,

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Substituindo f por seno, obtemos

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}(x_0 + h) - \operatorname{sen}(x_0)}{h}.$$

Agora vamos usar o primeiro ingrediente:

$$\operatorname{sen}(a + b) = \operatorname{sen} a \cos b + \operatorname{sen} b \cos a.$$

Assim,

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x_0 \cos h + \operatorname{sen} h \cos x_0 - \operatorname{sen} x_0}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x_0 (\cos h - 1) + \operatorname{sen} h \cos x_0}{h}. \end{aligned}$$

Colocando na forma mais conveniente,

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \left[\operatorname{sen} x_0 \frac{\cos h - 1}{h} + \frac{\operatorname{sen} h}{h} \cos x_0 \right].$$

Agora usamos os ingredientes restantes:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos h - 1}{h} = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} h}{h} = 1.$$

Logo,

$$f'(x_0) = \operatorname{sen} x_0 \cdot 0 + 1 \cdot \cos x_0 = \cos x_0.$$

Portanto,

$$\operatorname{sen}'(x_0) = \cos x_0.$$

Como isso vale para qualquer $x_0 \in \mathbb{R}$, concluímos que

$$\boxed{\operatorname{sen}' x = \cos x.}$$

A reta tangente ao gráfico de $\operatorname{sen} x$ no ponto x_0 é dada por

$$y = \operatorname{sen}(x_0) + \cos(x_0)(x - x_0).$$

É possível provar, fazendo contas análogas, que a função cosseno também é derivável em qualquer ponto x_0 e que

$$\boxed{\cos'(x_0) = -\operatorname{sen}(x_0).}$$

A reta tangente ao gráfico do cosseno no ponto x_0 é dada por

$$y = \cos(x_0) - \operatorname{sen}(x_0)(x - x_0).$$

3.2.6 Propriedades da derivada

Proposição 3.2. *Seja I um intervalo real aberto e seja*

$$f : I \rightarrow \mathbb{R}$$

uma função.

Seja $x_0 \in I$. Se f é derivável em x_0 , então f é contínua em x_0 .

A recíproca da proposição anterior é falsa, isto é, uma função pode ser contínua em um ponto sem ser derivável nesse ponto.

Considere a função

$$f(x) = |x|.$$

Sabemos que f é contínua em todo $\mathbb{R}$. Vamos mostrar que f não é derivável em $x = 0$.

Pela definição de derivada,

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h}.$$

Como $f(0) = 0$, temos

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|h|}{h}.$$

Agora analisamos os limites laterais.

Se $h \rightarrow 0^+$, então $|h| = h$, e portanto

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{|h|}{h} = 1.$$

Se $h \rightarrow 0^-$, então $|h| = -h$, e portanto

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{|h|}{h} = -1.$$

Como os limites laterais são diferentes, o limite

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{|h|}{h}$$

não existe.

Logo, f não é derivável em $x = 0$.

Proposição 3.3. *Seja I um intervalo e sejam*

$$f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$$

duas funções deriváveis em um certo ponto $x_0 \in I$.

Então $f + g$ é derivável em x_0 e

$$(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0).$$

Exemplo 3.2.4. *Considere a função*

$$f(x) = \operatorname{sen} x + \cos x.$$

Vamos encontrar $f'(\pi)$. Usando a propriedade da soma, temos

$$f'(x) = (\operatorname{sen} x)' + (\cos x)'.$$

Como

$$(\operatorname{sen} x)' = \cos x \quad \text{e} \quad (\cos x)' = -\operatorname{sen} x,$$

segue que

$$f'(x) = \cos x - \operatorname{sen} x.$$

Portanto $f'(\pi) = -1$.

Proposição 3.4. *Seja I um intervalo e sejam*

$$f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$$

funções deriváveis em $x_0 \in I$.

Então o produto fg é derivável em x_0 e

$$(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0).$$

Exemplo 3.2.5. *Calcule*

$$(x^2 \operatorname{sen} x)' \left(\frac{\pi}{2} \right).$$

Usando a regra do produto, temos

$$(x^2 \operatorname{sen} x)' = (x^2)' \operatorname{sen} x + x^2 (\operatorname{sen} x)'.$$

Logo,

$$(x^2 \operatorname{sen} x)' = 2x \operatorname{sen} x + x^2 \cos x.$$

Agora avaliando em $x = \frac{\pi}{2}$:

$$\begin{aligned} (x^2 \operatorname{sen} x)' \left(\frac{\pi}{2} \right) &= 2 \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{2} \right) + \left(\frac{\pi}{2} \right)^2 \cos \left(\frac{\pi}{2} \right) \\ &= \pi \cdot 1 + \frac{\pi^2}{4} \cdot 0 \\ &= \pi. \end{aligned}$$

Proposição 3.5 (caso particular da proposição anterior). *Seja I um intervalo aberto e seja*

$$g : I \rightarrow \mathbb{R}$$

uma função derivável em um certo ponto $x_0 \in I$. Seja $c \in \mathbb{R}$ uma constante e defina a função

$$f : I \rightarrow \mathbb{R}$$

por

$$f(x) = c g(x).$$

Então f é derivável em x_0 e

$$f'(x_0) = c g'(x_0).$$

Exemplo 3.2.6. *Considere a função*

$$f(x) = 10e^x.$$

Usando a propriedade do múltiplo por constante, temos

$$f'(x) = 10(e^x)'.$$

Como

$$(e^x)' = e^x,$$

segue que

$$f'(x) = 10e^x.$$

Exemplo 3.2.7. *Considere a função*

$$f(x) = 9x^5 - 7x^4 + 3x^3 - 2x + 1.$$

Derivando termo a termo, obtemos

$$f'(x) = 45x^4 - 28x^3 + 9x^2 - 2.$$

Proposição 3.6. *Seja I um intervalo aberto e sejam*

$$f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$$

funções deriváveis em $x_0 \in I$. Suponha que

$$g(x_0) \neq 0.$$

Então a função quociente

$$\frac{f}{g}$$

é derivável em x_0 e

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{(g(x_0))^2}.$$

Exemplo 3.2.8. Considere a função

$$f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x^2}.$$

Vamos calcular

$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right).$$

Usando a regra do quociente, temos

$$f'(x) = \frac{(\operatorname{sen} x)'x^2 - \operatorname{sen} x (x^2)'}{(x^2)^2}.$$

Logo,

$$f'(x) = \frac{x^2 \cos x - 2x \operatorname{sen} x}{x^4}.$$

Agora avaliando em $x = \frac{\pi}{2}$:

$$\begin{aligned} f'\left(\frac{\pi}{2}\right) &= \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - 2\left(\frac{\pi}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\left(\frac{\pi}{2}\right)^4} \\ &= \frac{\frac{\pi^2}{4} \cdot 0 - \pi \cdot 1}{\frac{\pi^4}{16}} \\ &= \frac{-\pi}{\frac{\pi^4}{16}} \\ &= -\frac{16}{\pi^3}. \end{aligned}$$

Exercício 23

Encontre a derivada das seguintes funções:

(a) $f(x) = (2x + 1) \ln(x)$

(b) $f(x) = \frac{3x + 4}{e^x}$

(c) $f(x) = \operatorname{tg}(x)$

(d) $f(x) = \frac{1}{x}$

Exercício 24

Encontre $f'(1)$ para as funções do exercício anterior.

Funções definidas por várias sentenças

Até agora estudamos derivadas de funções dadas por uma única expressão. No entanto, também é comum encontrarmos funções definidas por diferentes fórmulas, dependendo do valor de x . Essas são chamadas de **funções definidas por várias sentenças**.

Quando queremos estudar a derivabilidade de uma função desse tipo, o ponto mais delicado costuma ser exatamente o ponto onde a definição muda. Nesses casos, devemos usar diretamente a definição de derivada e analisar cuidadosamente os limites laterais envolvidos.

Considere a função

$$f(x) = \begin{cases} x^3, & \text{se } x \geq 0, \\ -x^2, & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Vamos investigar se f é derivável em $x = 0$.

Primeiro, observamos que

$$f(0) = 0^3 = 0.$$

Pela definição de derivada,

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}.$$

Como a função possui definições diferentes para $x > 0$ e $x < 0$, calculamos os limites laterais.

Para $x > 0$,

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{x^3}{x} = x^2,$$

logo,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 = 0.$$

Para $x < 0$,

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{-x^2}{x} = -x,$$

e portanto

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-x) = 0.$$

Como os dois limites laterais existem e são iguais, concluímos que

$$f'(0) = 0.$$

Assim, a função é derivável em $x = 0$.

Em geral, para funções definidas por várias sentenças, é importante verificar separadamente o comportamento à direita e à esquerda do ponto onde a fórmula muda.

““latex

Exercício 25

Verifique se a função

$$f(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen}(x), & \text{se } x \geq 0, \\ x^2, & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

é derivável em $x = 0$.

3.2.7 Derivada de função composta

Vamos começar com um exemplo:

Exemplo 3.2.9. *Vamos calcular a derivada da função composta*

$$h(x) = \ln(x^3).$$

Tome

$$f(x) = x^3 \quad \text{e} \quad g(x) = \ln x.$$

Então,

$$h(x) = (g \circ f)(x).$$

A regra da cadeia diz que

$$h'(x) = g'(f(x)) f'(x).$$

Como

$$g'(x) = \frac{1}{x} \quad e \quad f'(x) = 3x^2,$$

temos

$$h'(x) = \frac{1}{x^3} \cdot 3x^2 = \frac{3}{x}.$$

Proposição 3.7 (Regra da Cadeia). *Sejam I e J dois intervalos abertos. Sejam*

$$f : I \rightarrow \mathbb{R} \quad e \quad g : J \rightarrow \mathbb{R}$$

funções, e seja $x_0 \in I$ tal que

$$f(x_0) \in J.$$

Se f é derivável em x_0 e g é derivável em $f(x_0)$, então a composição

$$g \circ f$$

é derivável em x_0 , e

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) f'(x_0).$$

Exercício 26

Derive as seguintes funções:

(a) $\cos(x^2 + 2x + 3)$

(b) $\sqrt{x^2 - x + 1}$

(c) $\sin(\cos x)$

(d) $\cos\left(\frac{1}{x}\right)$

3.3 Usando a derivada para estudar funções

Agora veremos como usar a derivada para conseguir desenhar melhor o gráfico das funções, sem precisar fazer tabelas e ficar marcando pontos.

3.3.1 A primeira derivada x crescimento da função

Primeiro, relembre a definição de função constante, crescente, decrescente:

Definição 3.5. *Seja $I \subseteq \mathbb{R}$ um intervalo e $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ uma função.*

(a) *Dizemos que f é **constante** em I se*

$$f(x_1) = f(x_2)$$

para quaisquer $x_1, x_2 \in I$.

