Universidade Federal da Bahia
Instituto de Matemática
Departamento de Matemática-UFBA

Notas de aula- Álgebra Linear

Professora Vanessa Barros

Estas notas foram escritas para você que quer aprender Álgebra Linear de maneira informal, sem demonstrações e com muitos exemplos. Espero que você curta ler estas notas do mesmo jeito que me diverti escrevendo-as.

Boa leitura!

Conteúdo

1 Matrizes

Matriz é simplesmente um conjunto de elementos dispostos em linhas e colunas. Por exemplo:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a & 1 & casa \\ 5 & bola & x \end{bmatrix} e \begin{bmatrix} Milena & 18 & 1.6 \\ Lucas & 30 & 1.75 \end{bmatrix}$$

são matrizes com 2 linhas e 3 colunas. Chamamos isso de <u>ordem da matriz</u>. Veja que uma matriz pode conter elementos não numéricos. Mas...pra que serve uma matriz? Bem, pra representar problemas e situações. Podemos imaginar que a terceira matriz do exemplo representa informações sobre Milena e Lucas. Nesse caso só temos duas pessoas então não é muito importante se você usa uma matriz ou não, mas se você estiver trabalhando com um banco de dados de 50 mil pessoas (e portanto teríamos uma matriz com 50 mil linhas e 3 colunas) isso faria uma enorme diferença. Provavelmente você trabalharia com um programa de computador e as matrizes são a linguagem natural dos computadores.

Agora que eu já me convenci de que eu te convenci da razão de existência das matrizes ;), passemos às notações, ou seja, às várias maneiras de se representar uma matriz.

1. No lugar de colchetes, podemos usar parêntesis:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Denotamos as matrizes usando letras maiúsculas:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. Quando queremos nos referir a um elemento específico da matriz usamos a notação a_{ij}. Por exemplo, se eu pedir pra você encontrar o elemento a_{21} da matriz A você deve me responder 5, pois este é o elemento da linha 2 coluna 1 na matriz A.

4. Finalmente para representar uma matriz B com m linhas e n colunas (e portanto uma matriz de ordem m por n) fazemos assim:

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \; ou \; B = [a_{ij}]_{mn}.$$

1.1 Pra que servem as matrizes?

Vou apresentar um problema simples da vida real e veremos que é possível enxergar este mesmo problema usando matrizes, e mais tarde você verá como resolve-lo usando a teoria de matrizes.

Digamos que você está administrando uma loja que só vende maçãs e bananas. Em um determinado dia você vendeu 200 frutas e obteve uma receita (é a grana que você ganhou com as vendas) de 400 reais. Além disso você sabe que o preço de uma maçã é 2 reais e de uma banana 3 reais. A pergunta é quantas bananas e quantas maçãs foram vendidas naquele determinado dia.

O primeiro passo é escrever este problema usando equações

$$\begin{cases} x + y = 200 \\ 2x + 3y = 400 \end{cases}$$

Se você entendeu as equações então provavelmente concordará comigo que x representa o número de maçãs e y o de bananas. É claro que este exemplo é muito simples e que não precisamos de matrizes pra resolve-lo. Mas, assim como no primeiro exemplo de matriz onde tínhamos apenas Milena e Lucas mas poderíamos ter 50 mil pessoas, aqui também poderíamos ter 50 mil frutas e um sistema beeem mais complicado.

O segundo passo (aqui eu vou pedir pra você acreditar em mim pois ainda não falamos de produto de matrizes) é escrever o sistema acima no formato matricial $AX = B$, onde $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ é a matriz dos coeficientes, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ é a matriz das incognitas e $B = \begin{pmatrix} 200 \\ 400 \end{pmatrix}$ é a matriz dos termos independentes.

E tcharaaammm!!! Este é o sistema matricial que nos interessa. Depois nós veremos que este sistema tem uma única solução pois a matriz A tem determinante (vamos ver isto mais tarde) não nulo. E eu nem precisei resolver o sistema;)

1.2 Tipos especiais de matrizes

Matriz coluna é uma matriz que só possui uma coluna (não importa o número de linhas). Na sessão anterior vimos dois exemplos de matriz coluna, a matriz B dos termos independentes e a matriz X das incógnitas.

Matriz linha é uma matriz que só possui uma linha (não importa o número de colunas). Por exemplo, a matriz C abaixo:

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 & 5 & 6 & 0 \end{bmatrix}$$

A matriz quadrada é bem importante na teoria de álgebra linear e vai aparecer muitas vezes nos teoremas. Na sessão anterior, a matriz A dos coeficientes é uma matriz quadrada pois ela possui o mesmo número de linhas e de colunas (no caso da matriz A, 2 linhas e 2 colunas). A matriz D abaixo também é quadrada pois possui 4 linhas e 4 colunas.

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 10 & 11 \\ 12 & 13 & 14 & 15 \end{bmatrix}.$$

Os elementos 0, 5, 10 e 15 da matriz quadrada D são chamados de diagonal principal. Em geral, se você pensa na matriz quadrada como um quadrado, a diagonal principal serão os elementos localizados na diagonal que começa no canto esquerdo superior deste quadrado e termina no canto direito inferior.

Se uma matriz quadrada é tal que todos os seus elementos fora da diagonal principal são nulos, chamamos esta matriz de matriz diagonal. Seguem dois exemplos de matriz diagonal abaixo.

$$E = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 15 \end{bmatrix}, \ O = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Veja que na matriz O os elementos da diagonal principal também são zero. Não há problema nenhum. Aliás, a matriz O se chama <u>matriz nula</u>. No mundo dos números reais ela corresponderia ao elemento zero. Ah! ela não precisa ser quadrada. A matriz nula $\bar{O}$ abaixo tem ordem 3x4. Voltando ao conjunto das matrizes quadradas temos a <u>matriz simétrica</u>. Por exemplo:

$$G = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 6 & 4 \\ 1 & 5 & 0 & 3 \\ 6 & 0 & 10 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 15 \end{bmatrix}, \ \bar{O} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Trace uma linha na diagonal principal de G e observe que há uma simetria entre os números no seguinte sentido. O elemento da linha1 coluna 2, ou seja a_{12} é 1 e o elemento a_{21} também é 1. Analogamente a_{ij}=a_{ji} para o resto da matriz, ou seja a_{13}=a_{31}, ...

Chamamos a matriz quadrada de <u>anti-simétrica</u> se a_{ij}=$-a_{ji}$ para $i \neq j$, por exemplo:

$$H = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 6 & 4 \\ 1 & 5 & 0 & -3 \\ -6 & 0 & 10 & -2 \\ -4 & 3 & 2 & 15 \end{bmatrix}$$

Finalmente temos a <u>matriz identidade</u>. É uma matriz quadrada cujos elementos da diagonal principal são 1 e o resto é zero. No mundo dos reais ela corresponde ao elemento 1. Lembra que 1x2=2,1x3=3? A matriz identidade tem a mesma propriedade. IxA=A. Veremos isso com detalhes mais tarde. Logo abaixo temos as identidades de ordem 2 e 3, respectivamente.

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \ I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1.3 Igualdade de matrizes

Dadas duas matrizes de mesma ordem $A = [a_{ij}]_{mn}$ e $B = [b_{ij}]_{mn}$, dizemos que elas são iguais se $a_{ij} = b_{ij}$ para todo i e j. Por exemplo as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 & 5 & 6 & 0 \\ 3 & 10 & 7 & 9 & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 & 5 & 6 & 0 \\ 3 & 10 & 7 & 9 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

são iguais pois $a_{11} = b_{11}$, $a_{12} = b_{12}$ e assim por diante.

1.4 Operações com matrizes

Assim como no mundo dos números reais, no mundo das matrizes nós podemos somar, subtrair, multiplicar...

Para somar e subtrair precisamos de duas matrizes $A = [a_{ij}]_{mn}$ e $B = [b_{ij}]_{mn}$ de mesma ordem. Para calcular A+B basta somar termo a termo. Análogo com a subtração. Por exemplo, usando as matrizes A e B da sessão anterior temos

$$A + B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 8 & 10 & 12 & 0 \\ 6 & 20 & 14 & 18 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

e

$$A - B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Outra operação possível é multiplicar uma matriz A por um escalar, ou seja, um número real. Vamos usar a mesma matriz A da sessão anterior. A conta é feita assim:

$$-3A = \begin{bmatrix} 0 & -3 & -12 & -15 & -24 & 0 \\ -9 & -30 & -21 & -27 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

Tudo o que eu fiz foi multiplicar -3 por cada elemento de A. No geral dado um número λ e uma matriz $A = [a_{ij}]_{mn}$, o produto de λ por A é $\lambda A = [\lambda a_{ij}]_{mn}$. Veja que com essa definição $1 \cdot A = A$ e $0 \cdot A = O$ (o número zero vezes a matriz A é igual à matriz nula) .

Vou enumerar abaixo algumas propriedades das operações que acabamos de ver. Sejam A, B, C três matrizes de mesma ordem, O é a matriz nula e λ e μ dois números reais. Então:

- A+B=B+A ou seja, a soma de matrizes é comutativa,
- (A+B)+C=A+(B+C). Isso significa que dadas três matrizes você pode efetuar a soma das três de duas maneiras diferentes e o resultado não se altera.
- A+O=O+A=A. Isso é fácil de ver. Pegue uma matriz A e faça a conta.
- A-A=O
- $(\lambda\mu)A = \lambda(\mu A) = \mu(\lambda A)$
- $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$
- $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$

1.5 Matriz transposta

Dada uma matriz $A = [a_{ij}]_{mn}$, a sua matriz transposta, denotada A^t é definida como $[a_{ji}]_{mn}$. Calma! com um exemplo fica mais fácil entender. A transposta da matriz A de 2 linhas e 4 colunas

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -3 & 2 & 5 \\ -9 & 0 & -2 & 7 \end{bmatrix}$$

é

$$A^t = \begin{bmatrix} 0 & -9 \\ -3 & 0 \\ 2 & -2 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$$

de 4 linhas e 2 colunas. Então observe que o elemento $a_{12} = -3$ de A se tornou a_{21} em A^t.

1.6 Produto de matrizes

Vou ensinar essa sessão usando exemplos:

Exemplo 1.6.1. *Vamos começar com duas matrizes quadradas de ordem 2.*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 6 & -1 \end{bmatrix} \ e \ B = \begin{bmatrix} 2 & -9 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$$

$A \times B$ é calculado assim:

- *Pegue a primeira linha de A, a primeira coluna de B e multiplique como segue:* $(0,1)\cdot(2,-3) = 0\cdot 2 + 1\cdot(-3) = -3$. *Se você já fez GA talvez se lembre de produto escalar de vetores. -3 será o elemento a_{11} da matriz resultante.*

- *Pegue a primeira linha de A, a segunda coluna de B e multiplique:* $(0,1)\cdot(-9,0) = 0\cdot(-9) + 1\cdot 0 = 0$. *0 será o elemento a_{12} da matriz resultante. Neste ponto já temos a primeira linha completa da matriz resultante. Agora vamos usar a segunda linha de A e portanto obteremos a segunda linha da matriz resultante.*

- *Segunda linha linha de A, primeira coluna de B:* $(6,-1)\cdot(2,-3) = 6\cdot 2 - 1\cdot(-3) = 15 = a_{21}$.

- *Segunda linha linha de A, segunda coluna de B:* $(6,-1)\cdot(-9,0) = 6\cdot(-9) - 1\cdot 0 = -54 = a_{22}$.

Assim $A \times B = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 15 & -54 \end{bmatrix}$

Recapitulando, você pega a linha i da matriz A e a coluna j da matriz B, multiplica do jeito que fizemos no exemplo e obtém o elemento a_{ij} da matriz resultante.

Como exercício, calcule $B \times A$ e verifique que

$$B \times A = \begin{bmatrix} 2 & -9 \\ -3 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 6 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -54 & 11 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}.$$

Veja que diferentemente de produto de números reais, produto de matrizes NÃO comuta.

Vamos complicar um pouco no próximo exemplo.