(b) *Dizemos que f é **crescente** em I se, sempre que*

$$x_1 < x_2,$$

temos

$$f(x_1) \leq f(x_2).$$

(c) *Dizemos que f é **decrescente** em I se, sempre que*

$$x_1 < x_2,$$

temos

$$f(x_1) \geq f(x_2).$$

Proposição 3.8. *Seja f uma função contínua em $I = [a, b]$ e derivável em $J = (a, b)$. Então:*

(a) *Se $f'(x) = 0$ para todo $x \in J$, então f é constante em I .*

(b) *Se $f'(x) > 0$ para todo $x \in J$, então f é estritamente crescente em I .*

(c) *Se $f'(x) < 0$ para todo $x \in J$, então f é estritamente decrescente em I .*

(d) Se $f'(x) \geq 0$ para todo $x \in J$, então f é crescente em I .

(e) Se $f'(x) \leq 0$ para todo $x \in J$, então f é decrescente em I .

Exemplo 3.3.1. Vamos estudar o crescimento e decrescimento da função

$$f(x) = x^3 - 3x + 1.$$

Primeiro, calculamos a derivada:

$$f'(x) = 3x^2 - 3$$

As raízes são

$$x = -1 \quad \text{e} \quad x = 1.$$

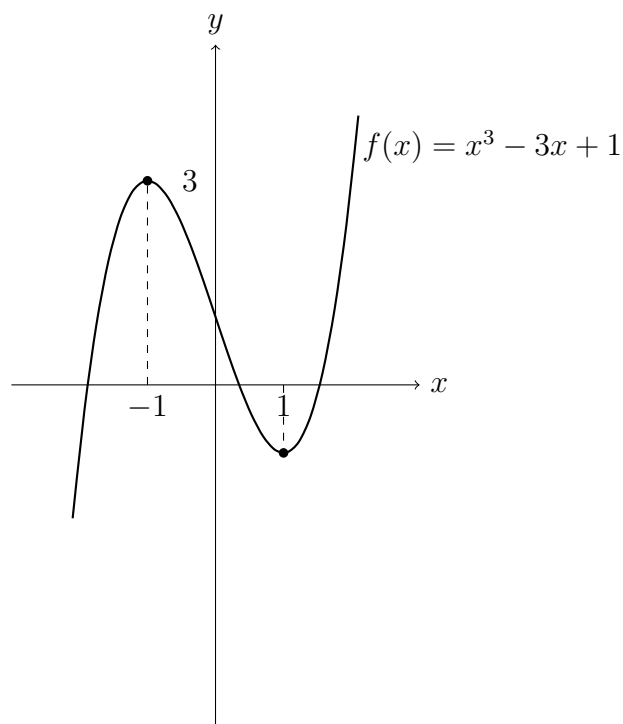
Agora estudamos o sinal de $f'(x)$:

- Se $x < -1$ ou $x > 1$, então $f'(x) > 0$.
- Se $-1 < x < 1$, então $f'(x) < 0$.

Logo, a função é:

- crescente em $(-\infty, -1)$;
- decrescente em $(-1, 1)$;
- crescente em $(1, +\infty)$.

Então o gráfico fica mais ou menos assim:



Exemplo 3.3.2. *Vamos estudar o crescimento e decrescimento da função*

$$f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 5.$$

Primeiro, calculamos a derivada:

$$f'(x) = 12x^3 - 12x^2 - 24x.$$

Colocando $12x$ em evidência, obtemos

$$f'(x) = 12x(x^2 - x - 2) = 12x(x - 2)(x + 1).$$

As raízes são

$$x = -1, \quad x = 0, \quad x = 2.$$

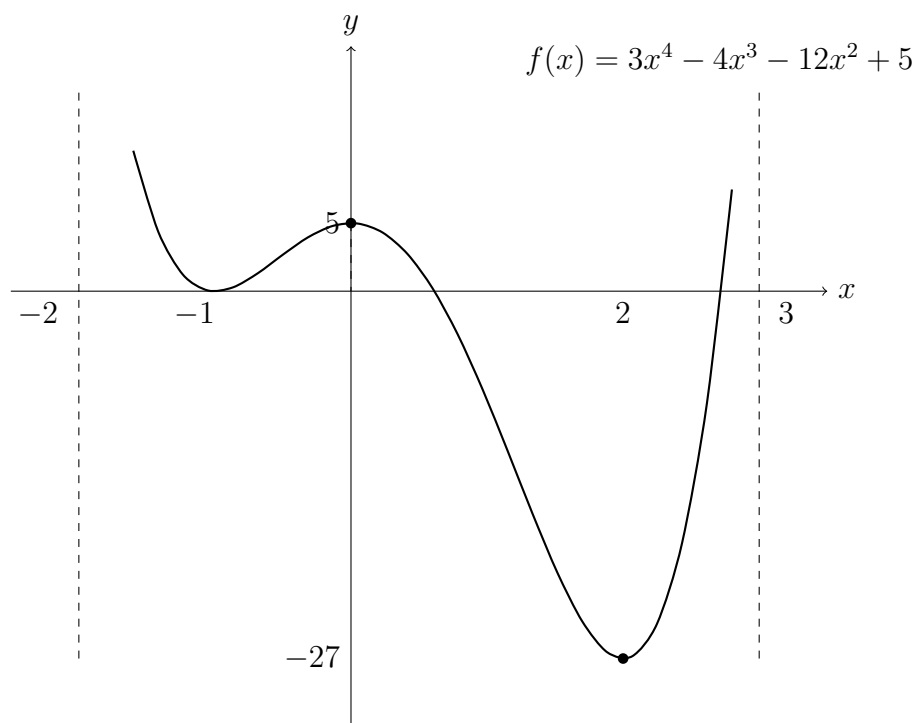
Agora estudamos o sinal de $f'(x)$:

- *Se $x < -1$, então $f'(x) < 0$.*
- *Se $-1 < x < 0$, então $f'(x) > 0$.*

- Se $0 < x < 2$, então $f'(x) < 0$.
- Se $x > 2$, então $f'(x) > 0$.

Logo, a função é:

- decrescente em $(-\infty, -1)$;
- crescente em $(-1, 0)$;
- decrescente em $(0, 2)$;
- crescente em $(2, +\infty)$.



Exercício 27

Dada a função

$$f(x) = \frac{2x^2}{x^2 - 1},$$

encontre:

- (a) o domínio de f ;
- (b) as assíntotas, se houver;
- (c) a derivada de f ;
- (d) os intervalos de crescimento e decrescimento de f ;
- (e) um esboço do gráfico de f .

solução

(a) **Domínio**

O denominador não pode ser nulo. Assim,

$$x^2 - 1 \neq 0.$$

Logo,

$$x^2 \neq 1 \implies x \neq \pm 1.$$

Portanto, o domínio é

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}.$$

(b) **Assíntotas**

• **Assíntotas verticais**

As assíntotas verticais ocorrem quando o denominador se anula:

$$x^2 - 1 = 0 \implies x = \pm 1.$$

Logo, as retas

$$x = -1 \quad \text{e} \quad x = 1$$

são candidatos a assíntotas verticais.

Vamos calcular inicialmente os limites laterais à direita.

Limite à direita de $x = 1$:

Quando $x \rightarrow 1^+$,

$$2x^2 \rightarrow 2 > 0$$

e

$$x^2 - 1 \rightarrow 0^+.$$

Assim,

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x^2}{x^2 - 1} = +\infty.$$

Limite à direita de $x = -1$:

Quando $x \rightarrow (-1)^+$, temos $x^2 < 1$, logo

$$x^2 - 1 \rightarrow 0^-,$$

enquanto

$$2x^2 \rightarrow 2 > 0.$$

Portanto,

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{2x^2}{x^2 - 1} = -\infty.$$

Como pelo menos um dos limites laterais é infinito em cada ponto, já está provado que as retas

$$x = -1 \quad \text{e} \quad x = 1$$

são assíntotas verticais.

Agora calcularemos também os limites laterais à esquerda, pois essas informações serão úteis no esboço do gráfico.

Limite à esquerda de $x = 1$:

Quando $x \rightarrow 1^-$,

$$x^2 - 1 \rightarrow 0^-,$$

e

$$2x^2 \rightarrow 2 > 0.$$

Logo,

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x^2}{x^2 - 1} = -\infty.$$

Limite à esquerda de $x = -1$:

Quando $x \rightarrow (-1)^-$, temos $x^2 > 1$, então

$$x^2 - 1 \rightarrow 0^+,$$

e

$$2x^2 \rightarrow 2 > 0.$$

Assim,

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{2x^2}{x^2 - 1} = +\infty.$$

- **Assíntota horizontal**

Como numerador e denominador possuem o mesmo grau, calculamos o limite do quociente dos coeficientes líderes:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x^2}{x^2 - 1} = 2.$$

Portanto, a assíntota horizontal é

$$y = 2.$$

(c) **Derivada**

Aplicando a regra do quociente:

$$f'(x) = \frac{(2x^2)'(x^2 - 1) - 2x^2(x^2 - 1)'}{(x^2 - 1)^2}.$$

Como

$$(2x^2)' = 4x \quad \text{e} \quad (x^2 - 1)' = 2x,$$

temos

$$f'(x) = \frac{4x(x^2 - 1) - 2x^2(2x)}{(x^2 - 1)^2}.$$

Simplificando:

$$f'(x) = \frac{4x^3 - 4x - 4x^3}{(x^2 - 1)^2} = \frac{-4x}{(x^2 - 1)^2}.$$

Assim,

$$f'(x) = \frac{-4x}{(x^2 - 1)^2}.$$

(d) **Intervalos de crescimento e decrescimento**

Observe que

$$(x^2 - 1)^2 > 0$$

para todo $x \neq \pm 1$. Portanto, o sinal de $f'(x)$ depende apenas do numerador $-4x$.

$$f'(x) > 0 \iff -4x > 0 \iff x < 0,$$

e

$$f'(x) < 0 \iff x > 0.$$

Separando pelos pontos do domínio:

- Crescente em

$$(-\infty, -1) \cup (-1, 0).$$

- Decrescente em

$$(0, 1) \cup (1, \infty).$$

Além disso,

$$f(0) = 0.$$

Então $(0, 0) \in G(f)$. Este ponto será útil no esboço do gráfico.