Exemplo 1.6.2. *Agora A é uma matriz 2×3 (2 linhas 3 colunas) e B uma matriz 3×4.*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 6 & -1 & 8 \end{bmatrix} \; e \; B = \begin{bmatrix} 1 & -9 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & -2 & 10 \\ 0 & 5 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Para calcular $A \times B$ usamos a mesma regra de antes:

- *Pegue a primeira linha de A, a primeira coluna de B e multiplique:* $(0, 1, 5) \cdot (1, -1, 0) = 0 - 1 + 0 = -1$. *E este será o elemento a_{11} da matriz resultante.*

- *Pegue a primeira linha de A, a segunda coluna de B e multiplique:* $(0, 1, 5) \cdot (-9, 0, 5) = 25$. *É o elemento a_{12} da matriz resultante.*

- *Primeira linha de A e a terceira coluna de B:* $(0, 1, 5) \cdot (2, -2, 0) = -2$. *É o elemento a_{13} da matriz resultante.*

- *Primeira linha de A e a quarta coluna de B: Deixo essa conta como exercício pra você. O resultado é $a_{14} = 15$. Aqui nós já temos a primeira linha completa de $A \times B$.*

- *Agora vamos à segunda linha da matriz resultante. Pegue a segunda linha de A e a primeira coluna de B. Multiplique. O resultado é $a_{21} = 7$.*

- *Seguindo a mesma idéia calcule os outros valores e verifique que $a_{22} = -14$, $a_{23} = 14$ e $a_{24} = 2$.*

Assim $A \times B = \begin{bmatrix} -1 & 25 & -2 & 15 \\ 7 & -14 & 14 & -2 \end{bmatrix}$.

Veja que a matriz resultante tem o mesmo número de linhas de A e o mesmo número de colunas de B.

Aqui eu vou fazer uma observação importante. Será que dá pra calcular $B \times A$? Tente e você verá que não dá. No mundo dos reais 2 x 3 ou 3 x 2 dá no mesmo né? No mundo das matrizes não. Só é possível multiplicar A por B se o número de colunas de A é igual ao número de linhas de B.

Agora que você já entendeu, vamos ver a definição formal e complicada:

Multiplicação de Matrizes: Sejam $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ e $B = [b_{ij}]_{n \times p}$. Definimos $A \times B = [c_{uv}]_{m \times p}$, onde

$$c_{uv} = \sum_{k=1}^{n} a_{uk}b_{kv} = a_{u1}b_{1v} + \cdots + a_{un}b_{nv}.$$

Outra notação usada é simplesmente AB ou então $A \cdot B$ no lugar de $A \times B$.

E aqui estão as <u>Propriedades:</u>

- Em geral, $AB \neq BA$,
- $AI = IA = A$, onde I é a matriz identidade,
- $A(B + C) = AB + AC$, (distributiva à esquerda da multiplicação, em relação à soma),
- $(A + B)C = AC + BC$, (distributiva à direita da multiplicação, em relação à soma),
- $(AB)C = A(BC)$, (associatividade),
- $(AB)^t = B^t A^t$, (transposta do produto)
- $OA = AO = O$, onde O é a matriz nula.

Agora que você já sabe multiplicar matrizes, retorne à sessão 1.1. Você se lembra que nós escrevemos o sistema abaixo no formato matricial?

$$\begin{cases} x + y = 200 \\ 2x + 3y = 400 \end{cases}$$

Pois bem. Vou pagar minha promessa. A equação matricial era esta aqui: $AX = B$, onde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

é a matriz dos coeficientes,

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

é a matriz das incógnitas e

$$B = \begin{pmatrix} 200 \\ 400 \end{pmatrix}$$

é a matriz dos termos independentes. Multiplicando A por X vem:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1x + 1y \\ 2x + 3y \end{pmatrix}$$

Então a igualdade $AX = B$ significa que as matrizes $\begin{pmatrix} 1x + 1y \\ 2x + 3y \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 200 \\ 400 \end{pmatrix}$ são iguais!! Só isso!

1.7 Determinante de matriz

Determinante é uma função que associa a cada matriz quadrada um número real. Assim det:{matrizes quadradas} $\to \mathbb{R}$. Existem duas notações muito usadas. A primeira é det(A) e a outra é $|A|$.

Se a matriz tem ordem 1 ou seja $A = [a_{11}]$ então definimos det (A)=a_{11}. Se a matriz tem ordem 2 ou seja $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ então det (A)=$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$. A partir da ordem 3 a coisa começa a complicar então vamos usar um exemplo.

Exemplo 1.7.1. *Vamos calcular det(A), onde* $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 6 \\ 2 & 5 & 8 \end{bmatrix}$.

Primeiro repetimos as duas primeiras colunas, depois efetuamos duas contas. Na primeira conta, multiplicamos e somamos as 3 diagonais, como no desenho abaixo.

$$\left|\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 6 \\ 2 & 5 & 8 \end{array}\right| \begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 2 & 5 \\ 2 & 5 \end{array}$$

Então, seguindo a flecha e suas paralelas, a primeira conta fica assim:

$1 \times 5 \times 8 + 2 \times 6 \times 2 + 3 \times 2 \times 5 = 94.$

A segunda conta é parecida com a primeira só que é efetuada com as outras 3 diagonais: $3 \times 5 \times 2 + 1 \times 6 \times 5 + 2 \times 2 \times 8 = 92$.

No final fazemos primeira conta - segunda conta = 94 - 92 = 2. E este é det(A).

A regra geral é esta aqui:

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{32}a_{21}$$
$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

Agora vamos apresentar o caso geral: Usaremos o teorema de Laplace, que serve para uma matriz de qualquer ordem, inclusive ordem 1, 2 e 3. Vamos começar com um exemplo de matriz 4x4.

Exemplo 1.7.2. *Vamos calcular o determinante da seguinte matriz* 4×4 *usando a expansão por cofatores (Laplace):*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

O primeiro passo é escolher uma linha ou uma coluna da matriz. A escolha mais inteligente é a linha ou coluna que contém mais zeros. Você vai entender o porquê já já. Escolhemos expandir pela ***terceira linha****, que contém dois zeros, o que simplifica os cálculos, pois os cofatores associados às posições com zeros serão zero.*

A terceira linha é $[0, 1, 4, 0]$*, e a fórmula de Laplace é:*

$$\det(A) = a_{31}C_{31} + a_{32}C_{32} + a_{33}C_{33} + a_{34}C_{34}$$

O cofator $C_{31} = (-1)^{3+1}$ *vezes o determinante da matriz obtida removendo a* ***terceira linha*** *e a* ***primeira coluna*** *da matriz A:*

$$C_{31} = (-1)^{3+1} \det \begin{bmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 5 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Analogamente o cofator $C_{32} = (-1)^{3+2}$ *vezes o determinante da matriz obtida removendo a* ***terceira linha*** *e a* ***segunda coluna*** *da matriz* A *e assim por diante.*

Substituindo os valores dos elementos da terceira linha vem:

$$\det(A) = 0 \cdot C_{31} + 1 \cdot C_{32} + 4 \cdot C_{33} + 0 \cdot C_{34}$$

É neste ponto que você percebe porque escolhemos a linha com mais zeros. Portanto, temos:

$$\det(A) = 1 \cdot C_{32} + 4 \cdot C_{33}$$

Agora, vamos calcular os cofatores C_{32} *e* C_{33}.

Cálculo de C_{32}

O cofator C_{32} =$(-1)^{3+2}\times$ *determinante da matriz* 3×3 *obtida ao remover a terceira linha e a segunda coluna de A:*

$$C_{32} = (-1)^{3+2} \det \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Calculamos o determinante da matriz 3×3 *usando aquela regra prática das diagonais que acabamos de ver:*

$$\det \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} = -3$$

Portanto:

$$C_{32} = (-1)^5 \cdot (-3) = 3$$

Cálculo de C_{33}

O cofator C_{33} *=*$(-1)^{3+3}\times$ *determinante da matriz* 3×3 *obtida ao remover a terceira linha e a terceira coluna de A:*

$$C_{33} = (-1)^{3+3}\det\begin{bmatrix}2 & 0 & 4\\1 & 5 & 2\\0 & 3 & 1\end{bmatrix}$$

Calculamos o determinante da matriz 3×3

$$\det\begin{bmatrix}2 & 0 & 4\\1 & 5 & 2\\0 & 3 & 1\end{bmatrix} = 10$$

Portanto:

$$C_{33} = 10$$

Cálculo final do determinante:

Agora podemos substituir os valores dos cofatores C_{32} *e* C_{33} *na expressão do determinante:*

$$\det(A) = 1\cdot 3 + 4\cdot 10 = 3 + 40 = 43$$

Portanto, o determinante da matriz A é:

$$\boxed{\det(A) = 43}.$$

Vamos ver se você entendeu mesmo. Tente calcular o det(A) usando a primeira coluna. O resultado tem que dar 43!

A fórmula geral é a seguinte. Se você fixar a linha i da Matriz quadrada A de ordem n então o det(A) é dado por:

$$\det(A) = a_{i,1}C_{i,1} + a_{i,2}C_{i,2} + \cdots + a_{i,n}C_{i,n}.$$

Se você fixar a coluna j da Matriz quadrada A de ordem n então o det(A) é dado por:

$$\det(A) = a_{1,j}C_{1,j} + a_{2,j}C_{2,j} + \cdots + a_{n,j}C_{n,j}.$$

E os cofatores você calcula usando a mesma fórmula do exemplo.

Agora vamos ver as propriedades de determinante de matrizes:

- O determinante da matriz identidade é sempre igual a 1:

$$|I_n| = 1;$$

- O determinante de uma matriz é igual ao determinante da sua transposta:

$$|A| = |A^t|;$$

- O determinante do produto de matrizes quadradas de mesma ordem é o produto dos determinantes (Teorema de Binet):

$$|AB| = |A||B|;$$

- O determinante da multiplicação de um escalar λ por uma matriz quadrada de ordem n é igual a esse escalar elevado a n, vezes o determinante dessa matriz:

$$|\lambda A| = \lambda^n |A|;$$

  onde n é a ordem da matriz A. Vamos ilustrar com uma matriz A de ordem 2:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

  O determinante de A é:

$$\det(A) = (2 \times 4) - (3 \times 1) = 8 - 3 = 5$$

  Agora, multiplicando a matriz A por um escalar λ:

$$\lambda A = \begin{bmatrix} \lambda \times 2 & \lambda \times 3 \\ \lambda \times 1 & \lambda \times 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\lambda & 3\lambda \\ \lambda & 4\lambda \end{bmatrix}$$

  O determinante de λA é:

$$\det(\lambda A) = (2\lambda \times 4\lambda) - (3\lambda \times \lambda) = 8\lambda^2 - 3\lambda^2 = 5\lambda^2 = \lambda^2 \det(A).$$

- Se uma fila (linha ou coluna) da matriz A é composta de zeros, então:

$$|A| = 0;$$

- Se uma fila (linha ou coluna) de uma matriz A é multiplicada por um escalar λ, então o determinante da nova matriz é igual ao determinante de A multiplicado por λ:

$$|A_{\text{nova}}| = \lambda |A|;$$

  Por exemplo

$$\det \begin{bmatrix} 6 & 0 & 12 \\ 1 & 5 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} = 3 \det \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 1 & 5 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix},$$

  pois $(6, 0, 12) = 3(2, 0, 4)$.

- Se duas linhas (ou colunas) de A são permutadas, então o determinante da nova matriz é:

$$-|A|;$$

  Por exemplo

$$\det \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 1 & 5 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} = -\det \begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 2 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix},$$

  As linhas que você está trocando não precisam ser consecutivas!

- Se A tem duas linhas (ou colunas) iguais, então:

$$|A| = 0;$$

  Aqui, de novo, as linhas iguais não precisam ser consecutivas!

- O determinante de uma matriz diagonal é simplesmente o produto dos elementos da diagonal principal.

Antes de terminar esta sessão vou deixar um exercício pra você. Vimos que o determinante do produto é o produto dos determinantes. **Isto não é verdade para a soma**. Tome por exemplo as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},$$

calcule $\det(A)$, $\det(B)$ e $\det(A+B)$. Você verá que a soma dos dois primeiros termos não dá o terceiro.