(e) **Esboço do gráfico**

Características principais do gráfico:

- domínio:

$$\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\};$$

- assíntotas verticais:

$$x = -1 \quad \text{e} \quad x = 1;$$

- assíntota horizontal:

$$y = 2;$$

- intercepta os eixos no ponto

$$(0, 0);$$

- a função é par, pois

$$f(-x) = f(x).$$

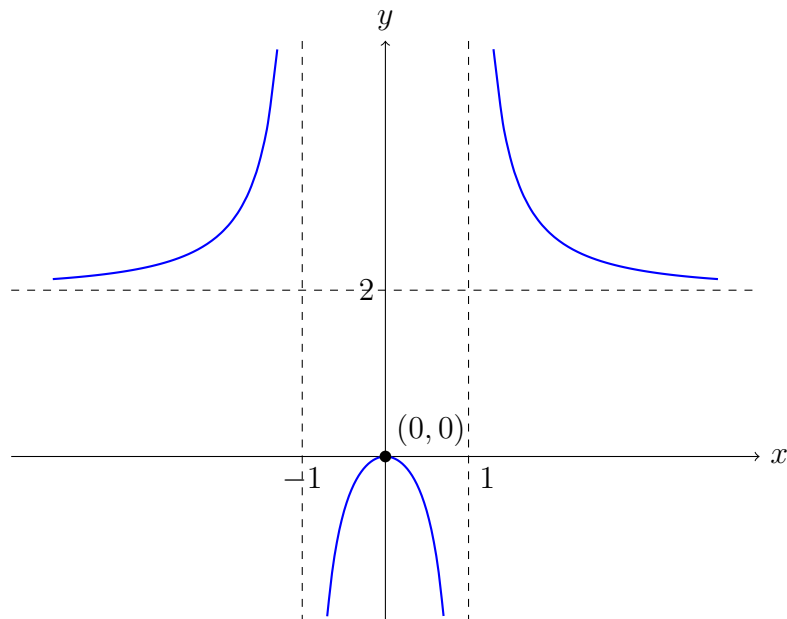
Além disso:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty,$$

e

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) = -\infty.$$

O gráfico cresce para valores de x negativos e decresce para x positivo.



Exercício 28

Dada a função

$$f(x) = \frac{1}{x+4}$$

encontre:

- (a) o domínio de f ;
- (b) as assíntotas, se houver;
- (c) a derivada de f ;
- (d) os intervalos de crescimento e decrescimento de f ;
- (e) um esboço do gráfico de f .

3.3.2 A segunda derivada

Seja f uma função derivável no intervalo J . Então existe a função derivada

$$f' : J \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto f'(x).$$

Agora, considerando a nova função

$$g = f',$$

podemos nos perguntar se existe $g'(x)$.

Se existir a derivada de g em $x = x_0$, dizemos que f é **duas vezes derivável** em x_0 , e denotamos sua segunda derivada por

$$f''(x_0).$$

Podemos também definir a função segunda derivada

$$f'' : J_1 \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto f''(x).$$

onde

$$J_1 = \{x \in J; \text{ existe } f''(x)\}.$$

Ou seja, a função f'' associa a cada $x \in J_1$ o valor da segunda derivada de f nesse ponto.

Exercício 29

Calcule a segunda derivada das funções:

- (a) $f(x) = 3x^3 + 2x^2 - 6x - 4$
- (b) $f(x) = \text{sen}x$

$$(c) \quad f(x) = \frac{1}{x}$$

$$(d) \quad f(x) = \frac{1}{x+4}$$

$$(e) \quad f(x) = x\sqrt{1-x}$$

3.3.3 A segunda derivada x concavidade

Definição 3.6. *Seja $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ uma função definida em um intervalo I .*

- (a) *Dizemos que f é **côncava para cima** (ou **convexa**) em I se, para quaisquer $x_1, x_2 \in I$ e todo $t \in [0, 1]$,*

$$f(tx_1 + (1-t)x_2) \leq t f(x_1) + (1-t) f(x_2).$$

*Geometricamente, isso significa que o gráfico da função fica **abaixo do segmento de reta** que liga dois pontos quaisquer do gráfico.*

- (b) *Dizemos que f é **côncava para baixo** em I se, para quaisquer $x_1, x_2 \in I$ e todo $t \in [0, 1]$,*

$$f(tx_1 + (1-t)x_2) \geq t f(x_1) + (1-t) f(x_2).$$

*Geometricamente, isso significa que o gráfico da função fica **acima do segmento de reta** que liga dois pontos quaisquer do gráfico.*

Traduzindo: uma função côncava para cima é parecida com o gráfico de $f(x) = x^2$, enquanto uma função côncava para baixo é parecida com o gráfico de $g(x) = -x^2$.

Proposição 3.9. *Seja f uma função contínua no intervalo fechado $[a, b]$ e duas vezes derivável no intervalo aberto (a, b) . Então:*

- (i) *Se*

$$f''(x) > 0 \quad \text{para todo } x \in (a, b),$$

então f é côncava para cima em (a, b) .

(ii) Se

$$f''(x) < 0 \quad \text{para todo } x \in (a, b),$$

então f é côncava para baixo em (a, b) .

Observe que, se $f(x) = x^2$, então $f''(x) = 2 > 0$. Já para $g(x) = -x^2$, temos $g''(x) = -2 < 0$. Portanto, a observação anterior bate perfeitamente com o resultado da proposição: segunda derivada positiva indica concavidade para cima, e segunda derivada negativa indica concavidade para baixo.

Agora vamos resolver um exemplo completo com tudo o que aprendemos:

Exemplo 3.3.3. *Vamos estudar a função*

$$f(x) = x + \frac{1}{x}.$$

(a) **Domínio**

Como a expressão $\frac{1}{x}$ só faz sentido para $x \neq 0$, o domínio de f é

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

(b) **Assíntotas**

Como f não está definida em $x = 0$, investigamos o comportamento da função perto desse ponto:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \left(x + \frac{1}{x} \right) = -\infty \quad e \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(x + \frac{1}{x} \right) = +\infty.$$

Portanto, $x = 0$ é uma assíntota vertical.

Deixo como exercício para você verificar que essa função não tem assíntota horizontal.

(c) **Crescimento e decrescimento**

Vamos calcular a derivada:

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - 1}{x^2}.$$

Como $x^2 > 0$ para todo $x \neq 0$, o sinal de $f'(x)$ depende apenas de

$$x^2 - 1.$$

Assim:

- se $x < -1$ ou $x > 1$ então $f'(x) > 0$;
- se $-1 < x < 0$, então $f'(x) < 0$;
- se $0 < x < 1$, então $f'(x) < 0$.

Logo, f é:

- crescente em $(-\infty, -1)$ e $(1, +\infty)$;
- decrescente em $(-1, 0)$ e $(0, 1)$.

Além disso,

$$f(-1) = -1 + \frac{1}{-1} = -2 \quad e \quad f(1) = 1 + \frac{1}{1} = 2.$$

Uma pausa aqui. Observe que a função cresce antes de $x = -1$ e decresce depois desse ponto. Logo, o gráfico forma uma pequena montanha em

$$(-1, f(-1)) = (-1, -2),$$

o que significa que f possui um máximo local em $(-1, -2)$.

Seguindo o mesmo raciocínio, como a função decresce antes de $x = 1$ e cresce depois desse ponto, o gráfico forma um vale em

$$(1, f(1)) = (1, 2),$$

portanto f possui um mínimo local em $(1, 2)$. Observe o gráfico logo abaixo. Os conceitos de máximo/mínimo serão formalizados logo mais.

(d) **Concavidade**

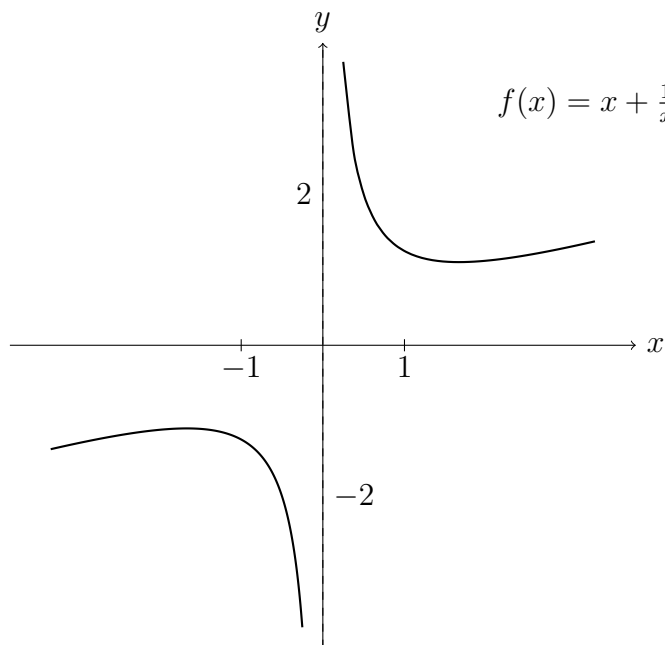
Agora calculamos a segunda derivada:

$$f''(x) = \frac{2}{x^3}.$$

Então:

- se $x < 0$, então $f''(x) < 0$, logo f é côncava para baixo em $(-\infty, 0)$;
- se $x > 0$, então $f''(x) > 0$, logo f é côncava para cima em $(0, +\infty)$.

Portanto, o gráfico de $f(x) = x + \frac{1}{x}$ tem duas ramas: uma no semieixo negativo e outra no semieixo positivo, com assíntota vertical em $x = 0$.



Veja que, no exemplo anterior, eu falei de máximo e mínimo local. Então, antes de continuar, vamos definir esses conceitos com precisão.

Definição 3.7. Seja $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ uma função e seja $x_0 \in D$.

- (a) Dizemos que f tem um **máximo local** em x_0 se existe um intervalo aberto I contendo x_0 tal que, para todo $x \in I \cap D$,

$$f(x) \leq f(x_0).$$

- (b) Dizemos que f tem um **mínimo local** em x_0 se existe um intervalo aberto I contendo x_0 tal que, para todo $x \in I \cap D$,

$$f(x) \geq f(x_0).$$

- (c) Dizemos que f tem um **máximo global** em x_0 se, para todo $x \in D$,

$$f(x) \leq f(x_0).$$

(d) Dizemos que f tem um **mínimo global** em x_0 se, para todo $x \in D$,

$$f(x) \geq f(x_0).$$

Exemplo 3.3.4. Vejamos dois exemplos simples.

(a) Considere a função

$$f(x) = -x^2 + 4.$$

Como a parábola está voltada para baixo, o maior valor da função ocorre no vértice:

$$f(0) = 4.$$

Logo, f possui **máximo global** em $x = 0$, e esse valor é

$$4.$$

(b) Considere agora a função

$$g(x) = x^2 - 1.$$

Como a parábola está voltada para cima, o menor valor da função ocorre no vértice:

$$g(0) = -1.$$

Logo, g possui **mínimo global** em $x = 0$, e esse valor é

$$-1.$$

Roteiro para esboçar uma curva:

1. Domínio.
2. Intersecção com os eixos.
3. Assíntotas.
4. Intervalo de crescimento e decrescimento (f').
5. Máximos e mínimos locais.
6. Concavidade (f'').

Exercício 30

Estude a função

$$f(x) = x^4 - x^2$$

e esboce o seu gráfico.

3.4 Regra de L'Hôpital

Antes de formalizar a Regra de L'Hôpital, vamos ver alguns exemplos para entender como ela é aplicada.

Exemplo 3.4.1. *Vamos provar o limite fundamental:*

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x}.$$

Veja que

$$\operatorname{sen} x \rightarrow 0 \quad \text{quando } x \rightarrow 0$$

e também

$$x \rightarrow 0 \quad \text{quando } x \rightarrow 0.$$

Portanto, temos uma indeterminação do tipo

$$\frac{0}{0}.$$

Nesse caso, vamos aplicar a Regra de L'Hôpital: derivamos o numerador e derivamos o denominador, e então calculamos novamente o limite.