1.8 Inversa de matriz

Uma matriz quadrada A de ordem n é dita invertível (ou não singular) quando existe outra matriz quadrada de ordem n, denotada A^{-1} tal que $A^{-1} \cdot A = I_n$ e $A \cdot A^{-1} = I_n$ onde I_n é a matriz identidade de ordem n. Mas será que toda matriz quadrada tem uma inversa? NÃO. Por exemplo $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ não tem inversa. Sabe como eu sei? usei o seguinte teorema:

Teorema 1.8.1. *A matriz quadrada A tem inversa se e somente se* $\det(A) \neq 0$.

E nós já vimos que uma matriz A que possui uma linha inteira composta por zeros tem determinante nulo. Portanto a matriz A acima não tem inversa.

O se e somente se do teorema nos diz duas coisas. Se uma matriz A tem det(A) diferente de zero então ela tem inversa e se det(A) é igual a zero então A não tem inversa.

1.8.1 Como encontrar a matriz inversa?

Vou te ensinar duas maneiras para encontrar a matriz inversa. A primeira é usando a definição. Vamos aprender com um exemplo.

Exemplo 1.8.1. *Considere a matriz A:*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$\det(A) = 4 - 6 \neq 0$ *então sabemos que a inversa de A existe e é uma matriz* 2×2*:*

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

Por definição $A \times A^{-1} = I_2$ *logo*

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A equação matricial acima implica o seguinte sistema de equações:

$$\begin{aligned}
1 \cdot a + 2 \cdot c = 1 \quad & \textit{(primeira linha de } A \times \textit{ primeira coluna de } A^{-1}\textit{)} \\
1 \cdot b + 2 \cdot d = 0 \quad & \textit{(primeira linha de } A \times \textit{ segunda coluna de } A^{-1}\textit{)} \\
3 \cdot a + 4 \cdot c = 0 \quad & \textit{(segunda linha de } A \times \textit{ primeira coluna de } A^{-1}\textit{)} \\
3 \cdot b + 4 \cdot d = 1 \quad & \textit{(segunda linha de } A \times \textit{ segunda coluna de } A^{-1}\textit{)}
\end{aligned}$$

Resolvendo o sistema vem:

$$a = -2,\ b = 1,\ c = \frac{3}{2}, d = -\frac{1}{2}.$$

Portanto, a matriz candidata a inversa de A é:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Digo "candidata"porque ainda falta verificar a outra equação: $A^{-1} \times A = I_2$.
Vamos fazer a multiplicação:

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-2 \cdot 1 + 1 \cdot 3) & (-2 \cdot 2 + 1 \cdot 4) \\ \left(\frac{3}{2} \cdot 1 + -\frac{1}{2} \cdot 3\right) & \left(\frac{3}{2} \cdot 2 + -\frac{1}{2} \cdot 4\right) \end{bmatrix}$$

Fazendo as contas:

$$= \begin{bmatrix} -2 + 3 & -4 + 4 \\ \frac{3}{2} - \frac{3}{2} & 3 - 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2$$

Portanto, verificamos que:

$$A^{-1} \times A = I_2$$

Assim, concluímos por definição, que a matriz inversa de A é de fato:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Essa maneira de calcular a inversa pode ser bastante complicada. Imagine se A fosse uma matriz 4x4. Você teria um sistema com 4 equações e 4 incógnitas pra resolver...

A segunda maneira usa algumas operações sobre a matriz A a ser invertida. Elas se chamam <u>operações elementares</u>. Essas operações também poderiam ser definidas, de forma análoga, sobre as colunas da matriz. Aqui só usaremos operações elementares aplicadas às linhas então nós nos referiremos a elas, simplesmente, como operações elementares (e não operações elementares sobre as linhas da matriz).

1. Permutar duas linhas de A. Indicamos a troca das linhas L_i e L_j por $L_i \leftrightarrow L_j$. Para ilustrar vamos realizar $L_1 \leftrightarrow L_2$ na matriz $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$. Depois da permuta ela ficaria assim: $\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$.
2. Multiplicar uma linha de A por um número real não nulo. Indicamos que multiplicamos a linha L_i de A pelo número real λ escrevendo $L_i \to \lambda L_i$. Vamos realizar $L_1 \to -2L_1$ na matriz $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$. Depois da operação ela ficaria assim: $\begin{bmatrix} -2 & -4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$.
3. Somamos a uma linha de A uma outra linha, multiplicada por um número real. Indicamos que somamos à linha L_i a linha L_j multiplicada pelo número real λ por: $L_i \to L_i + \lambda L_j$. Vamos realizar $L_2 \to L_2 - 3L_1$na matriz $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$. Depois da operação ela ficaria assim: $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 - 3 \cdot 1 & 4 - 3 \cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$.

Vou usar o exemplo abaixo para te ensinar o segundo método:
Exemplo 1.8.2. *Encontrar a inversa de A. Eu deixo você verificar que A*

de fato possui inversa.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ 4 & 2 & -5 \end{bmatrix}$$

O primeiro passo é escrever a matriz A, traçar uma barra vertical e depois escrever a matriz identidade. No nosso exemplo será I_3 pois A é 3×3. Depois ***olhamos para o elemento a_{11} da nossa matriz A, que neste caso é 3, e usando as operações elementares, transformamos a_{11} em 1****. Eu vou trocar L_2 com L_1 e depois vou multiplicar L_1 por -1. Assim:*

$$\left.\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & -5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right. \quad L_2 \leftrightarrow L_1$$

$$\left.\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & -5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right. \quad L_1 \to -L_1$$

$$\left.\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -3 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & -5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right. \quad \textit{Pronto! } a_{11} = 1$$

Observe que cada passo executado na matriz A foi, ao mesmo tempo, executado na matriz identidade.

Agora o segundo passo: ***zerar todos os elementos abaixo de a_{11}.*** *Então, primeiro vou fazer $L_2 \to L_2 - 3L_1$ para transformar a_{21} em zero. Depois, farei $L_3 \to L_3 - 4L_1$ para transformar a_{31} em zero:*

$$\left.\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -3 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & -5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right. \quad L_2 \to L_2 - 3L_1$$

$$\left.\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 11 & 1 & 3 & 0 \\ 4 & 2 & -5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right. \quad L_3 \to L_3 - 4L_1$$

$$\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 11 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 7 & 0 & 4 & 1 \end{array}$$

E mais uma vez missão cumprida!

*Terceiro passo, **transformar** a_{22} **em 1**. Aqui não precisamos fazer nada pois já temos $a_{22} = 1$. Agora é **zerar** a_{12} **(também já está!)** **e** a_{32}. Fazendo $L_3 \to L_3 - 2L_2$ obteremos $a_{32} = 0$.*

$$\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 11 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 7 & 0 & 4 & 1 \end{array} \quad L_3 \to L_3 - 2L_2$$

$$\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 11 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -15 & -2 & -2 & 1 \end{array} \quad \textit{Falta pouco!}$$

*Quarto e último passo, **transformar** a_{33} **em 1**. Depois é **zerar** a_{23} **e** a_{13}. Fazendo $L_3 \to \frac{L_3}{-15}$ obteremos $a_{33} = 1$.*

$$\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 11 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -15 & -2 & -2 & 1 \end{array} \quad L_3 \to \frac{L_3}{-15}$$

$$\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 11 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2/15 & 2/15 & -1/15 \end{array}$$

Agora fazemos $a_{13} = 0$ e $a_{23} = 0$.

$$\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 11 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{15} & \frac{2}{15} & -\frac{1}{15} \end{array} \quad L_1 \to L_1 + 3L_3$$

$$\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{6}{15} & \frac{-9}{15} & -\frac{3}{15} \\ 0 & 1 & 11 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{15} & \frac{2}{15} & -\frac{1}{15} \end{array} \quad L_2 \to L_2 - 11L_3$$

$$\left.\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{6}{15} & -\frac{9}{15} & -\frac{3}{15} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{15} & \frac{23}{15} & \frac{11}{15} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{15} & \frac{2}{15} & -\frac{1}{15} \end{array}\right.$$

E agora que a matriz do lado esquerdo virou a identidade, a matriz do lado direito é a inversa de A!!

Assim,

$$A^{-1} = \frac{1}{15}\begin{bmatrix} 6 & -9 & -3 \\ -7 & 23 & 11 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Eu sugiro que você siga os passos exatamente na ordem que eu citei no exemplo. $a_{11} = 1$, depois zera a coluna embaixo do a_{11}, depois $a_{22} = 1$, zera a coluna do a_{22}... tente fazer numa ordem diferente e você entenderá porque;)

O teorema abaixo nos assegura o nosso segundo método:

Teorema 1.8.2. *Se a matriz quadrada A de ordem n é invertível então é possível transforma-la na matriz I_n usando as operações elementares. Além disso, a mesma sucessão de operações elementares que transformam A em I_n, transformam I_n na inversa de A.*

Agora é a sua vez. Encontre a inversa de $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$.

Como eu sou gente boa vou deixar a resposta pra você conferir:

$A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$.

Agora seguem as <u>propriedades</u> de inversão de matrizes:

- $(A^{-1})^{-1} = A$. Isso quer dizer que a inversa da inversa de A é a própria A. Faz sentido?
- Agora veja como calcular a inversa do produto: $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$. Veja que do lado esquerdo da igualdade é AB e do lado direito a inversa de B vem primeiro. Lembre-se que no mundo das matrizes a ordem do produto importa!
- Por último o determinante da inversa: $\det(A^{-1}) = 1/\det(A)$.

1.9 Usando matrizes para resolver sistemas de equações lineares

O primeiro passo para se resolver sistemas de equações lineares usando teoria de matrizes é escrever o sistema no formato matricial $AX = B$. A é a matriz dos coeficientes, X é uma matriz coluna chamada de matriz das incógnitas e B é outra matriz coluna chamada de matriz dos termos independentes.

Vou te ensinar dois métodos pra resolver esse sistema usando matrizes. O primeiro método é usando matriz inversa. Esse método tem dois pontos negativos. O primeiro é que o número de equações do sistema deve ser igual ao número de incógnitas (ou seja, a matriz A tem que ser quadrada). O segundo ponto é que A deve ser invertível. Se tudo isso acontecer então a solução do sistema $AX = B$ é $X = A^{-1}B$. De fato,

$$AX = B \Rightarrow A^{-1}AX = A^{-1}B.$$

Peraí!! Vamos abrir um parêntesis aqui. Quando você resolve $2x = 4$ dizendo que $x = 2$, na verdade o que você está fazendo é

$$2x = 4 \Rightarrow \frac{1}{2}2x = \frac{1}{2}4 \Rightarrow 1x = 2 \Rightarrow x = 2.$$

Então você usou a inversa multiplicativa de 2, que é 1/2, pra resolver o sistema. É a mesma idéia que eu fiz com a minha matriz A, só que eu multipliquei pela inversa de A, já que estamos no mundo das matrizes aqui.

Muito bem! Continuando as contas, já sabemos que $A^{-1}A$ =matriz Identidade e que a identidade $\times$ qualquer matriz = qualquer matriz né? Então supondo que A tem ordem n:

$$A^{-1}AX = A^{-1}B \Rightarrow I_nX = A^{-1}B \Rightarrow X = A^{-1}B.$$

Acabou;) Fixe na sua memória a igualdade

$$\boxed{X = A^{-1}B}.$$

Vamos usar aquele exemplo da sessão 1.1. Eu sei, eu sei. Aquele sistema é simples de resolver e você não precisa de matrizes. Mas ele poderia ter 4 equações e 4 incógnitas e nesse caso você ficaria feliz em conhecer matrizes.

Relembrando, o sistema

$$\begin{cases} x + y = 200 \\ 2x + 3y = 400 \end{cases}$$

Na sessão 1.6 nós vimos como reescreve-lo na forma $AX = B$, onde

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ é a matriz dos coeficientes, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ é a matriz das incógnitas e $B = \begin{pmatrix} 200 \\ 400 \end{pmatrix}$ é a matriz dos termos independentes.

Na sessão 1.8.1 você já provou que a inversa de A é $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

então usando a fórmula acima que você já memorizou temos

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 200 \\ 400 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 200 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Revise a sessão 1.1 e você verá que x=numero de maçãs vendidas e y=número de bananas vendidas. Logo a resposta ao problema proposto naquela sessão é: no dia tal foram vendidas 200 maçãs e 0 bananas.

Sua vez. Prove que a solução do sistema

$$\begin{cases} 3x + 4y = 25 \\ 2x + 3y = 18 \end{cases}$$

é $x = 3$ e $y = 4$ usando o método que acabamos de ver. Não se esqueça de verificar que a matriz dos coeficientes tem inversa!

Vamos ao segundo método?

Suponhamos que a matriz A dos coeficientes não é quadrada ou então que ela não tem inversa e portanto não dá pra usar o método da inversa. Solução:método de Gauss-Jordan . O método de Gauss-Jordan consiste em aplicar operações elementares de linha para transformar a matriz aumentada (explico já o que é isso) de um sistema linear mais simples. Abaixo, veremos um exemplo utilizando uma matriz 3×3.

Considere o seguinte sistema de equações lineares:

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ 2x + 3y + z = 11 \\ x + 2y + 3z = 13 \end{cases}$$

Primeiro passo? $AX = B$, lembra? Aqui $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ é a matriz dos coeficientes, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ é a matriz das incógnitas e $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 11 \\ 13 \end{pmatrix}$ é a matriz dos termos independentes.

No método de Gauss-Jordan o segundo passo é montar a matriz aumentada do sistema. A matriz aumentada é simplesmente a matriz A, uma barra vertical e a matriz B, como abaixo. A barra vertical serve pra você não esquecer que estamos trabalhando com duas matrizes aqui.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 11 \\ 1 & 2 & 3 & 13 \end{array}\right]$$

É nesta matriz que vamos aplicar as operações elementares de linha para simplificar o sistema. Você vai ver que não tem nada de novo aqui. Se parece muito com a técnica de encontrar a matriz inversa da sessão 1.8.1.

Passo 1: Fazer a_{11}=1 depois zerar a coluna abaixo do a_{11}. Como já temos a_{11}=1, vamos direto ao passo de zerar a_{21} e a_{31}. Para isso, subtraímos 2 vezes a primeira linha da segunda linha e subtraímos a primeira linha da terceira linha:

$$L_2 \to L_2 - 2L_1 \quad \text{e} \quad L_3 \to L_3 - L_1$$

A matriz resultante é:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 7 \end{array}\right]$$

Passo 2: Fazer a_{22}=1 e depois zerar os elementos apenas abaixo do elemento a_{22}. Como já temos a_{22}=1, vamos direto ao passo de zerar a_{31}. Para isso, subtraímos a segunda linha da terceira linha:

$$L_3 \to L_3 - L_2$$

Obtemos a matriz:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 8 \end{array}\right]$$

Passo 3: Fazer com que a_{33} seja 1. Dividimos a terceira linha por 3:

$$L_3 \to \frac{L_3}{3}$$

A matriz se torna:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{8}{3} \end{array}\right]$$

Prontinho! Agora vamos retornar ao sistema usando esta última matriz, ou seja,

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ y - z = -1 \\ z = 8/3 \end{cases}$$

Você concorda que esse último sistema é muito mais fácil de se resolver do que o sistema original?

A solução do sistema fica assim:

$$(x, y, z) = \left(\frac{5}{3}, \frac{5}{3}, \frac{8}{3}\right)$$

Aqui eu tenho uma perguntinha. Depois de mexer tanto na matriz aumentada e tornar o sistema original num outro sistema (mais simples, ok, mas diferente do original), quem garante que você preserva as soluções, ou seja, quem garante que as soluções do segundo sistema são as mesmas do sistema original, aquele que a gente realmente quer resolver? Tem um teorema que garante que as operações elementares não alteram as soluções, então você pode ficar tranquilo!! Você pode até fazer um teste. Pegue a solução que a gente encontrou e substitua no sistema original.

Vamos resolver mais um exemplo. Dessa vez a matriz A não será quadrada.

$$\begin{cases} x + 2y - z + w = -3 \\ 2x + 4y - 2z + 3w = -7 \\ -3x - 6y + 2z - w = 6 \end{cases}$$

Escrevemos o sistema na sua forma matricial:

$AX = B$, onde $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 & 3 \\ -3 & -6 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ é a matriz dos coeficientes, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}$ é a matriz das incógnitas e $B = \begin{pmatrix} -3 \\ -7 \\ 6 \end{pmatrix}$ é a matriz dos termos independentes.

A matriz aumentada correspondente ao sistema é:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & -3 \\ 2 & 4 & -2 & 3 & -7 \\ -3 & -6 & 2 & -1 & 6 \end{array}\right]$$

Aplicamos o método de Gauss-Jordan, realizando as operações elementares de linha.

Passo 1: Fazer com que a_{11} seja 1 (ele já é 1). Zerar os elementos abaixo de a_{11} usando operações de linha:

$$L_2 \to L_2 - 2L_1 \quad \text{e} \quad L_3 \to L_3 + 3L_1$$

A matriz resultante é:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -3 \end{array}\right]$$

Passo 2: O próximo passo seria fazer $a_{22} = 1$. Mas $a_{22} = 0$ e qualquer operação que eu faça pra transforma-lo em 1 vai desfazer o passo anterior. Então seguimos adiante, ou seja zerar a coluna apenas abaixo do a_{22}. Também não tem o que fazer aqui, então seguimos adiante com a conta ou seja, fazer com que a_{33} seja 1, multiplicando a terceira linha por -1:

$$L_3 \to -L_3$$

A matriz se torna:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 3 \end{array}\right]$$

Aqui a gente já pode parar já que não tem elementos abaixo de a_{33} pra zerar nem a_{44} pra tornar 1.

Vamos retornar ao sistema usando esta última matriz, ou seja,

$$\begin{cases} x + 2y - z + w = -3 \\ w = -1 \\ z - 2w = 3 \end{cases}$$

Usando as duas últimas equações obtemos $z = 1, \quad w = -1$, e substituindo estes valores na primeira equação:

$$z = 1, \quad w = -1, \quad x + 2y = -1.$$

Isso quer dizer que o nosso sistema possui infinitas soluções. Quer ver como eu sei disso?

Fazendo $x = 0$ obtemos um conjunto solução (você pode testar):

$$x = 0 \Rightarrow z = 1, \quad w = -1, \quad y = -1/2.$$

Fazendo $x = -1$ obtemos outro conjunto solução

$$x = -1 \Rightarrow z = 1, \quad w = -1, \quad y = 0.$$

Essa brincadeira pode continuar até o infinito...Temos infinitas soluções. Esse tipo de sistema é chamado de <u>indeterminado.</u> Aliás, este é o tema da próxima sessão;)

1.10 Classificação de um sistema linear quanto à solução

Um sistema linear pode ter ou não solução. Se tem solução, pode ter uma só ou mais de uma. Podemos, então, classificar um sistema linear, quanto à existência e quantidade de soluções, em três tipos:

- **Compatível (ou possível) e determinado:** quando possui uma única solução.
- **Compatível e indeterminado:** quando possui mais de uma solução. Na verdade aqui poderíamos dizer infinitas soluções. Tem um teorema que garante que um sistema linear que possui mais de uma solução, na verdade possui infinitas soluções.
- **Incompatível (ou impossível):** quando não possui solução.

<u>Três exemplos de sistemas lineares e suas classificações:</u>

1. O sistema
$$\begin{cases} x + y = 3 \\ x - y = 1 \end{cases}$$
possui uma única solução: o par $(2, 1)$. Este é um sistema determinado.

2. O sistema
$$\begin{cases} x + y = 3 \\ 2x + 2y = 6 \end{cases}$$
possui mais de uma solução. Os pares $(1, 2), (0, 3), (3, 0), (2, 1), \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$ são algumas delas. Este é o exemplo de um sistema indeterminado.

3. O sistema
$$\begin{cases} x + y = 3 \\ x + y = 4 \end{cases}$$
não possui solução (A soma de dois números reais é única!). Este sistema é incompatível.

É claro que estes sistemas foram fáceis de resolver e classificar. Agora imagine uma matriz A quadrada de ordem 50;)

O primeiro passo pra tentar classificar um sistema é olhar para a matriz A das incógnitas. Se ela for quadrada, veja se ela é invertível ou não. A esta altura do campeonato você já sabe que basta calcular o determinante. Se $\det(A) \neq 0$, bingo! Esse sistema é determinado e você pode encontrar a solução com o método das inversas. Senão, precisamos continuar investigando pois ou o sistema terá infinitas soluções ou ele será incompatível.

Eu vou enunciar essa conversa como um teorema pra você não esquecer!
Teorema 1.10.1. *Seja $AX = B$ a forma matricial de um sistema de equações lineares.*

- *Se a matriz A for quadrada de ordem n e invertível então o sistema é determinado e sua solução é $X = A^{-1}B$.*
- *Se a matriz A for quadrada de ordem n e não invertível então o sistema é indeterminado ou incompatível. Pra saber se é um ou outro você precisará investigar melhor o sistema, por exemplo, usando Gauss-Jordan.*

Professora, e se a matriz A não for quadrada? Vai ter que investigar também. Gauss-Jordan.

2 Espaços Vetoriais

Antes de te apresentar a definição (e te assustar) vou começar com um exemplo de espaço vetorial que você já conhece, o $\mathbb{R}^2$. Lembre-se que

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y), x, y \in \mathbb{R}\}.$$

Você já sabe como se faz pra somar dois vetores do $\mathbb{R}^2$, por exemplo $(1,2)+(3,4) = (4,6)$ e também já sabe multiplicar um vetor do $\mathbb{R}^2$ por um número real, por exemplo $-3(1,2) = (-2,-6)$. Pronto! Espaço vetorial é isso. Um conjunto onde está bem definida a soma de seus elementos e o produto de seus elementos por um número real. Além disso, essa soma e esse produto devem obedecer a algumas regras. Veremos mais abaixo na definição formal:

Um **espaço vetorial real** E é um conjunto não vazio de elementos (chamados vetores) em que estão definidas duas operações:

- uma **adição**, que associa a cada par de vetores $u, v \in E$ um vetor $u + v \in E$;
- uma **multiplicação por escalar**, que associa a cada vetor $u \in E$ e a cada número real $\alpha \in \mathbb{R}$ um vetor $\alpha u \in E$.

Essas operações devem satisfazer as seguintes propriedades ($u,\ v,\ w \in E$ e $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$):

1. $u + v = v + u$ (comutatividade da adição);
2. $(u + v) + w = u + (v + w)$ e $\alpha(\beta u) = (\alpha\beta)u$ (associatividade);
3. Existe um vetor nulo $0 \in E$ tal que $u + 0 = u$ para todo $u \in E$;
4. Para cada $u \in E$, existe um vetor $-u \in E$ tal que $u+(-u) = 0$ (inverso aditivo);
5. $\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$ e $(\alpha + \beta)u = \alpha u + \beta u$ (distributividade);
6. $1 \cdot u = u$ para todo $u \in E$ (o número real 1 vezes o vetor u é igual ao vetor u).

Agora revise cada uma das 6 regrinhas e verifique que o $\mathbb{R}^2$ é de fato um espaço vetorial. Outros exemplos de espaços vetoriais:

- O conjunto $\mathbb{R}^3$, com os vetores representados por (x, y, z) onde $x, y, z \in \mathbb{R}$. Analogamente o $\mathbb{R}^n$ é um espaço vetorial para qualquer n natural.

- O conjunto das **matrizes quadradas de ordem** 2 com entradas reais, denotado por $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \text{onde } a, b, c, d \in \mathbb{R}.$$

  Lembra como se faz pra somar duas matrizes? E pra multiplicar uma matriz por um número real? já vimos isso. Analogamente o conjunto das matrizes de ordem m por n $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ também é um espaço vetorial.

- O conjunto dos **polinômios de grau menor ou igual a 3** com coeficientes reais, denotado por $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$. Os elementos de $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ são assim:

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3, \quad \text{onde } a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}.$$

  Dois exemplos concretos: $p_1(x) = 4x^3 + 5x^2$ e $p_2(x) = -2x^2 + 5$. Veja que dá pra somar p_1 e p_2 : $p_1(x)+p_2(x) = 4x^3+3x^2+5$ e também dá pra multiplicar os elementos de $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ por um número real, por exemplo, $2p_1(x) = 8x^3 + 10x^2$. Eu deixo você verificar aquelas 6 regrinhas de espaço vetorial.