Assim,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\operatorname{sen} x)'}{(x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{1}.$$

Como

$$\cos x \rightarrow 1 \quad \text{quando } x \rightarrow 0,$$

segue que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{1} = 1.$$

Logo pela Regra de L'Hôpital,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1.$$

Ou seja, como o limite das derivadas existiu e foi igual a 1, concluímos pela Regra de Regra de L'Hôpital que o limite original também existe e vale 1.

Entendeu? vamos ver mais um exemplo:

Exemplo 3.4.2. *Vamos calcular o limite*

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x}.$$

Observe que, quando $x \rightarrow +\infty$,

$$x \rightarrow +\infty \quad e \quad e^x \rightarrow +\infty.$$

Portanto, temos uma indeterminação do tipo

$$\frac{\infty}{\infty}.$$

Aplicando a Regra de L'Hôpital, derivamos o numerador e o denominador:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x)'}{(e^x)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x}.$$

Agora, como

$$e^x \rightarrow +\infty \quad \text{quando } x \rightarrow +\infty,$$

segue que

$$\frac{1}{e^x} \rightarrow 0.$$

Logo,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0.$$

Proposição 3.10. *Sejam f e g funções deriváveis em um intervalo aberto I , exceto possivelmente em um ponto $a \in I$. Suponhamos que*

$$g'(x) \neq 0$$

para todo $x \in I$, com $x \neq a$.

Se

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0 \quad e \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0,$$

e se existe o limite

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L,$$

então

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

- Na Regra de L'Hôpital, podemos substituir a por a^+ , a^- , $+\infty$ ou $-\infty$, e o resultado continua válido.

- Além disso, o limite

$$L = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

também pode ser igual a $+\infty$ ou $-\infty$.

- A Regra de L'Hôpital continua válida se o limite do quociente apresentar uma indeterminação do tipo

$$f(x) \rightarrow +\infty \quad \text{e} \quad g(x) \rightarrow -\infty,$$

ou

$$f(x) \rightarrow -\infty \quad \text{e} \quad g(x) \rightarrow +\infty.$$

ou

$$f(x) \rightarrow +\infty \quad \text{e} \quad g(x) \rightarrow +\infty,$$

ou

$$f(x) \rightarrow -\infty \quad \text{e} \quad g(x) \rightarrow -\infty.$$

Exercício 31

Calcule:

(a)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x}$$

(b)

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\cos x - 1} \right)$$

(c)

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \left(x - \frac{\pi}{2} \right) \operatorname{tg} x$$

Exemplo 3.4.3. *Vamos calcular o limite*

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x^2}{e^x}.$$

Observe que, quando $x \rightarrow +\infty$,

$$-x^2 \rightarrow -\infty \quad e \quad e^x \rightarrow +\infty.$$

Portanto, este é um caso em que o numerador tende a $-\infty$ e o denominador tende a $+\infty$.

Aplicando a Regra de L'Hôpital, derivamos o numerador e o denominador:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(-x^2)'}{(e^x)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x}{e^x}.$$

Ainda temos uma situação de sinais opostos no infinito, então aplicamos L'Hôpital novamente:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(-2x)'}{(e^x)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2}{e^x}.$$

Como

$$e^x \rightarrow +\infty \quad \text{quando } x \rightarrow +\infty,$$

segue que

$$\frac{-2}{e^x} \rightarrow 0.$$

Logo,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x^2}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2}{e^x} = 0.$$

Nesse exemplo você aprendeu que dá para usar L'Hôpital várias vezes se necessário e possível.

Exercício 32

Calcule:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\operatorname{sen} x} \right)$$

Usando L'Hôpital para resolver indeterminações

Antes de começar, vamos lembrar algumas propriedades importantes dos logaritmos e exponenciais que usaremos nas próximas contas:

$$\ln(e^x) = x,$$

$$e^{\ln x} = x \quad (x > 0),$$

e

$$\ln(x^a) = a \ln x \quad (x > 0).$$

Vamos aprender agora a resolver algumas indeterminações que envolvem potências.

1. A primeira delas é do tipo 0^0 .

Exemplo 3.4.4. *Calcule*

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{1/\ln x}.$$

Solução.

Quando $x \rightarrow 0^+$, temos

$$x \rightarrow 0 \quad \text{e} \quad \frac{1}{\ln x} \rightarrow 0,$$

logo a expressão está na forma indeterminada

$$0^0.$$

Seja

$$y = x^{1/\ln x}.$$

Lembre-se: queremos calcular

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} y.$$

Aplicando logaritmo:

$$\ln y = \frac{1}{\ln x} \ln x = 1.$$

Portanto,

$$\ln y \rightarrow 1, \quad x \rightarrow 0^+$$

Aplicando a função exponencial em ambos os lados e usando a continuidade da exponencial, obtemos

$$y = e^{\ln y} \rightarrow e^1 = e, \quad x \rightarrow 0^+.$$

Logo,

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{1/\ln x} = e.}$$

Exemplo 3.4.5. *Calcule*

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x.$$

Solução.

Quando $x \rightarrow 0^+$, temos

$$x \rightarrow 0 \quad \text{e} \quad x^x \rightarrow 0^0,$$

que é uma indeterminação.

Nesses casos, a ideia é usar logaritmo.

Seja

$$y = x^x.$$

Aplicando logaritmo em ambos os lados, obtemos

$$\ln y = \ln(x^x) = x \ln x.$$

Agora vamos calcular

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x.$$

Essa expressão está na forma

$$0 \cdot (-\infty),$$

que ainda é uma indeterminação.

Para usar L'Hôpital, escrevemos como quociente:

$$x \ln x = \frac{\ln x}{1/x}.$$

Quando $x \rightarrow 0^+$,

$$\ln x \rightarrow -\infty \quad \text{e} \quad \frac{1}{x} \rightarrow +\infty,$$

logo temos uma indeterminação do tipo

$$\frac{\infty}{\infty}.$$

Aplicando L'Hôpital:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{1/x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x) = 0.$$

Portanto,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln y = 0.$$

Como a função exponencial é contínua para todo $x \in \mathbb{R}$, temos:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\ln y} = e^{-\infty} = 1.$$

Como

$$e^{\ln y} = y = x^x,$$

segue que

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\ln y} = 1.$$

Exemplo 3.4.6. *Calcule*

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (\operatorname{sen} x)^x.$$

Solução.

Quando $x \rightarrow 0^+$, temos

$$\operatorname{sen} x \rightarrow 0 \quad \text{e} \quad (\operatorname{sen} x)^x \rightarrow 0^0,$$

que é uma indeterminação.

Seja

$$y = (\operatorname{sen} x)^x.$$

Aplicando logaritmo,

$$\ln y = x \ln(\operatorname{sen} x).$$

Agora vamos calcular

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(\operatorname{sen} x).$$

Essa expressão está na forma

$$0 \cdot (-\infty),$$

então escrevemos como quociente:

$$x \ln(\operatorname{sen} x) = \frac{\ln(\operatorname{sen} x)}{1/x}.$$

Quando $x \rightarrow 0^+$,

$$\ln(\operatorname{sen} x) \rightarrow -\infty \quad \text{e} \quad \frac{1}{x} \rightarrow \infty,$$

logo temos uma indeterminação do tipo

$$\frac{\infty}{\infty}.$$

Aplicando L'Hôpital:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(\operatorname{sen} x)}{1/x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos x / \operatorname{sen} x}{-1/x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(-x^2 \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} \right).$$

Reescrevendo,

$$-x^2 \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} = -x \cos x \cdot \frac{x}{\operatorname{sen} x}.$$

Quando $x \rightarrow 0^+$,

$$x \rightarrow 0, \quad \cos x \rightarrow 1, \quad \frac{x}{\operatorname{sen} x} \rightarrow 1.$$

Portanto,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(\operatorname{sen} x) = 0.$$

Logo, pela continuidade da função exponencial

$$\ln y \rightarrow 0 \quad \Rightarrow \quad y = e^{\ln y} \rightarrow e^0 = 1.$$

Assim, $\lim_{x \rightarrow 0^+} y = 1$ e portanto

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 0^+} (\operatorname{sen} x)^x = 1.}$$

Como você pôde ver, no primeiro exemplo o resultado foi e , e nos outros dois o resultado foi 1. Então não dá pra prever o resultado de uma coisa do tipo 0^0 .

2. A próxima indeterminação é do tipo 1^∞

Exemplo 3.4.7. *Esse é o limite fundamental que você já conhece.*

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x.$$

Solução.

Quando $x \rightarrow \infty$, temos

$$1 + \frac{1}{x} \rightarrow 1 \quad \text{e} \quad x \rightarrow \infty,$$

logo a expressão está na forma indeterminada

$$1^\infty.$$

Seja

$$y = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x.$$

Aplicando logaritmo em ambos os lados,

$$\ln y = x \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right).$$

Agora vamos calcular

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right).$$

Essa expressão está na forma

$$\infty \cdot 0.$$

Para usar L'Hôpital, escrevemos como quociente:

$$x \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) = \frac{\ln \left(1 + \frac{1}{x} \right)}{1/x}.$$

Quando $x \rightarrow \infty$,

$$\ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) \rightarrow 0 \quad \text{e} \quad \frac{1}{x} \rightarrow 0,$$

logo temos uma indeterminação do tipo

$$\frac{0}{0}.$$

Aplicando L'Hôpital:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln \left(1 + \frac{1}{x} \right)}{1/x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-1/x^2}{-1/x^2}.$$

Simplificando,

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + 1/x} = 1.$$

Portanto,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \ln y = 1.$$

Aplicando a exponencial em ambos os lados e usando a continuidade da função exponencial, obtemos

$$\lim_{x \rightarrow \infty} y = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\ln y} = e^1 = e.$$

Como

$$y = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x,$$

segue que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$$

Exercício 33

Prove que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^x = e^2.$$

3. O último caso é ∞^0 :

Exemplo 3.4.8. *Calcule*

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^{1/x}.$$

Solução.

Quando $x \rightarrow \infty$, temos

$$x \rightarrow \infty \quad \text{e} \quad \frac{1}{x} \rightarrow 0,$$

logo a expressão está na forma indeterminada

$$\infty^0.$$

Seja

$$y = x^{1/x}.$$

Aplicando logaritmo em ambos os lados,

$$\ln y = \frac{\ln x}{x}.$$

Agora vamos calcular

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x}.$$

Quando $x \rightarrow \infty$,

$$\ln x \rightarrow \infty \quad \text{e} \quad x \rightarrow \infty,$$

logo temos uma indeterminação do tipo

$$\frac{\infty}{\infty}.$$

Aplicando L'Hôpital:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1/x}{1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0.$$

Portanto,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \ln y = 0.$$

Aplicando a exponencial em ambos os lados e usando a continuidade da função exponencial, obtemos

$$\lim_{x \rightarrow \infty} y = e^0 = 1.$$

Como

$$y = x^{1/x},$$

segue que

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow \infty} x^{1/x} = 1.}$$

Exercício 34

Prove que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^{2/x} = e^2.$$

Observação 3.1. *Nem toda expressão envolvendo potências e infinito é uma indeterminação.*

Exercício 35

Calcule os limites:

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^x$
2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{-x}$
3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} -x^{-x}$

4 Integraais

Neste capítulo, iniciaremos o estudo das integrais, uma das ideias mais importantes do Cálculo.