Agora vou fazer uma pequena modificação no espaço $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$. Considere o conjunto dos **polinômios de grau igual a 3** com coeficientes reais, denotado por $\tilde{\mathbb{P}}^3(\mathbb{R})$. Veja que $p_1 \in \tilde{\mathbb{P}}^3(\mathbb{R})$ mas p_2 já não pertence. Você consegue ver que este novo espaço não é um espaço vetorial? Vou deixar você pensar...

Veja também que $\tilde{\mathbb{P}}^3(\mathbb{R})$ está contido no espaço $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$. Então, dado um espaço vetorial E e um subconjunto F desse espaço vetorial não temos nenhuma garantia de que este subconjunto ainda será um espaço vetorial. Ele pode ser ou não (foi o caso de $\tilde{\mathbb{P}}^3(\mathbb{R})$).

Quando um subconjunto F de um espaço vetorial E ainda é um espaço vetorial, dizemos que ele é um subespaço vetorial do espaço vetorial E.

Segue um exemplo de subespaço vetorial. Seja $E = \mathbb{R}^2$ e seja

$$F = \{\beta(1, 1), \beta \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2.$$

Veja que F é a reta $y = x$, ou seja, outra maneira de escrever F seria assim:

$$F = \{(x, y), x = y,\ x, y \in \mathbb{R}\}.$$

F é um subconjunto do $\mathbb{R}^2$ que ainda preserva a estrutura de espaço vetorial. Mas professora, pra provar que um subconjunto é um subespaço vetorial eu tenho que provar todas aquelas 6 propriedades pra F, sendo que eu já provei tudinho pra E (e isso me levou um tempo danado)? Não! tem um teorema que facilita a sua vida:

Teorema 2.1 (Condições para um Subespaço Vetorial)**.** *Seja E um espaço vetorial e $F \subseteq E$ um subconjunto. Então, F é um subespaço vetorial de E se, e somente se, as seguintes condições são satisfeitas:*

1. *O vetor nulo de E pertence a F;*
2. *Se $u, v \in F$, então $u + v \in F$ (fechamento em relação à adição);*
3. *Se $u \in F$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, então $\alpha u \in F$ (fechamento em relação à multiplicação por escalar).*

Essas três condições garantem que F é um subespaço vetorial de E.

Agora usando este teorema veremos que $F = \{\beta(1, 1), \beta \in \mathbb{R}\}$ é um subespaço do $\mathbb{R}^2$. Isso será feito em sala de aula.

Um exemplo um pouco mais complicado de espaço vetorial são as funções contínuas denotado por $C^0(\mathbb{R})$. Você se lembra o que é uma função contínua?Veremos em sala de aula...

Vamos fazer um exercício pra você absorver melhor a noção de subespaço vetorial.

Exercício 1

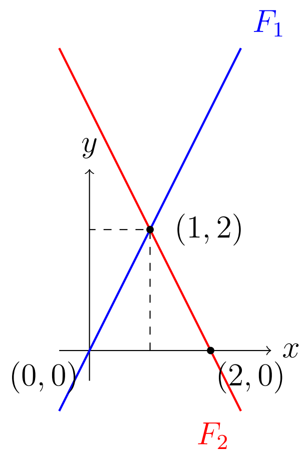
Seja $E = \mathbb{R}^2$ e considere os subconjuntos de E:

$$F_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 2x\}$$

e

$$F_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 4 - 2x\}$$

a) Geometricamente, quem são esses conjuntos?



b) Um deles é subespaço vetorial (prove usando o teorema) e o outro não é (você consegue identificar qual deles não é e por que?).

2.1 Interseção e soma de subespaços Vetoriais

Definição 2.1. *Dados um espaço vetorial E e dois subespaços U e W de E, a* ***interseção*** *dos subespaços U e W, denotada por $U \cap W$, é o conjunto de todos os vetores que pertencem tanto a U quanto a W:*

$$U \cap W = \{v \in E \mid v \in U \text{ e } v \in W\}.$$

Exemplo 2.1.1. *Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ e os subespaços $U = \{(x, y, 0) \mid x,\ y \in \mathbb{R}\}$ e $W = \{(0, y, z) \mid y,\ z \in \mathbb{R}\}$. Primeiro veja que U é o plano xoy e W é o plano yoz. A interseção $U \cap W$ é o conjunto:*

$$U \cap W = \{(0, y, 0) \mid y \in \mathbb{R}\} = \textit{eixo } y.$$

Neste caso, a interseção entre U e W é uma reta. Vou deixar como exercício pra você provar que $U \cap W$ é um subespaço vetorial do $\mathbb{R}^3$.

Na verdade, dados dois subespaços vetoriais quaisquer de um espaço vetorial é sempre verdade que a interseção destes dois subespaços ainda será um subespaço vetorial. Vou enunciar isso direitinho no lema abaixo.

Lema 2.1. *Seja E um espaço vetorial e U e W dois subespaços vetoriais de E. Então, a interseção $U \cap W$ é também um subespaço vetorial de E.*

Agora veremos o que é a soma de subespaços vetoriais:

Definição 2.2. *Dados um espaço vetorial E e dois subespaços U e W de E, a* ***soma*** *dos subespaços U e W, denotada por $U + W$, é o conjunto de todos os vetores que podem ser escritos como a soma de um vetor de U com um vetor de W:*

$$U + W = \{u + w \mid u \in U \text{ e } w \in W\}.$$

Exemplo 2.1.2. *No espaço vetorial $\mathbb{R}^3$, considere os subespaços $\tilde{U} = \{(x, 0, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}$ e $W = \{(0, y, z) \mid y, z \in \mathbb{R}\}$. Veja que $\tilde{U}$ é o eixo ox e que W é o mesmo subespaço do exemplo anterior (o plano yoz). Então, a soma $U + W$ é o conjunto de todos os vetores da forma:*

$$\tilde{U} + W = \{(x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^3.$$

Neste caso, $\tilde{U} + W$ é igual a $\mathbb{R}^3$, pois qualquer vetor em $\mathbb{R}^3$ pode ser escrito como uma soma de um vetor em $\tilde{U}$ e um vetor em W.

Retorne ao exemplo 2.1.1. Você concorda que a soma $U + W$ também é o $\mathbb{R}^3$?

Só pra ver se você entendeu a definição de interseção, quem é $\tilde{U} \cap W$?

Dados dois subespaços vetoriais quaisquer de um espaço vetorial é sempre verdade que a soma destes dois subespaços ainda será um subespaço vetorial. Vou formalizar:

Lema 2.2. *Seja E um espaço vetorial e U e W dois subespaços vetoriais de E. Então, a soma $U + W$ é também um subespaço vetorial de E.*

Resumindo os resultados dos exemplos estamos assim:

- $U + W = \mathbb{R}^3$ e $U \cap W =$ eixo y.
- $\tilde{U} + W = \mathbb{R}^3$ e $\tilde{U} \cap W = 0$ (já dei a resposta pra você né?).

Última definição desta sessão:

Definição 2.3. *Seja E um espaço vetorial e U e W subespaços de E. Dizemos que E é a* ***soma direta*** *dos subespaços U e W, denotado por $E =$*

$U \oplus W$, se $E = U + W$ e a interseção entre U e W contém apenas o vetor nulo ou seja:

$$U \cap W = \{0\}.$$

Retornando aos exemplos vemos que $\mathbb{R}^3$ é soma direta de $\tilde{U}$ e W, isto é, $\mathbb{R}^3 = \tilde{U} \oplus W$ mas não é verdade que $\mathbb{R}^3$ seja soma direta de U e W pois a interseção entre estes dois subespaços não é o vetor nulo.

Um exercício pra ver se você entendeu mesmo:

Exercício 2

No espaço vetorial $\mathbb{R}^3$, considere os subespaços $U = \{(x, 0, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}$ e $\tilde{W} = \{(0, y, z) \mid y, z \in \mathbb{R} \text{ e } z = 2y\}$.

- Calcule $U + \tilde{W}$;
- Calcule $U \cap \tilde{W}$;
- $U \oplus \tilde{W}$. Isso é verdadeiro ou falso?

Outra maneira de caracterizar a soma direta.

Teorema 2.2. *Seja E um espaço vetorial e U e W subespaços de E. Então $E = U \oplus W$ sse todo vetor v de E se escreve de maneira única na forma $u + w$ com $u \in U$ e $w \in W$.*

Do teorema temos que todo vetor do $\mathbb{R}^3$ se escreve de maneira única na forma $u + w$ com $u \in \tilde{U}$ e $w \in W$, onde $\tilde{U}$ e W são os subespaços do exemplo 2.1.2.

2.2 Combinações Lineares

Definição 2.4. *Seja E um espaço vetorial e $v_1, \ldots, v_n \in E$ e $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$. Qualquer vetor da forma $v = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n$ é uma combinação linear dos vetores $v_1, \ldots, v_n$.*

Um exemplo bem simples pra você entender a definição:

Exemplo 2.2.1. *Seja $E = \mathbb{R}^2$, $v_1 = (1, 1)$, $v_2 = (0, 2)$, e $v_3 = (3, 5)$. Veja que $v_3 = 3v_1 + v_2$ e portanto v_3 pode ser escrito como combinação linear dos vetores v_1 e v_2.*

Sua vez:

Exercício 3

Seja $E = \mathbb{R}^3$, $v_1 = (1,0,2), v_2 = (2,1,3), v_3 = (0,0,5)$ prove que o vetor $(5,2,3)$ é uma combinação linear de v_1, v_2 e v_3.

Nem sempre é possível escrever um vetor como combinação linear de outros. Por exemplo não é possível escrever o vetor (1,0,0) como combinação linear de (0,1,0) e (0,0,1).

2.3 Subespaços Gerados

Definição 2.5. *Seja E um espaço vetorial e considere $v_1, \ldots, v_n \in E$. Seja $S = \{v \in E \mid v = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n,\ \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}\}$, isto é, S é o conjunto de todas as combinações lineares dos vetores $v_1, \ldots, v_n$.*

Esse conjunto S é na verdade um subespaço vetorial de E (é possível provar isso). S é chamado de subespaço gerado por $v_1, \ldots, v_n$, que são por sua vez, os vetores geradores de S. A notação é a seguinte

$$S = [v_1, \ldots, v_n].$$

Por convenção $[\emptyset] = \{0\}$.

Veremos agora exemplos de subespaços gerados no $\mathbb{R}^2$ e no $\mathbb{R}^3$, e alguns outros exemplos mais complicados. Aliás o próprio $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$ também podem ser espaços gerados:

Exemplo 2.3.1.

- *O conjunto $\{(1,0),(0,1)\}$ gera todo o espaço $\mathbb{R}^2$, pois qualquer vetor em $\mathbb{R}^2$ pode ser escrito como uma combinação linear desses vetores. Então $\mathbb{R}^2 = [(1,0),(0,1)]$;*
- *Em $\mathbb{R}^2$, o subespaço S=\{reta $y = x$\}, é gerado pelo vetor $(1,1)$. Portanto $S = [(1,1)]$;*
- *O conjunto $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\} = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ gera todo o espaço $\mathbb{R}^3$. Logo $\mathbb{R}^3 = [i,j,k]$;*
- *Em $\mathbb{R}^3$, o conjunto S=\{(x,y,z); $y = x$ e $z \in \mathbb{R}$\}. Imagine a reta $y = x$ desenhada no chão (que será o plano xoy) da sala de aula. S é o plano*

que contém esta reta e o eixo z. S é gerado pelos vetores $(1,1,0)$ *e* $(0,0,1)$ *pois* $(x,x,z) = x(1,1,0) + z(0,0,1)$*;*

- *O conjunto dos polinômios de grau menor ou igual a 3 com coeficientes reais, denotado por* $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ *é gerado pelo conjunto* $\{1, x, x^2, x^3\}$*;*

- *No espaço das matrizes quadradas de ordem 2, considere o subespaço S das matrizes da forma:*

$$A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

onde $a, b \in \mathbb{R}$ *(esse subespaço já foi trabalhado na lista 2) . S é gerado pelas combinações lineares das matrizes:*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad e \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

pois

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Assim, podemos escrever:

$$S = \left\{ \alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\} = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right]$$

2.3.1 Espaços Finitamente Gerados

Dentro da teoria de espaços gerados, temos os espaços finitamente gerados:

Definição 2.6. *Seja E um espaço vetorial. Dizemos que E é um espaço vetorial finitamente gerado se existe um* ***conjunto finito*** *de vetores*

$$\{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \subset E \text{ tal que } E = [v_1, v_2, \ldots,\ v_n].$$

Veja que o conjunto $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ é finito porque tem n vetores. Retorne ao Exemplo 2.3.1 e observe que cada um dos espaços deste exemplo são finitamente gerados. Tá professora, mas será que todo espaço vetorial é finitamente gerado? Não! O conjunto dos polinômios (e aqui eu não estou fixando o grau) não é finitamente gerado.

2.4 Conjunto LI e LD

Definição 2.7. *Seja E um espaço vetorial. Dizemos que um conjunto de vetores $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \subset E$ é* ***linearmente independente*** *(LI) se, para qualquer combinação linear*

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n = 0, \tag{2.1}$$

temos que $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$. Em outras palavras, a única maneira de obter o vetor nulo é com todos os coeficientes α_i iguais a zero. Caso contrário, dizemos que o conjunto de vetores é ***linearmente dependente*** *(LD).*

Vamos entender melhor a equação (2.1). Ela diz que B é LI se **nenhum** dos vetores de B pode ser escrito como combinação linear dos outros vetores de B.

Por exemplo em $\mathbb{R}^3$, o conjunto $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ é LI, pois as 3 coisas acontecem:

- a equação $(1,0,0) = a(0,1,0) + b(0,0,1)$ é impossível;
- a equação $(0,1,0) = c(1,0,0) + d(0,0,1)$ é impossível;
- a equação $(0,0,1) = e(0,1,0) + f(1,0,1)$ é impossível.

Por outro lado, negar a equação (2.1) é dizer que existe um vetor de B que pode ser escrito como combinação linear dos outros vetores de B. Por exemplo em $\mathbb{R}^3$, o conjunto $\{(3,2,1),(1,1,0),(1,0,1)\}$ é LD, pois $(3,2,1) = 2(1,1,0) + (1,0,1)$.

Outros exemplos:

Exemplo 2.4.1.
- *Em $\mathbb{R}^2$, o conjunto $\{(1,0),(0,1)\}$ é LI, pois nenhum dos vetores pode ser escrito como uma combinação linear do outro.*

- *Em* $\mathbb{R}^2$*, o conjunto* $\{(1,1),(2,2)\}$ *é LD, pois* $2(1,1) = (2,2)$.
- *Em* $\mathbb{R}^3$*, o conjunto* $\{(1,1,0),(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ *é LD, pois* $(1,1,0) = 1(1,0,0)+1(0,1,0)+0(0,0,1)$. *Veja que alguns alphas podem ser zero.*
- *No espaço dos polinômios de grau menor ou igual a 3 com coeficientes reais, denotado por* $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$*, o conjunto* $\{1, x, x^2, x^3\}$ *é LI, pois nenhum destes polinômios pode ser escrito como uma combinação linear dos outros.*
- *No conjunto das matrizes* 2×2*, o conjunto*

  $$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

  é LI, pois nenhuma dessas matrizes pode ser obtida como combinação linear das outras.

Veja que você pode usar diretamente a equação (2.1). Ela sempre vai te responder se um conjunto é li ou ld:

Exemplo 2.4.2.
- *O conjunto* $\{(1,0),(2,0)\}$ *é ld porque o sistema* $x(1,0)+y(2,0) = (0,0)$ *tem infinitas soluções. Alguns exemplos de solução são* $(x,y) = (-2,1)$*, ou também* $(x,y) = (0,0)$*. Na verdade, você reparou que tomando os alphas todos iguais 0 a equação* (2.1) *sempre será atendida? A questão é se tem outras soluções ou não. Essa é a diferença entre li ou ld.*
- *Já o conjunto* $\{(1,1),(2,1)\}$ *é li porque a única solução do sistema* $x(1,1)+y(2,1) = (0,0)$ *é* $x = y = 0$*. E ponto final;)*

Um resultado muito útil:

Lema 2.3. *Seja B um conjunto com mais de n vetores do* $\mathbb{R}^n$*. Então, com certeza B será um conjunto linearmente dependente (LD).*

Exemplo 2.4.3. *Considere o conjunto* $B \subset \mathbb{R}^4$ *com 5 vetores:*

$$B = \{(1,0,0,0),(0,1,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1),(1,1,1,1)\}.$$

Este conjunto possui 5 vetores em $\mathbb{R}^4$ *(*$5 > 4$*!!!). Logo, B é linearmente dependente.*

2.4.1 Usando determinante de matriz para saber se um conjunto é LI ou LD

Seja $W = \{(1,2,1), (-1,1,2), (0,3,3)\} \subset \mathbb{R}^3$. Esse conjunto é linearmente independente (LI) ou linearmente dependente (LD)?

Por definição, devemos resolver a seguinte equação:

$$x(1,2,1) + y(-1,1,2) + z(0,3,3) = (0,0,0).$$

Se $x = y = z = 0 \Rightarrow W$ será LI, senão LD. Nosso problema então é resolver o sistema:

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ 2x + y + 3z = 0 \\ x + 2y + 3z = 0 \end{cases}$$

Considere esse sistema na sua forma matricial $A\mathbf{X} = \mathbf{B}$, onde:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \text{ é a matriz dos coeficientes e}$$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ é a matriz dos termos independentes.}$$

Já sabemos que se $\det(A) \neq 0$ (eu disse SE, ainda não calculamos este determinante então ainda não sabemos), então A é invertível e a solução do sistema será $\mathbf{X} = A^{-1}\mathbf{B}$. Como B é a matriz nula, devemos ter $A^{-1}\mathbf{B}=$ matriz nula e então nossa única solução será

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ onde X é a matriz das incógnitas.}$$

Moral da história: $\det(A) \neq 0 \Rightarrow W$ será LI, $\det(A) = 0 \Rightarrow W$ será LD.

Agora calcule você mesmo (eu estou cansada;))o det(A), verifique que é zero. Portanto W é LD. Veja que nem sempre dá pra usar o truque do determinante. **Só quando a matriz A for quadrada!!!**

2.4.2 Base e dimensão de um espaço vetorial

Definição 2.8. *Uma* base $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ *para um espaço vetorial* E *é um conjunto de vetores que satisfaz as seguintes condições:*

1. B *é linearmente independente;*

2. B *gera* E*(isso quer dizer que qualquer vetor de* E *pode ser escrito como combinação linear dos vetores de* B*)*

O número de vetores em B *é chamado de* ***dimensão do espaço vetorial*** E *e é denotado por* $\dim(E)$.

Exemplo 2.4.4.

1. *Nossa primeira base* B *de* $\mathbb{R}^2$ *é composta pelos vetores*

$$B = \{e_1, e_2\} \quad com \quad e_1 = (1,0) \quad e_2 = (0,1).$$

Esta base é a mais simples possível do espaço $\mathbb{R}^2$ *e é chamada de* ***Base canônica*** *. Concluímos então que* $\dim(\mathbb{R}^2) = 2$.

2. ***Outra base de*** $\mathbb{R}^2$***:*** *Considere os vetores*

$$B' = \{v_1, v_2\} \quad com \quad v_1 = (1,1), \quad v_2 = (-1,1).$$

Veja que a base não é única. Além desta, o $\mathbb{R}^2$ *tem muitas outras bases possíveis.*

3. ***Base canônica de*** $M_2(\mathbb{R})$***:*** *O espaço* $M_2(\mathbb{R})$ *das matrizes reais* 2×2 *tem dimensão 4, e sua base canônica é composta pelas matrizes:*

$$B = \{E_1, E_2, E_3, E_4\},$$

onde:

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Assim como fizemos para o $\mathbb{R}^2$*, podemos criar outras bases para o espaço das matrizes.*

4. ***Base canônica de $\mathbb{P}^n$:*** *O espaço $\mathbb{P}^n$ dos polinômios com coeficientes reais de grau menor ou igual a n tem dimensão $n+1$. A base canônica de $\mathbb{P}^n$ é composta pelos monômios:*

$$B = \{1, x, x^2, \ldots, x^n\}.$$

Qualquer polinômio $p(x) \in \mathbb{P}^n$ pode ser escrito como uma combinação linear desses monômios:

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n,$$

onde $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ são os coeficientes do polinômio. Por exemplo, para $n = 2$, temos:

$$\mathbb{P}^2 = \{p(x) \mid p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2,\ a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}\},$$

e portanto o $\mathbb{P}^2$ tem dimensão 3. Veja que sempre podemos associar um polinômio de $\mathbb{P}^2$ a um vetor de $\mathbb{R}^3$, assim

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \in \mathbb{P}^2 \to (a_0, a_1, a_2) \in \mathbb{R}^3,$$

e com essa associação podemos enxergar por exemplo a base canônica de $\mathbb{P}^2$como vetores:

$$B = \{1, x, x^2\} \subset \mathbb{P}^2 \to B = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\} \subset \mathbb{R}^3.$$

Vamos ver se você entendeu:

- Podemos dizer que $B = \{(1,0), (0,1), (3,4)\}$ é uma base de $\mathbb{R}^2$? Se você disse não, então acertou! De fato, podemos escrever o último vetor como uma combinação linear dos dois primeiros:

  $$(3,4) = 3 \cdot (1,0) + 4 \cdot (0,1).$$

  Portanto, B é um conjunto linearmente dependente (LD) e, consequentemente, não pode ser uma base de $\mathbb{R}^2$.

  Existe um teorema que formaliza esse resultado. Ele afirma que se um espaço vetorial tem dimensão n, então qualquer conjunto B com mais do que n vetores certamente será LD. Esse é o caso aqui, pois já sabemos que $\dim(\mathbb{R}^2) = 2$.

- Podemos dizer que $B = \{(2,-1)\}$ é uma base de $\mathbb{R}^2$? Novamente, se você disse não, então acertou! Nesse caso, B não gera $\mathbb{R}^2$. Por exemplo, você não consegue gerar o vetor $(0,1)$ a partir de $(2,-1)$. Logo, B não é uma base de $\mathbb{R}^2$.

Teorema 2.3. *Seja E um espaço vetorial de dimensão n. Qualquer conjunto B com mais do que n vetores em E é linearmente dependente.*

Finalmente, o corolário (essa palavra esquisita significa "consequência") abaixo nos garante a boa definição de dimensão:

Corolário 2.1. *Seja E um espaço vetorial de dimensão n. Então, qualquer base de E tem exatamente n vetores.*

Em outras palavras, o número de vetores em uma base de E é sempre o mesmo, independentemente de qual base escolhemos. Isso implica que a dimensão de E é bem definida, pois todas as bases de E possuem o mesmo número de elementos.

Mas, professora, existe algum espaço vetorial com dimensão infinita, ou seja, com infinitos vetores na sua base?

Sim! Um exemplo clássico é o espaço dos polinômios $\mathbb{P}$, formado por todos os polinômios com coeficientes reais. Abase canônica de $\mathbb{P}$ é dada pelo conjunto infinito:

$$B = \{1, x, x^2, x^3, \dots\}.$$

Assim $\dim(\mathbb{P}) = +\infty$.

Boa notícia pra você:

Neste curso só vamos trabalhar com espaços de dimensão finita, ou seja $\dim(E)$ é sempre um número natural. Isso mesmo! Não vamos complicar;)

2.4.3 Teoremas envolvendo Dimensão e soma direta

Mas afinal, pra que serve a dimensão? Serve pra facilitar a sua vida. Veremos agora um primeiro Teorema envolvendo dimensão e base.

Teorema 2.4. *Seja E um espaço vetorial de dimensão n e $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ um conjunto de n vetores em E. Então,*
o conjunto B gera E se, e somente se, B é linearmente independente.

Isso quer dizer que se o conjunto B tem n vetores num espaço de dimensão n então para afirmar que B é uma base basta provar que B é LI (ou então que B gera E).

Exemplo 2.4.5.