A noção de integral surge naturalmente quando queremos calcular áreas de regiões limitadas por curvas, algo que as fórmulas usuais de geometria nem sempre conseguem resolver.

Ao longo desta seção, vamos construir essa ideia de forma intuitiva, começando pela motivação geométrica do problema da área.

Depois eu vou ensinar você a interpretar e resolver problemas de área usando integrais.

4.1 Motivação

Até agora, sabemos calcular a área de figuras geométricas simples, como retângulos, quadrados e triângulos.

Por exemplo, a área de um retângulo é dada por

$$A = b \cdot h,$$

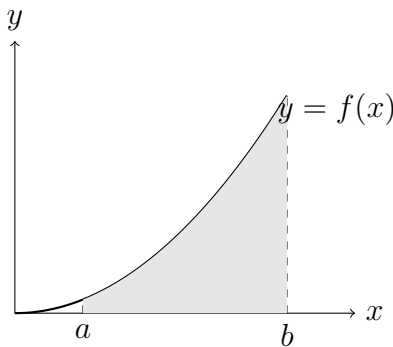
enquanto a área de um triângulo é

$$A = \frac{b \cdot h}{2}.$$

Essas fórmulas funcionam muito bem quando a região tem lados retos e forma geométrica conhecida.

Mas e quando a região não tem um formato tão simples?

Imagine a região ilustrada na figura abaixo, limitada pelo gráfico de uma função no primeiro quadrante, pelo eixo x e por duas retas verticais.



Nesse caso, a figura não é um retângulo, nem um triângulo, nem qualquer outra figura geométrica elementar para a qual já conhecemos uma fórmula pronta.

Surge então a pergunta natural:

Como calcular a área de uma região com bordas curvas?

É justamente essa pergunta que motiva o estudo das integrais.

A integral nasce como uma ferramenta para calcular áreas de regiões planas limitadas por curvas, isto é, regiões que não possuem uma forma geométrica simples.

A princípio, ainda não sabemos calcular exatamente a área da região da figura acima.

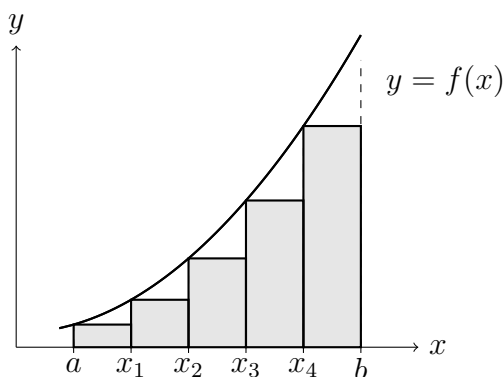
No entanto, podemos construir uma boa aproximação para essa área.

A ideia é dividir o intervalo $[a, b]$ em vários subintervalos menores. Em seguida, sobre cada subintervalo, construímos um retângulo que aproxima a região desejada.

Calculando a área de cada um desses pequenos retângulos e somando todos eles, obtemos uma aproximação para a área total da região.

Quanto maior for a quantidade de subdivisões do intervalo $[a, b]$, mais finos ficam os retângulos e melhor será essa aproximação.

Assim, a soma das áreas dos retângulos se aproxima da área da região desejada, com um erro que vai diminuindo à medida que aumentamos o número de retângulos.



Veja que os pequenos erros entre a área que queremos calcular e a soma das áreas dos retângulos se parecem, na figura, com pequenos triângulos. Quanto mais estreitos forem os retângulos, menores serão também esses erros.

Além disso, esse processo de dividir o intervalo $[a, b]$ em vários subintervalos recebe um nome importante: *partição* do intervalo $[a, b]$.

Na figura anterior, por exemplo, consideramos a partição

$$P = \{x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\},$$

em que

$$x_0 = a \quad \text{e} \quad x_5 = b.$$

Agora imagine o que acontece se, em vez de dividirmos o intervalo apenas em poucos subintervalos, tomarmos uma partição muito mais fina, por exemplo,

$$P = \{x_0, x_1, \dots, x_{100}\}$$

ou até mesmo

$$P = \{x_0, x_1, \dots, x_{1000}\}.$$

Nesse caso, os retângulos ficam cada vez mais finos, e os erros entre a área da região e a soma das áreas desses retângulos ficam cada vez menores.

Essa é a ideia central por trás da integral: aproximar a área desejada por somas de áreas de retângulos e, em seguida, imaginar o que acontece quando fazemos o número de subdivisões crescer indefinidamente.

É justamente a partir dessa ideia que vamos formalizar a definição de integral.

Definição 4.1. *Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função limitada.*

Considere uma partição do intervalo $[a, b]$,

$$P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\},$$

com

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b.$$

A soma

$$\sum_{i=1}^n f(x_{i-1}) \Delta x_i, \quad \text{onde } \Delta x_i = x_i - x_{i-1},$$

*é chamada **soma de Riemann à esquerda** de f associada à partição P .*

*Se, quando a norma da partição tende a zero, essas somas convergirem para um número L , dizemos que f é **integrável em** $[a, b]$ e definimos*

$$\int_a^b f(x) dx = L.$$

Ou seja,

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_{i-1}) \Delta x_i, \quad \text{onde } \Delta x_i = x_i - x_{i-1}.$$

Esse número L é chamado de **integral definida de f no intervalo $[a, b]$** e $\int_a^b f(x) dx$ é a notação que a gente usa .

Repare que, na definição da integral definida, sempre consideramos $a < b$. Por exemplo, no intervalo $[0, 1]$, escrevemos

$$\int_0^1 f(x) dx.$$

No entanto, também precisamos dar sentido a expressões em que os limites aparecem na ordem inversa, como

$$\int_1^0 f(x) dx.$$

Para isso, definimos

$$\int_b^a f(x) dx = - \int_a^b f(x) dx.$$

Em particular, no caso do intervalo $[0, 1]$, temos

$$\int_1^0 f(x) dx = - \int_0^1 f(x) dx.$$

Proposição 4.1. Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função integrável em $[a, b]$. Se

$$f(x) \geq 0 \quad \text{para todo } x \in [a, b],$$

então

$$\int_a^b f(x) dx$$

representa geometricamente a área exata da região limitada pelo gráfico de f , pelo eixo x e pelas retas verticais $x = a$ e $x = b$.

Exemplo 4.1.1. *Vamos calcular*

$$\int_0^1 x \, dx$$

usando a definição de integral.

Considere uma partição uniforme do intervalo $[0, 1]$ em n subintervalos:

$$P = \left\{ 0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n}{n} \right\}.$$

Nesse caso,

$$\Delta x = \frac{1}{n}.$$

Usando a soma de Riemann à esquerda, temos

$$x_{i-1} = \frac{i-1}{n}.$$

Logo,

$$\sum_{i=1}^n f(x_{i-1}) \Delta x = \sum_{i=1}^n \left(\frac{i-1}{n} \right) \frac{1}{n} = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n (i-1).$$

Como

$$\sum_{i=1}^n (i-1) = \sum_{k=0}^{n-1} k = \frac{(n-1)n}{2},$$

segue que

$$\sum_{i=1}^n f(x_{i-1}) \Delta x = \frac{1}{n^2} \cdot \frac{(n-1)n}{2} = \frac{n-1}{2n}.$$

Agora fazemos $n \rightarrow \infty$:

$$\int_0^1 x \, dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-1}{2n} = \frac{1}{2}.$$

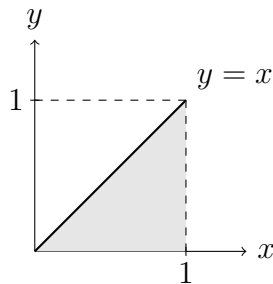
Portanto,

$$\int_0^1 x \, dx = \frac{1}{2}.$$

Veja que esse resultado nós já conhecíamos por Geometria, pois a região sob o gráfico de

$$f(x) = x$$

no intervalo $[0, 1]$ é exatamente um triângulo de base 1 e altura 1.



Assim, sua área é

$$A = \frac{1 \cdot 1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Ou seja, a definição de integral confirmou o valor que já sabíamos geometricamente.

O objetivo deste exemplo foi apenas mostrar como calcular uma integral diretamente pela definição, para que você perceba que, mesmo em uma função muito simples, as contas já podem ficar trabalhosas.

Imagine então o que aconteceria com funções mais complicadas.

Por isso, na prática, quase nunca calculamos integrais pela definição.

Em vez disso, vamos aprender técnicas de integração que permitem encontrar integrais de forma muito mais rápida e eficiente, evitando o uso direto da definição.

Propriedades da integral definida

Sejam f e g funções integráveis em $[a, b]$, e $k \in \mathbb{R}$. Então:

(a)

$$\int_a^a f(x) dx = 0$$

(b) A constante pode sair da integral:

$$\int_a^b k f(x) dx = k \int_a^b f(x) dx.$$

(c) A integral da soma é a soma das integrais:

$$\int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx.$$

(d) Se $a < c < b$, então a integral pode ser separada no ponto c :

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

(e) Se

$$f(x) \leq g(x) \quad \text{para todo } x \in [a, b],$$

então

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx.$$

(f) O módulo da integral é menor ou igual à integral do módulo:

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx.$$

Proposição 4.2. Se $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua, então f é integrável em $[a, b]$.

Exercício 36

Julgue cada afirmação em **verdadeira (V)** ou **falsa (F)**.

(a) $\int_1^1 x^2 dx = 0$

(b) $\int_0^2 x^2 dx = \int_2^0 x^2 dx$

(c) A função $f(x) = \cos x$ é integrável em $[0, \pi]$.

(d) $\int_0^1 (x+1) dx = \int_0^1 x dx - \int_0^1 1 dx$

(e) $\int_0^1 (x+1) dx = \int_0^1 x dx - \int_1^0 1 dx$

(f) $\int_0^1 3x^2 dx = 3 \int_0^1 x^2 dx$

(g)

$$\int_a^b x^2 dx \geq 0.$$

$$(h) \left| \int_0^1 x \, dx \right| \leq \int_0^1 |x| \, dx$$

4.2 Integral indefinida e Primitiva

Até agora, estudamos a **integral definida**, que está associada ao cálculo de áreas.

Agora vamos introduzir outro conceito muito importante: a **integral indefinida**.

A integral indefinida de uma função $f(x)$ é o conjunto de todas as funções cuja derivada é igual a $f(x)$. Essas funções são chamadas de **primitivas** de f .

Por exemplo, considere a função

$$f(x) = 2x.$$

Queremos encontrar todas as funções cuja derivada seja $2x$.

Sabemos que

$$\frac{d}{dx}(x^2) = 2x,$$

mas também

$$\frac{d}{dx}(x^2 + 1) = 2x,$$

e ainda

$$\frac{d}{dx}(x^2 - 7) = 2x.$$

Portanto, as funções

$$x^2, \quad x^2 + 1, \quad x^2 - 7$$

são todas primitivas da função $2x$.