- *Considere o conjunto* $B = \{e_1, e_2, e_3\} \subset \mathbb{R}^3$*, onde* $e_1 = (1,0,0)$*,* $e_2 = (0,1,0)$*, e* $e_3 = (0,0,1)$*. É fácil verificar que* B *é linearmente independente, seja utilizando a definição de independência linear ou aplicando o truque do determinante. Pelo teorema, como* B *tem exatamente 3 vetores (3= dimensão de* $\mathbb{R}^3$*) e é linearmente independente, segue que* B *gera* $\mathbb{R}^3$ *e portanto é uma base de* $\mathbb{R}^3$*.*

- *Considere o conjunto* $B = \{p_1, p_2, p_3\} \subset P^2(\mathbb{R})$*, onde* $p_1(x) = 1$*,* $p_2(x) = x$*, e* $p_3(x) = x^2$*. De novo, é fácil verificar que* B *é linearmente independente. Pelo teorema, como* B *tem exatamente 3 vetores (3= dimensão de* $P^2(\mathbb{R})$*) e é linearmente independente, segue que* B *gera* $P^2(\mathbb{R})$ *e portanto é uma base de* $P^2(\mathbb{R})$*.*

Viu? Conhecendo a dimensão de E já não precisamos provar que B gera o espaço vetorial E.

Agora eu vou pedir pra você revisar a definição de soma direta pois nós veremos um Teorema envolvendo dimensão e soma direta de subespaços vetoriais.

Teorema 2.5. *Seja* E *um espaço vetorial de dimensão* n*,* $S_1 = [u_1, \ldots, u_i]$ *e* $S_2 = [v_1, \ldots, v_j]$ *dois subespaços vetoriais de* E*. Seja* $B = \{u_1, \ldots, u_i, v_1, \ldots, v_j\}$*, ou seja,* B *é o conjunto com todos os vetores u's e v's. Suponha ainda que* $i + j = n$*. Então:*

B *é LI se e somente se* $E = S_1 \oplus S_2$*.*

Exemplo 2.4.6.

- *Seja* $E = M_2(\mathbb{R}), S_1 = [A, B], S_2 = [C, D]$*, onde* $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$*,* $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$*,* $C = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$*,* $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$*. Neste exemplo temos* $i + j = 4 = \dim(M_2(\mathbb{R}))$*, você pode verificar que* $B = \{A, B, C, D\}$ *é LI (use por exemplo o determinante) e pelo Teorema concluimos que* $E = S_1 \oplus S_2$*.*

- *Seja* $E = P^2(\mathbb{R}), S_1 = [p_1, p_2], S_2 = [p_3]$*, onde* $p_1(x) = 1 + x$*,* $p_2(x) = 1$*,* $p_3(x) = x^2$*. Temos* $i + j = 3 = \dim(P^2(\mathbb{R}))$*, você pode verificar que* $B = \{p_1(x), p_2(x), p_3(x)\}$ *é LI e mais uma vez pelo Teorema concluimos que* $E = S_1 \oplus S_2$*.*

Vou chamar a sua atenção para um detalhe muito importante:

Observação 2.1. $E = \mathbb{R}^2$, $S_1 = [(1,2),(2,4)]$ *e* $S_2 = [(0,1)]$. *Veja que neste caso* $i + j = 3, n = 2$ *então a princípio não poderíamos usar o Teorema (se lembre que você só pode usar um Teorema se tiver TODAS as hipóteses cumpridas). Mas...se você der uma olhada mais de perto em* S_1 *vai ver que os dois vetores são LD e portanto* $S_1 = [(1,2)]$*!!! Agora temos* $i + j = 2, n = 2$, $B = \{(1,2),(0,1)\}$ *LI, e pelo Teorema* $E = S_1 \oplus S_2$*;)*

Moral da história: Verifique se há gordura nos subespaços antes de tentar o Teorema! Sua vez:

Exercício 4

Seja $E = \mathbb{R}^3$, $S_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; x - y = z\}$ e $S_2 = [(1,-1,-1)]$

- Encontre uma base para S_1.
- Vale $E = S_1 \oplus S_2$?

Exercício 5

Seja $E = P^3(\mathbb{R})$, $S_1 = \{ax^3+bx^2+cx+d; b = c, a = 0\}$ e $S_2 = [x,\ x^3,\ 2x^3-4x]$

- Encontre uma base para S_1.
- Vale $E = S_1 \oplus S_2$?

Exercício 6

Seja $E = \mathbb{R}^4$, $S_1 = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4; x + y = 0, w - z = 0\}$ e $S_2 = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4; w = z = 0\}$

- Encontre uma base para S_1.
- Encontre uma base para S_2.
- Vale $E = S_1 \oplus S_2$?

2.5 Produto interno (PI) entre dois vetores

O produto interno (PI) desempenha um papel fundamental no estudo de espaços vetoriais, fornecendo uma estrutura adicional que permite a introdução de conceitos geométricos, como ângulos e distâncias, em espaços vetoriais.

Seja E um espaço vetorial. Algumas das principais aplicações do produto interno incluem:

- Cálculo de Normas: O produto interno permite definir uma norma associada, que mede o comprimento dos vetores em E. No caso particular am que $E = \mathbb{R}$ a norma de um número real é simplesmente o módulo deste número (que você deve ter aprendido em cálculo A). O módulo de um número real é a distância dele ao zero. A idéia agora é generalizar esse conceito para vetores.
- Ortogonalidade: Se eu disser pra você que dois vetores de $\mathbb{R}^2$ são ortogonais você consegue imaginar geometricamente né? Agora vamos estender esse conceito para polinômios ortogonais, matrizes ortogonais...
- Propriedades Geométricas: O ângulo entre dois vetores pode ser definido por meio do produto interno.
- Aplicações Práticas: Em diversas áreas da matemática aplicada, como álgebra linear numérica, processamento de sinais e aprendizado de máquina, o produto interno é usado para analisar e resolver problemas envolvendo projeções e otimização.

Definição 2.9. *Seja E um espaço vetorial. Um **produto interno** em E é uma aplicação $\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \to \mathbb{R}$ que associa a cada par de vetores $u, v \in E$ um número real $\langle u, v \rangle$, satisfazendo as seguintes propriedades para todos $u, v, w \in E$ e $\alpha \in \mathbb{R}$:*

1. $\langle u + v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$*(Linearidade no primeiro argumento);*
2. $\langle \alpha u, v \rangle = \alpha \langle u, v \rangle$*(Linearidade no primeiro argumento);*
3. $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle (Simetria)$;
4. $\langle u, u \rangle \geq 0$, *com igualdade se, e somente se,* $u = 0$*(Positividade).*

É possivel provar diretamente da definição que $\langle 0, v \rangle = 0 \ \forall \ v \in E$.

Vamos começar com um exemplo que vocês já conhecem láááá de GA:

Exemplo 2.5.1. *No espaço $E = \mathbb{R}^2$, o* ***produto interno usual*** *é definido como:*

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = u_1 v_1 + u_2 v_2,$$

onde $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ e $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ são vetores em $\mathbb{R}^2$.

Reconheceu? É o produto escalar!

Por exemplo, sejam $\mathbf{u} = (1, 2)$ e $\mathbf{v} = (3, 4)$. Então:

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 = 3 + 8 = 11.$$

Em sala de aula provaremos que o produto escalar é de fato um produto interno.

Mais exemplos de PI usuais em outros espaços vetoriais:

Exemplo 2.5.2.

- ***Produto interno usual em*** $P^2(\mathbb{R})$***:*** *No espaço P^2 dos polinômios de grau menor ou igual a 2, o produto interno usual (ou escalar) é definido como:*

  $$\langle p, q \rangle = a_0 b_0 + a_1 b_1 + a_2 b_2,$$

  onde $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ e $q(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2$ são polinômios em P^2, e os coeficientes a_i, b_i são reais.

  Por exemplo, para $p(x) = 1 + 2x + 3x^2$ e $q(x) = 4 + 5x + 6x^2$, o produto interno é:

  $$\langle p, q \rangle = (1)(4) + (2)(5) + (3)(6) = 4 + 10 + 18 = 32.$$

- ***Produto interno usual em*** $C^0[a, b]$***:*** *No espaço $C^0[a, b]$, formado por funções contínuas definidas no intervalo $[a, b]$, o produto interno usual é definido por:*

  $$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x) g(x) \, dx,$$

  onde $f(x), g(x) \in C^0[a, b]$.

  Por exemplo, para $f(x) = x$ e $g(x) = x^2 \in C^0[0, 1]$:

  $$\langle f, g \rangle = \int_0^1 x \cdot x^2 \, dx = \int_0^1 x^3 \, dx = \left[\frac{x^4}{4} \right]_0^1 = \frac{1}{4}.$$

Sua vez. Calcule $\langle f, g\rangle$ *para* $f(x) = x$ *e* $g(x) = e^x \in C^0[0, 1]$*. A resposta é 1.*

- ***Produto interno usual em*** $M_2(\mathbb{R})$***:*** *No espaço* $M_2(\mathbb{R})$*, formado pelas matrizes reais* 2×2*, o produto interno usual é definido como:*

$$\langle A, B\rangle = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{12} + a_{21}b_{21} + a_{22}b_{22},$$

onde $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ *e* $B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$ *são matrizes em* $M_2(\mathbb{R})$*.*

Por exemplo, sejam $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ *e* $B = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$*. Então, o produto interno é:*

$$\langle A, B\rangle = (1)(5) + (2)(6) + (3)(7) + (4)(8) = 5 + 12 + 21 + 32 = 70.$$

Agora o exemplo de um PI não usual em $\mathbb{R}^2$:

Exemplo 2.5.3. ***Produto interno não usual em*** $\mathbb{R}^2$***:*** *Considere o espaço* $\mathbb{R}^2$*. Um exemplo de produto interno não usual pode ser definido como:*

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle = 2u_1v_1 + 3u_2v_2,$$

onde $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ *e* $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ *são vetores em* $\mathbb{R}^2$*.*

Este produto interno ainda satisfaz as propriedades fundamentais de um produto interno (linearidade, simetria e positividade), mas não é o usual, pois usa diferentes pesos nos componentes do vetor.

Por exemplo, sejam $\mathbf{u} = (1, 2)$ *e* $\mathbf{v} = (3, 4)$*. O produto interno será:*

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle = 2(1)(3) + 3(2)(4) = 6 + 24 = 30.$$

2.5.1 Norma de vetor

Definição 2.10. *Seja* E *um espaço vetorial com um produto interno e* $v \in E$ *um vetor. A norma de* v *indicada por* $\|v\|$ *é o seguinte número real*

$$\|v\| = \sqrt{\langle v, v\rangle}.$$

Segue direto da definição que $\|v\|^2 = \langle v, v\rangle$. Veja que a norma está intimamente ligada ao produto interno. Se você muda o produto interno, você muda a norma. Vamos retornar ao exemplo da sessão anterior:

Exemplo 2.5.4. $E = \mathbb{R}^2$*, com o o produto interno usual:*

$$\langle u, v\rangle = u_1v_1 + u_2v_2.$$

Vamos calcular $\|u\|$ *e* $\|v\|$ *onde* $u = (1, 2)$ *e* $v = (3, 4)$*:*

$$\langle u, u\rangle = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 = 5$$

logo $\|u\| = \sqrt{5}$*. Deixo você calcular* $\|v\|$*. Agora veja que se eu considerar outro produto interno em* $E = \mathbb{R}^2$*, por exemplo,*

$$\langle u, v\rangle = 2u_1v_1 + 3u_2v_2,$$

a norma de u *também muda. Neste caso será* $\sqrt{14}$.

Duas propriedades da norma:

1. A norma de um vetor é um número real maior ou igual a zero, i.e., $\|v\| \geq 0$;
2. $\|\lambda v\| = |\lambda|\|v\|$ onde $\lambda \in \mathbb{R}$.

Se você prestar atenção verá que norma é uma generalização do conceito de módulo de número real. O módulo do número real x é a distância dele ao zero. Já a norma do vetor x é o tamanho do vetor, ou seja, a distância da ponta do vetor à origem. Isso vai ficar claro com a próxima definição:

Dados u e v em E, um espaço vetorial, o número real não negativo $\|u - v\|$ é chamado **distância** de u a v.

Por exemplo, em $\mathbb{R}^2$ com a norma usual, dados

$$u = (u_1, u_2) \quad \text{e} \quad v = (v_1, v_2),$$

temos:

$$\|u - v\| = \|(u_1 - v_1, u_2 - v_2)\| = \sqrt{(u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2}.$$

Assim, tomando $u = x$ e $v = 0$ vemos que $\|u - v\| = \|x\|$ é a distância do vetor x ao 0.

Duas desigualdades muito importantes envolvendo a norma.