Veja que, além dessas três, existem infinitas outras primitivas de $2x$, pois podemos somar qualquer constante real e a derivada continuará sendo a mesma.

Representamos o conjunto de todas as primitivas de $2x$ por

$$\int 2x \, dx = x^2 + C,$$

onde $C \in \mathbb{R}$ é uma constante arbitrária.

De modo geral, dada uma função $f(x)$, se $F'(x) = f(x)$, então escrevemos a integral indefinida de f assim:

$$\int f(x) dx = F(x) + C,$$

onde C é uma constante arbitrária, chamada constante de integração e F é a primitiva de f .

Segue abaixo uma tabela com algumas primitivas básicas pra você. Algumas são fáceis de calcular como por exemplo a primitiva da constante $k \in \mathbb{R}$. Outras são mais complicadas.

Função	Primitiva
k	$\int k dx = kx + C$
$x^\alpha \ (\alpha \in \mathbb{R}, \ \alpha \neq -1)$	$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$
$\frac{1}{x}$	$\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C$
e^x	$\int e^x dx = e^x + C$
$a^x \ (a > 0, \ a \neq 1)$	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$
$\cos x$	$\int \cos x dx = \text{sen} x + C$
$\text{sen} x$	$\int \text{sen} x dx = -\cos x + C$
$\sec^2 x$	$\int \sec^2 x dx = \text{tg} x + C$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + C$

4.3 Teorema Fundamental do cálculo

Teorema 4.1 (Teorema Fundamental do Cálculo). *Se f é contínua em $[a, b]$ e $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua em $[a, b]$, derivável em (a, b) , tal que*

$$F'(x) = f(x)$$

para todo $x \in (a, b)$, então

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

Veja que F é a primitiva de f em $[a, b]$. O teorema diz que, para calcular a integral de uma função, é suficiente conhecermos uma primitiva dessa função.

Exemplo 4.3.1. *Calcule a integral*

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos x dx.$$

Solução: *Uma primitiva de $\cos x$ é $\sin x$. Logo,*

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos x dx = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) - \sin(0) = \frac{\sqrt{2}}{2} - 0 = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Exemplo 4.3.2. *Calcule a integral*

$$\int_1^2 x^2 dx.$$

Solução: *Uma primitiva de x^2 é $\frac{x^3}{3}$. Então,*

$$\int_1^2 x^2 dx = \frac{2^3}{3} - \frac{1^3}{3} = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3}.$$

Exemplo 4.3.3. *Calcule a integral*

$$\int_0^1 (2x + 1) dx.$$

Solução: *Uma primitiva de $2x + 1$ é $x^2 + x$. Assim,*

$$\int_0^1 (2x + 1) dx = (1^2 + 1) - (0 + 0) = 2.$$

Exemplo 4.3.4. *Calcule a integral*

$$\int_0^{\pi} \operatorname{sen} x \, dx.$$

Solução: *Uma primitiva de $\operatorname{sen} x$ é $-\cos x$. Logo,*

$$\int_0^{\pi} \operatorname{sen} x \, dx = [-\cos x]_0^{\pi} = (-\cos \pi) - (-\cos 0) = (1) - (-1) = 2.$$

Muitas vezes não é simples encontrar diretamente uma primitiva de uma função e, portanto, calcular uma integral. Existem métodos que facilitam esse processo. Veremos os principais nas próximas seções.

4.4 Integração por substituição

A técnica de integração por substituição é utilizada quando a integral apresenta uma composição de funções, isto é, quando identificamos uma função “dentro” de outra função.

A ideia principal é fazer uma mudança de variável que transforme a integral original em uma integral mais simples.

Seja

$$u = g(x).$$

Então,

$$du = g'(x) \, dx.$$

Assim, sempre que a integral estiver na forma

$$\int f(g(x)) g'(x) \, dx,$$

podemos fazer a substituição

$$u = g(x),$$

obtendo

$$\int f(g(x)) g'(x) \, dx = \int f(u) \, du.$$

Em palavras, escolhemos como nova variável a “função de dentro”, e o diferencial du aparece derivando essa função.

Exemplo 4.4.1. *Calcule*

$$\int_0^{\pi/4} 2x \cos(x^2) dx.$$

Fazendo

$$u = x^2,$$

temos

$$du = 2x dx.$$

Agora, precisamos trocar também os limites de integração.

Quando

$$x = 0,$$

temos

$$u = 0^2 = 0.$$

Quando

$$x = \frac{\pi}{4},$$

temos

$$u = \left(\frac{\pi}{4}\right)^2 = \frac{\pi^2}{16}.$$

Logo,

$$\int_0^{\pi/4} 2x \cos(x^2) dx = \int_0^{\pi^2/16} \cos(u) du.$$

Assim,

$$\int_0^{\pi^2/16} \cos(u) du = [\text{sen}(u)]_0^{\pi^2/16}.$$

Portanto,

$$\int_0^{\pi/4} 2x \cos(x^2) dx = \text{sen}\left(\frac{\pi^2}{16}\right) - \text{sen}(0).$$

Como $\text{sen}(0) = 0$, obtemos

$$\int_0^{\pi/4} 2x \cos(x^2) dx = \text{sen}\left(\frac{\pi^2}{16}\right).$$

Exemplo 4.4.2. *Calcule*

$$\int_0^{\pi/3} \cos(3x) dx.$$

Fazendo

$$u = 3x,$$

temos

$$du = 3 dx \quad \Rightarrow \quad dx = \frac{1}{3} du.$$

Agora, trocamos os limites de integração.

Quando

$$x = 0,$$

temos

$$u = 3 \cdot 0 = 0.$$

Quando

$$x = \frac{\pi}{3},$$

temos

$$u = 3 \cdot \frac{\pi}{3} = \pi.$$

Logo,

$$\int_0^{\pi/3} \cos(3x) dx = \frac{1}{3} \int_0^{\pi} \cos(u) du.$$

Assim,

$$\frac{1}{3} \int_0^{\pi} \cos(u) du = \frac{1}{3} [\text{sen}(u)]_0^{\pi}.$$

Portanto,

$$\int_0^{\pi/3} \cos(3x) dx = \frac{1}{3} (\text{sen}(\pi) - \text{sen}(0)).$$

Como

$$\text{sen}(\pi) = 0 \quad e \quad \text{sen}(0) = 0,$$

temos

$$\int_0^{\pi/3} \cos(3x) dx = 0.$$

Exemplo 4.4.3. *Calcule*

$$\int_0^{\pi/2} \cos x e^{\operatorname{sen} x} dx.$$

Fazendo

$$u = \operatorname{sen} x,$$

temos

$$du = \cos x dx.$$

Agora, trocamos os limites de integração.

Quando

$$x = 0,$$

temos

$$u = \operatorname{sen} 0 = 0.$$

Quando

$$x = \frac{\pi}{2},$$

temos

$$u = \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{2} \right) = 1.$$

Logo,

$$\int_0^{\pi/2} \cos x e^{\operatorname{sen} x} dx = \int_0^1 e^u du.$$

Assim,

$$\int_0^1 e^u du = [e^u]_0^1 = e^1 - e^0.$$

Portanto,

$$\int_0^{\pi/2} \cos x e^{\operatorname{sen} x} dx = e - 1.$$

Exemplo 4.4.4. *Calcule*

$$\int_0^2 \frac{e^x}{1 + e^x} dx.$$

Fazendo

$$u = 1 + e^x,$$

temos

$$du = e^x dx.$$

Agora, trocamos os limites de integração.

Quando

$$x = 0,$$

temos

$$u = 1 + e^0 = 2.$$

Quando

$$x = 2,$$

temos

$$u = 1 + e^2.$$

Logo,

$$\int_0^2 \frac{e^x}{1 + e^x} dx = \int_2^{1+e^2} \frac{1}{u} du.$$

Assim,

$$\int_2^{1+e^2} \frac{1}{u} du = [\ln |u|]_2^{1+e^2}.$$

Portanto,

$$\int_0^2 \frac{e^x}{1 + e^x} dx = \ln(1 + e^2) - \ln 2.$$

Ou ainda,

$$\int_0^2 \frac{e^x}{1 + e^x} dx = \ln \left(\frac{1 + e^2}{2} \right).$$

Exemplo 4.4.5. *Calcule*

$$\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{1+x}} dx.$$

Fazendo

$$u = 1 + x,$$

temos

$$du = dx.$$

Agora, trocamos os limites de integração.

Quando

$$x = 1,$$

temos

$$u = 1 + 1 = 2.$$

Quando

$$x = 2,$$

temos

$$u = 1 + 2 = 3.$$

Logo,

$$\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{1+x}} dx = \int_2^3 \frac{1}{\sqrt{u}} du.$$

Como

$$\frac{1}{\sqrt{u}} = u^{-1/2},$$

temos

$$\int_2^3 u^{-1/2} du = [2u^{1/2}]_2^3.$$

Portanto,

$$\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{1+x}} dx = 2\sqrt{3} - 2\sqrt{2}.$$

Ou ainda,

$$\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{1+x}} dx = 2 \left(\sqrt{3} - \sqrt{2} \right).$$

4.5 Integração por partes

A técnica de integração por partes é útil quando a integral envolve o produto de duas funções.

Sejam $u = u(x)$ e $v = v(x)$ funções deriváveis. Então,

$$(uv)' = u'v + uv'.$$

Integrando ambos os lados,

$$\int (uv)' dx = \int u'v dx + \int uv' dx.$$

Logo,

$$uv = \int u'v dx + \int uv' dx.$$

Reorganizando,

$$\boxed{\int u \, dv = uv - \int v \, du.}$$

Essa é a fórmula de integração por partes.

Exemplo 4.5.1. *Calcule*

$$\int_0^1 x e^x \, dx.$$

Escolhemos

$$u = x \quad e \quad dv = e^x \, dx.$$

Então,

$$du = dx \quad e \quad v = e^x.$$

Pela fórmula da integração por partes,

$$\int u \, dv = uv - \int v \, du.$$

Assim,

$$\int_0^1 x e^x \, dx = [x e^x]_0^1 - \int_0^1 e^x \, dx.$$

Calculando cada termo, temos

$$[x e^x]_0^1 = 1 \cdot e^1 - 0 \cdot e^0 = e,$$

e

$$\int_0^1 e^x \, dx = [e^x]_0^1 = e - 1.$$

Portanto,

$$\int_0^1 x e^x \, dx = e - (e - 1) = 1.$$

Exemplo 4.5.2. *Calcule*

$$\int_0^{\pi/6} x \cos x \, dx.$$

Escolhemos

$$u = x \quad e \quad dv = \cos x \, dx.$$

Então,

$$du = dx \quad e \quad v = \operatorname{sen} x.$$

Pela fórmula da integração por partes,

$$\int u \, dv = uv - \int v \, du.$$

Assim,

$$\int_0^{\pi/6} x \cos x \, dx = [x \operatorname{sen} x]_0^{\pi/6} - \int_0^{\pi/6} \operatorname{sen} x \, dx.$$

Calculando o primeiro termo,

$$[x \operatorname{sen} x]_0^{\pi/6} = \frac{\pi}{6} \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{6} \right) - 0 \cdot \operatorname{sen}(0) = \frac{\pi}{6} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\pi}{12}.$$

Agora,

$$\int_0^{\pi/6} \operatorname{sen} x \, dx = [-\cos x]_0^{\pi/6} = -\cos \left(\frac{\pi}{6} \right) + \cos(0).$$

Como

$$\cos \left(\frac{\pi}{6} \right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad e \quad \cos(0) = 1,$$

temos

$$\int_0^{\pi/6} \operatorname{sen} x \, dx = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Portanto,

$$\int_0^{\pi/6} x \cos x \, dx = \frac{\pi}{12} - \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \right).$$

Logo,

$$\int_0^{\pi/6} x \cos x \, dx = \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{2} - 1.$$

Exemplo 4.5.3. Calcule

$$\int_1^2 \ln x \, dx.$$

Escolhemos

$$u = \ln x \quad e \quad dv = dx.$$

Então,

$$du = \frac{1}{x} dx \quad \text{e} \quad v = x.$$

Pela fórmula da integração por partes,

$$\int u dv = uv - \int v du.$$

Assim,

$$\int_1^2 \ln x dx = [x \ln x]_1^2 - \int_1^2 x \cdot \frac{1}{x} dx.$$

Logo,

$$\int_1^2 \ln x dx = [x \ln x]_1^2 - \int_1^2 1 dx.$$

Calculando o primeiro termo,

$$[x \ln x]_1^2 = 2 \ln 2 - 1 \ln 1.$$

Como

$$\ln 1 = 0,$$

temos

$$[x \ln x]_1^2 = 2 \ln 2.$$

Agora,

$$\int_1^2 1 dx = [x]_1^2 = 2 - 1 = 1.$$

Portanto,

$$\int_1^2 \ln x dx = 2 \ln 2 - 1.$$

4.6 Integração de funções racionais por frações parciais

Nesta seção, vamos estudar como integrar funções racionais, isto é, funções da forma

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)},$$

onde $p(x)$ e $q(x)$ são polinômios.

Começaremos com o caso em que o grau de p é menor do que o grau de q , isto é,

Caso 1: $\text{grau}(p) < \text{grau}(q)$

Esse caso será dividido em alguns subcasos, de acordo com a fatoração do denominador $q(x)$.

Caso 1.1: $q(x)$ pode ser escrito como produto de fatores lineares distintos.

Exemplo 4.6.1. *Calcule a integral*

$$\int_{-1}^0 \frac{1}{(x-1)(x-2)} dx.$$

A ideia é escrever a fração como soma de frações mais simples. Procuramos constantes A e B tais que

$$\frac{1}{(x-1)(x-2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2}.$$

Colocando tudo sobre o mesmo denominador, obtemos

$$\frac{A(x-2) + B(x-1)}{(x-1)(x-2)} = \frac{1}{(x-1)(x-2)}.$$

Logo,

$$A(x-2) + B(x-1) = 1.$$

Escolhendo valores convenientes para x :

- Para $x = 2$: $A(0) + B(1) = 1 \Rightarrow B = 1$;
- Para $x = 1$: $A(-1) + B(0) = 1 \Rightarrow A = -1$.

Assim,

$$\frac{1}{(x-1)(x-2)} = \frac{-1}{x-1} + \frac{1}{x-2}.$$

Portanto,

$$\int_{-1}^0 \frac{1}{(x-1)(x-2)} dx = \int_{-1}^0 \left(\frac{-1}{x-1} + \frac{1}{x-2} \right) dx.$$

Integrando termo a termo, temos

$$\int_{-1}^0 \frac{1}{(x-1)(x-2)} dx = [-\ln|x-1| + \ln|x-2|]_{-1}^0.$$

Agora, calculamos nos limites.

Para $x = 0$:

$$-\ln|0-1| + \ln|0-2| = -\ln 1 + \ln 2 = \ln 2.$$

Para $x = -1$:

$$-\ln|-1-1| + \ln|-1-2| = -\ln 2 + \ln 3 = \ln\left(\frac{3}{2}\right).$$

Logo,

$$\int_{-1}^0 \frac{1}{(x-1)(x-2)} dx = \ln 2 - \ln\left(\frac{3}{2}\right).$$

Portanto,

$$\int_{-1}^0 \frac{1}{(x-1)(x-2)} dx = \ln\left(\frac{4}{3}\right).$$

Agora apresentamos a teoria geral para esse tipo de decomposição.

Proposição 4.3. *Sejam $a_1, a_2, \dots, a_n$ números reais não nulos e $b_1, b_2, \dots, b_n$ números reais tais que os polinômios $a_1x + b_1, a_2x + b_2, \dots, a_nx + b_n$ são distintos dois a dois.*

Então, para qualquer polinômio $p(x)$ tal que

$$\text{grau}(p) < n,$$

existe uma única decomposição da forma

$$\frac{p(x)}{(a_1x + b_1)(a_2x + b_2) \cdots (a_nx + b_n)} = \frac{A_1}{a_1x + b_1} + \frac{A_2}{a_2x + b_2} + \cdots + \frac{A_n}{a_nx + b_n},$$

onde $A_1, A_2, \dots, A_n$ são constantes reais.

Exercício 37

Decomponha em frações parciais e calcule:

a) $\int_{-1}^0 \frac{2}{(x-1)(x+3)} dx$

b) $\int_0^1 \frac{3x+1}{x^2-x-2} dx$

$$\text{c) } \int_1^2 \frac{5}{2x^3 + 3x^2 - 2x} dx$$

Caso 1.2: $q(x)$ pode ser escrito como produto de fatores lineares, sendo que alguns deles se repetem.

Exemplo 4.6.2. *Considere a integral*

$$\int_2^3 \frac{4x}{x^3 - x^2 - x + 1} dx.$$

O primeiro passo é fatorar o denominador. Observe que

$$x^3 - x^2 - x + 1 = (x - 1)^2(x + 1).$$

Como aparece um fator linear repetido, a decomposição em frações parciais deve ser feita na forma

$$\frac{4x}{(x - 1)^2(x + 1)} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{(x - 1)^2} + \frac{C}{x + 1}.$$

A partir dessa decomposição, a integral se reduz a integrais mais simples. Igualando os numeradores, obtemos

$$4x = A(x - 1)(x + 1) + B(x + 1) + C(x - 1)^2.$$

Ou seja,

$$4x = A(x^2 - 1) + B(x + 1) + C(x^2 - 2x + 1).$$

Agrupando os termos semelhantes,

$$4x = (A + C)x^2 + (B - 2C)x + (-A + B + C).$$

Assim, obtemos o sistema

$$\begin{cases} A + C = 0, \\ B - 2C = 4, \\ -A + B + C = 0. \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, encontramos

$$A = 1, \quad B = 2, \quad C = -1.$$

Logo,

$$\frac{4x}{(x-1)^2(x+1)} = \frac{1}{x-1} + \frac{2}{(x-1)^2} - \frac{1}{x+1}.$$

Portanto,

$$\int_2^3 \frac{4x}{x^3 - x^2 - x + 1} dx = \int_2^3 \left(\frac{1}{x-1} + \frac{2}{(x-1)^2} - \frac{1}{x+1} \right) dx.$$

Calculando,

$$\int \left(\frac{1}{x-1} + \frac{2}{(x-1)^2} - \frac{1}{x+1} \right) dx = \ln|x-1| - \frac{2}{x-1} - \ln|x+1|.$$

Assim,

$$\int_2^3 \frac{4x}{x^3 - x^2 - x + 1} dx = \left[\ln|x-1| - \frac{2}{x-1} - \ln|x+1| \right]_2^3.$$

Logo,

$$\int_2^3 \frac{4x}{x^3 - x^2 - x + 1} dx = (\ln 2 - 1 - \ln 4) - (0 - 2 - \ln 3).$$

Portanto,

$$\int_2^3 \frac{4x}{x^3 - x^2 - x + 1} dx = 1 + \ln\left(\frac{3}{2}\right).$$

Agora apresentamos a teoria geral para esse caso.

Proposição 4.4. *Sejam $a_1, a_2, \dots, a_n$ números reais não nulos, sejam $b_1, b_2, \dots, b_n$ números reais, e sejam $m_1, m_2, \dots, m_n$ inteiros positivos.*

Suponha que os fatores lineares

$$a_1x + b_1, a_2x + b_2, \dots, a_nx + b_n$$

sejam distintos dois a dois.

Então, para qualquer polinômio $p(x)$ tal que

$$\text{grau}(p) < m_1 + m_2 + \dots + m_n,$$

existe uma única decomposição da forma

$$\frac{p(x)}{(a_1x + b_1)^{m_1}(a_2x + b_2)^{m_2} \cdots (a_nx + b_n)^{m_n}} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{A_{i,1}}{a_ix + b_i} + \frac{A_{i,2}}{(a_ix + b_i)^2} + \cdots + \frac{A_{i,m_i}}{(a_ix + b_i)^{m_i}} \right).$$

onde todas as constantes $A_{i,j}$ são reais.

Exemplo 4.6.3. Considere a integral

$$\int_1^2 \frac{5x^3}{x^4 + x^3} dx.$$

Primeiro, fatoramos o denominador:

$$x^4 + x^3 = x^3(x + 1).$$

Assim, temos

$$\frac{5x^3}{x^4 + x^3} = \frac{5x^3}{x^3(x + 1)}.$$

Como aparece o fator repetido x^3 , a decomposição deve ter a forma

$$\frac{5x^3}{x^3(x + 1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x^3} + \frac{D}{x + 1}.$$

A partir daqui, encontramos as constantes A , B , C e D .

Exemplo 4.6.4. Considere a integral

$$\int_2^3 \frac{3x + 1}{x^3 - 4x^2 + 4x} dx.$$

Primeiro, fatoramos o denominador:

$$x^3 - 4x^2 + 4x = x(x - 2)^2.$$

Como aparece o fator repetido $(x - 2)^2$, a decomposição deve ter a forma

$$\frac{3x + 1}{x(x - 2)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x - 2} + \frac{C}{(x - 2)^2}.$$

A partir daqui, encontramos as constantes A , B e C .

Exemplo 4.6.5. Considere a integral

$$\int_1^2 \frac{x^2 + 1}{x^3 - 3x^2 + 3x - 1} dx.$$

Primeiro, fatoramos o denominador:

$$x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = (x - 1)^3.$$

Como aparece o fator repetido $(x - 1)^3$, a decomposição deve ter a forma

$$\frac{x^2 + 1}{(x - 1)^3} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{(x - 1)^2} + \frac{C}{(x - 1)^3}.$$

A partir daqui, encontramos as constantes A , B e C .

Caso 1.3: $q(x)$ contém fatores quadráticos irredutíveis e nenhum desses fatores se repete.

A expressão “fatores quadráticos irredutíveis” significa que esses polinômios tem grau 2 e não possuem raízes reais.

Exemplo 4.6.6. Calcule

$$\int_1^2 \frac{2x^2 - x + 4}{x^3 + 4x} dx.$$

Primeiro, fatoramos o denominador:

$$x^3 + 4x = x(x^2 + 4).$$

Observe que $x^2 + 4$ é um fator quadrático irredutível, pois

$$x^2 + 4 = 0$$

não possui raízes reais.

Assim, escrevemos

$$\frac{2x^2 - x + 4}{x(x^2 + 4)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2 + 4}.$$

Multiplicando por $x(x^2 + 4)$, obtemos

$$2x^2 - x + 4 = A(x^2 + 4) + x(Bx + C).$$

Logo,

$$2x^2 - x + 4 = (A + B)x^2 + Cx + 4A.$$

Comparando os coeficientes, temos

$$A = 1, \quad C = -1, \quad A + B = 2.$$

Portanto,

$$B = 1.$$

Assim,

$$\frac{2x^2 - x + 4}{x^3 + 4x} = \frac{1}{x} + \frac{x - 1}{x^2 + 4}.$$

Logo,

$$\int_1^2 \frac{2x^2 - x + 4}{x^3 + 4x} dx = \int_1^2 \left(\frac{1}{x} + \frac{x}{x^2 + 4} - \frac{1}{x^2 + 4} \right) dx.$$

Calculando,

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln |x|,$$

$$\int \frac{x}{x^2 + 4} dx = \frac{1}{2} \ln(x^2 + 4),$$

e

$$\int \frac{1}{x^2 + 4} dx = \frac{1}{2} \arctan \left(\frac{x}{2} \right).$$

Portanto,

$$\int \frac{2x^2 - x + 4}{x^3 + 4x} dx = \ln |x| + \frac{1}{2} \ln(x^2 + 4) - \frac{1}{2} \arctan \left(\frac{x}{2} \right).$$

Agora avaliamos de 1 a 2:

$$\int_1^2 \frac{2x^2 - x + 4}{x^3 + 4x} dx = \left[\ln |x| + \frac{1}{2} \ln(x^2 + 4) - \frac{1}{2} \arctan \left(\frac{x}{2} \right) \right]_1^2.$$

Assim,

$$\int_1^2 \frac{2x^2 - x + 4}{x^3 + 4x} dx = \ln 2 + \frac{1}{2} \ln \left(\frac{8}{5} \right) - \frac{1}{2} \left[\arctan(1) - \arctan \left(\frac{1}{2} \right) \right].$$

Proposição 4.5. *Sejam $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$ e $c_1, c_2, \dots, c_n$ números reais, com $a_i \neq 0$, para todo i .*

Suponha que os fatores quadráticos

$$a_1x^2 + b_1x + c_1, a_2x^2 + b_2x + c_2, \dots, a_nx^2 + b_nx + c_n$$

sejam irredutíveis e distintos dois a dois.

Então, para qualquer polinômio $p(x)$ tal que

$$\text{grau}(p) < 2n,$$

existe uma única decomposição da forma

$$\frac{p(x)}{(a_1x^2 + b_1x + c_1)(a_2x^2 + b_2x + c_2) \cdots (a_nx^2 + b_nx + c_n)} = \sum_{i=1}^n \frac{A_ix + B_i}{a_ix^2 + b_ix + c_i},$$

onde todas as constantes A_i e B_i são reais.

Exercício 38

Calcule a integral

$$\int_0^1 \frac{3x^2 + 2x + 1}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)} dx.$$

Caso 1.4: $q(x)$ contém fatores quadráticos irredutíveis e alguns deles se repetem.

Exemplo 4.6.7. *Calcule a integral*

$$\int_1^2 \frac{-x^3 + 2x^2 - x + 1}{x(x^2 + 1)^2} dx.$$

Como o fator quadrático irredutível $x^2 + 1$ aparece repetido, escrevemos

$$\frac{-x^3 + 2x^2 - x + 1}{x(x^2 + 1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2 + 1} + \frac{Dx + E}{(x^2 + 1)^2}.$$

Multiplicando por $x(x^2 + 1)^2$, obtemos

$$-x^3 + 2x^2 - x + 1 = A(x^2 + 1)^2 + x(Bx + C)(x^2 + 1) + x(Dx + E).$$

Expandindo,

$$-x^3 + 2x^2 - x + 1 = A(x^4 + 2x^2 + 1) + (Bx^2 + Cx)(x^2 + 1) + Dx^2 + Ex.$$

Logo,

$$-x^3 + 2x^2 - x + 1 = (A + B)x^4 + Cx^3 + (2A + B + D)x^2 + (C + E)x + A.$$

Comparando os coeficientes, temos

$$A = 1,$$

$$A + B = 0 \Rightarrow B = -1,$$

$$C = -1,$$

$$2A + B + D = 2 \Rightarrow 2 - 1 + D = 2 \Rightarrow D = 1,$$

e

$$C + E = -1 \Rightarrow -1 + E = -1 \Rightarrow E = 0.$$

Portanto,

$$\frac{-x^3 + 2x^2 - x + 1}{x(x^2 + 1)^2} = \frac{1}{x} - \frac{x + 1}{x^2 + 1} + \frac{x}{(x^2 + 1)^2}.$$

Assim,

$$\int_1^2 \frac{-x^3 + 2x^2 - x + 1}{x(x^2 + 1)^2} dx = \int_1^2 \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{x^2 + 1} - \frac{1}{x^2 + 1} + \frac{x}{(x^2 + 1)^2} \right) dx.$$

Calculando,

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x|,$$

$$\int \frac{x}{x^2 + 1} dx = \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1),$$

$$\int \frac{1}{x^2 + 1} dx = \arctan(x),$$

e

$$\int \frac{x}{(x^2 + 1)^2} dx = -\frac{1}{2(x^2 + 1)}.$$

Logo,

$$\int_1^2 \frac{-x^3 + 2x^2 - x + 1}{x(x^2 + 1)^2} dx = \left[\ln|x| - \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) - \arctan(x) - \frac{1}{2(x^2 + 1)} \right]_1^2.$$

Portanto,

$$\int_1^2 \frac{-x^3 + 2x^2 - x + 1}{x(x^2 + 1)^2} dx = \ln 2 - \frac{1}{2} \ln \left(\frac{5}{2} \right) - \arctan(2) + \arctan(1) + \frac{1}{4} - \frac{1}{10}.$$

Ou seja,

$$\int_1^2 \frac{-x^3 + 2x^2 - x + 1}{x(x^2 + 1)^2} dx = \ln 2 - \frac{1}{2} \ln \left(\frac{5}{2} \right) - \arctan(2) + \frac{\pi}{4} + \frac{3}{20}.$$

Proposição 4.6. *Sejam $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$ e $c_1, c_2, \dots, c_n$ números reais, com $a_i \neq 0$, para todo i , e sejam $m_1, m_2, \dots, m_n$ inteiros positivos.*

Suponha que os fatores quadráticos

$$a_1x^2 + b_1x + c_1, a_2x^2 + b_2x + c_2, \dots, a_nx^2 + b_nx + c_n$$

sejam irredutíveis e distintos dois a dois.

Então, para qualquer polinômio $p(x)$ tal que

$$\text{grau}(p) < 2m_1 + 2m_2 + \dots + 2m_n,$$

existe uma única decomposição da forma

$$\begin{aligned} \frac{p(x)}{(a_1x^2 + b_1x + c_1)^{m_1} \dots (a_nx^2 + b_nx + c_n)^{m_n}} = & \sum_{i=1}^n \left(\frac{A_{i,1}x + B_{i,1}}{a_ix^2 + b_ix + c_i} \right. \\ & + \frac{A_{i,2}x + B_{i,2}}{(a_ix^2 + b_ix + c_i)^2} + \dots \\ & \left. + \frac{A_{i,m_i}x + B_{i,m_i}}{(a_ix^2 + b_ix + c_i)^{m_i}} \right), \end{aligned}$$

onde todas as constantes $A_{i,j}$ e $B_{i,j}$ são reais.

Exercício 39

Calcule a integral

$$\int_2^3 \frac{x^2 + 1}{(x^2 + 1)^2} dx.$$

Caso 2: $\text{grau}(p) \geq \text{grau}(q)$

Nesse caso, fazemos a divisão de polinômios:

$$\frac{p(x)}{q(x)} = q_1(x) + \frac{r(x)}{q(x)},$$

onde $\text{grau}(r) < \text{grau}(q)$.

Logo,

$$\int_a^b \frac{p(x)}{q(x)} dx = \int_a^b q_1(x) dx + \int_a^b \frac{r(x)}{q(x)} dx.$$

Assim, a primeira integral é uma integral de polinômio, e a segunda recai no Caso 1.

Exemplo 4.6.8. *Calcule*

$$\int_2^3 \frac{x^3 + 1}{x^3 - x} dx.$$

Como $\text{grau}(x^3 + 1) = \text{grau}(x^3 - x)$,

primeiro fazemos a divisão:

$$\frac{x^3 + 1}{x^3 - x} = 1 + \frac{x + 1}{x^3 - x}.$$

Agora fatoramos o denominador:

$$x^3 - x = x(x^2 - 1) = x(x - 1)(x + 1).$$

Então,

$$\frac{x + 1}{x(x - 1)(x + 1)} = \frac{1}{x(x - 1)}.$$

Decompomos:

$$\frac{1}{x(x - 1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x - 1}.$$

Multiplicando por $x(x - 1)$, temos

$$1 = A(x - 1) + Bx.$$

Logo,

$$1 = (A + B)x - A.$$

Comparando os coeficientes:

$$A + B = 0 \quad e \quad -A = 1.$$

Portanto,

$$A = -1 \quad e \quad B = 1.$$

Assim,

$$\frac{x^3 + 1}{x^3 - x} = 1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x - 1}.$$

Logo,

$$\int_2^3 \frac{x^3 + 1}{x^3 - x} dx = \int_2^3 \left(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x - 1} \right) dx.$$

Calculando,

$$\int_2^3 \frac{x^3 + 1}{x^3 - x} dx = [x - \ln |x| + \ln |x - 1|]_2^3.$$

Portanto,

$$\int_2^3 \frac{x^3 + 1}{x^3 - x} dx = (3 - \ln 3 + \ln 2) - (2 - \ln 2 + \ln 1).$$

Como $\ln 1 = 0$, temos

$$\int_2^3 \frac{x^3 + 1}{x^3 - x} dx = 1 - \ln 3 + 2 \ln 2.$$

Exercício 40

Arme as integrais abaixo de acordo com os casos estudados.

a)

$$\int \frac{2x + 1}{x^2 - 3x + 2} dx$$

b)

$$\int \frac{x^2 + 1}{x(x^2 + 4)} dx$$

c)

$$\int \frac{3x + 2}{(x - 1)^2(x + 2)} dx$$

d)

$$\int \frac{x^2 + 2x + 1}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)} dx$$

e)

$$\int \frac{x^3 + 2x + 1}{x^2 + 1} dx$$

f)

$$\int \frac{2x^4 - x + 3}{x^2(x - 1)} dx$$