Lema 2.4 (Desigualdade de Cauchy-Schwarz)**.** *Se E é um espaço vetorial com produto interno, então*

$$|\langle u, v\rangle| \leq \|u\| \cdot \|v\|$$

para quaisquer $u, v \in E$.

Lema 2.5 (Desigualdade Triangular)**.** *Se E é um espaço vetorial com produto interno, então*

$$\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$$

para quaisquer $u, v \in E$.

2.5.2 Ângulo entre dois vetores

Definição 2.11. *Seja E um espaço vetorial com um produto interno e $u,\ v \in E$ vetores. Definimos o* ***ângulo entre os vetores*** *u e v como sendo o número real θ, com $0 \leq \theta \leq \pi$, tal que*

$$\cos\theta = \frac{\langle u, v\rangle}{\|u\| \cdot \|v\|}.$$

Lembre-se que o $\cos\theta$ é um número entre -1 e 1. Mas não se preocupe. é possível mostrar, usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz que $\frac{\langle u,v\rangle}{\|u\|\cdot\|v\|}$ está entre -1 e 1. Além disso, limitamos θ naquele intervalo pra garantir que o θ que realiza a igualdade acima é único, e portanto a definição é boa.

Vamos retornar ao Exemplo 2.5.4. Calcularemos o ângulo entre $u = (1, 2)$ e $v = (3, 4)$:

$$\cos\theta = \frac{5}{\sqrt{5}\sqrt{25}} = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Segundo a minha calculadora $\theta = 63.43$ graus.

Uma observação interessante: Dois vetores $u,\ v \in E$ são ortogonais $\Leftrightarrow \theta = 90$ graus (lembre-se que $0 \leq \theta \leq \pi$) $\Leftrightarrow \cos\theta = 0 \Leftrightarrow \langle u, v\rangle = 0$. Então **pra saber se dois vetores são ortogonais basta calcular o produto interno entre eles**.

Por exemplo os vetores $u = (1, -2)$ e $v = (2, 1)$ são ortogonais ($u,\ v \in \mathbb{R}^2$, PI usual).

2.5.3 Conjunto ortogonal de vetores

Definição 2.12. *Um conjunto de vetores $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ em um espaço vetorial E munido de um produto interno é dito **ortogonal** se, para quaisquer $i \neq j$, tem-se*

$$\langle v_i, v_j \rangle = 0.$$

*Se, além disso, cada vetor v_i possui norma unitária, ou seja, $\|v_i\| = 1$ para todo i, então o conjunto é chamado de **ortonormal**.*

Em $\mathbb{R}^n$, PI usual, o exemplo mais simples de conjunto ortogonal é a base canônica. Na verdade, ele é ortonormal!

Segue abaixo um exemplo menos óbvio:
Exemplo 2.5.5. *Considere os vetores no espaço $\mathbb{R}^3$:*

$$v_1 = (1, 1, 0), \quad v_2 = (-1, 1, 0), \quad v_3 = (0, 0, 1).$$

Calculamos os produtos internos:

$$\langle v_1, v_2 \rangle = (1)(-1) + (1)(1) + (0)(0) = -1 + 1 + 0 = 0,$$

$$\langle v_1, v_3 \rangle = (1)(0) + (1)(0) + (0)(1) = 0,$$
$$\langle v_2, v_3 \rangle = (-1)(0) + (1)(0) + (0)(1) = 0.$$

Como todos os produtos internos são zero, o conjunto $\{v_1, v_2, v_3\}$ é ortogonal. No entanto, os vetores não são unitários, então o conjunto não é ortonormal.

Lema 2.6. *Todo conjunto ortogonal de vetores não nulos em um espaço vetorial E munido de um produto interno é linearmente independente.*

De acordo com o nosso Lema o conjunto de vetores $\{v_1, v_2, v_3\}$ do exemplo acima é LI.

Vou terminar chamando a atenção para um erro muito comum entre os alunos. Vimos que se dois vetores são ortogonais ($\langle u, v \rangle = 0$) então eles são LI. Mas se eles não são ortogonais você não pode concluir nada. Eles podem ser LI ou LD. Por exemplo em $\mathbb{R}^2$ com seu PI usual nós temos que:

1. $u = (1, 0),\ v = (2, 0)$ são LD
2. $u = (1, 1),\ v = (2, 0)$ são LI

e nos dois casos $\langle u, v\rangle \neq 0$ então numa prova quando eu pedir pra você dizer se o conjunto é LI ou LD eu sugiro que você use a definição ou o determinante ou qualquer outra estratégia.

Outra coisa. Não existe produto interno entre 3 vetores. Nem 4 vetores! Quando bate o desespero os alunos ficam bem criativos na prova;)

2.5.4 Subespaços ortogonais entre si

Já sabemos o que é um conjunto ortogonal. Agora vamos conhecer mais uma definição de ortogonalidade mas agora com subespaços vetoriais.

Definição 2.13. *Sejam S e F dois subespaços de um espaço vetorial E munido de um produto interno. Dizemos que S e F são **ortogonais entre si** se, para quaisquer $s \in S$ e $f \in F$, tem-se*

$$\langle s, f\rangle = 0.$$

Nesse caso, escrevemos $S \perp F$.

A boa notícia é que se S e F são dois subespaços vetoriais de um espaço vetorial E e você quer saber se eles são ortogonais entre si, você não precisa passar o resto da sua vida testando os produtos internos $\langle s, f\rangle$. Basta fazer isso numa base. Eu vou te mostrar com um exemplo:

Exemplo 2.5.6. *Sejam os subespaços do espaço vetorial $\mathbb{R}^3$:*

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 2y\},$$

$$F = [(1, -2, 0), (-1, 2, 0)].$$

Primeiro, encontramos uma base para S. Como $x = 2y$, podemos escrever um vetor genérico de S como

$$(x, y, z) = (2y, y, z) = y(2, 1, 0) + z(0, 0, 1).$$

Portanto, uma base para S é

$$B_S = \{(2, 1, 0), (0, 0, 1)\}.$$

Já para F, os vetores dados são claramente dependentes. Assim, uma base para F é

$$B_F = \{(1, -2, 0)\}.$$

Agora, verificamos os produtos internos entre os vetores das bases:

$$\langle (2,1,0),(1,-2,0)\rangle = 0,\ \ \langle (0,0,1),(1,-2,0)\rangle = 0.$$

Portanto, S e F são ortogonais.

2.5.5 Complemento ortogonal

Definição 2.14. *Seja S um subespaço de um espaço vetorial E munido de um produto interno. O **complemento ortogonal** de S, denotado por $S^{\perp}$, é o conjunto de todos os vetores de E que são ortogonais a todos os vetores de S, ou seja,*

$$S^{\perp} = \{v \in E \mid \langle v, s\rangle = 0,\, \forall s \in S\}.$$

Não é difícil provar que o complemento ortogonal $S^{\perp}$ é sempre um subespaço de E.

Exemplo 2.5.7. *Vamos determinar o complemento ortogonal do subespaço*

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 2y\}.$$

Passo 1: Encontrar uma base para S. Já fizemos isso na sessão passada. Dê uma olhada lá:

$$B_S = \{(2,1,0),(0,0,1)\}.$$

Passo 2: Encontrar $S^{\perp}$ Queremos determinar todos os vetores $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ que são ortogonais a todos os vetores de S. Já sabemos que basta testar com os vetores da base de S:

$$\langle (a,b,c),(2,1,0)\rangle = 2a + b + 0c = 0,$$

$$\langle (a,b,c),(0,0,1)\rangle = 0a + 0b + 1c = 0.$$

A segunda equação implica $c = 0$, e a primeira equação se reduz a

$$2a + b = 0 \quad \Rightarrow \quad b = -2a.$$

Portanto, os vetores de $S^{\perp}$ são da forma

$$(a,-2a,0) = a(1,-2,0).$$

Conclusão: O complemento ortogonal de S é o subespaço gerado pelo vetor $(1, -2, 0)$, *ou seja,*

$$S^{\perp} = [(1, -2, 0)].$$

Opa! mas esse é o espaço F do último exemplo não é?

3 Transformações Lineares

Sejam E e W espaços vetoriais. Uma transformação linear é uma aplicação $T\colon E \to W$ tal que

1. $T(x + y) = T(x) + T(y), \quad \forall x, y \in E$
2. $T(\alpha x) = \alpha T(x), \quad \forall x \in E,\ \alpha \in \mathbb{R}$

Alguns exemplos simples de aplicações lineares:

Exemplo 3.0.1.
- $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, T(x, y) = (x + 2y, y)$
- $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, T(x, y) = (x, y)$
- $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, T(x, y, z) = (x, y, 0)$

Agora alguns exemplos mais complicados de aplicações lineares:

Exemplo 3.0.2.
- $T : M_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2, T(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}) = (a + d, b + c)$
- $T : P_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^3, T(a_0 + a_1 x + a_2 x^2) = (a_0, a_1, a_2)$

Observação 3.1. *Toda T. linear satisfaz T(0)=0. Isso é equivalente a dizer que uma Transformação que não cumpre essa igualdade não pode ser linear!*

Essa observação é muito útil para saber quando uma Transformação não é linear. Por exemplo $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, T(x, y) = (x+2, y+1)$ não pode ser linear.

Agora um exercício muito importante:

Exercício 7

Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ uma transformação linear tal que:

$$T(1, 0) = (0, 1) \quad \text{e} \quad T(1, 1) = (2, 0).$$

Calcule $T(2, 3)$.

Solução. Primeiro veja que $B = \{(1,0),(1,1)\}$ é uma base do $\mathbb{R}^2$ então podemos escrever (de maneira única) o vetor $v = (2,3)$ como combinação linear dos vetores de B. De fato:

$$(2,3) = -1(1,0) + 3(1,1).$$

Os números -1 e 3 são chamados de coordenadas do vetor $v = (2,3)$ na base B (veremos isso na próxima sessão). Aplicando T, temos:

$$T(2,3) = -1T(1,0) + 3T(1,1).$$

Substitua os valores conhecidos:

$$T(2,3) = -1(0,1) + 3(2,0) = (6,-1).$$

Realize as operações para encontrar o resultado final. Veja que usando a mesma idéia você pode calcular T(qualquer vetor de E)!

Professora e porquê esse exercício é importante? Por que nós vimos que a T. linear fica **completamente** definida se você conhece a imagem de T nos vetores de uma base de E. Isso é poderoso!

Exercício 8

Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ uma transformação linear tal que:

$$T(0,1,0) = (1,-2) \quad , T(1,0,1) = (3,1) \quad \text{e} \quad T(1,1,0) = (0,2).$$

Calcule $T(5,3,2)$.

3.1 Coordenadas de um vetor v numa base B

No exercício da sessão anterior tínhamos uma base $B = \{(1,0),(1,1)\}$ do $\mathbb{R}^2$ e escrevemos $(2,3) = -1(1,0) + 3(1,1)$. Os números -1 e 3 são chamados de coordenadas do vetor $v = (2,3)$ na base B. A notação é a seguinte: $[v]_B = (-1,3)$.

Mais formalmente, temos a seguinte definição:

Definição 3.1. *Seja $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ uma base de um espaço vetorial E. Dado um vetor $v \in E$, as coordenadas de v na base B são os coeficientes reais $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ tais que*

$$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n.$$

As coordenadas de v na base B são representadas pelo vetor

$$[v]_B = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n).$$

Mas será que poderíamos ter encontrado outras coordenadas para o vetor $v = (2, 3)$ naquela base B do exercício? A resposta é não! veja o lema abaixo:

Lema 3.1. *Dado um espaço vetorial E, uma base B de E e um vetor v de E, então as coordenadas de v na base B são únicas.*

Veja que se você muda a ordem dos vetores de B então você também muda a ordem das coordenadas de v na base B. Então uma vez dada a base B, a ordem é fixa e não se mexe mais em B!

Exercício 9

Calcule as coordenadas de v na base $B = \{(0, 1, 0), (1, 0, 1), (1, 1, 0)\}$ do $\mathbb{R}^3$.

- $v = (1, 1, 1)$
- $v = (2, -1, 4)$
- $v = (5, 2, -3)$

3.2 Núcleo e imagem de uma T. Linear

Definição 3.2. *Sejam E e W dois espaços vetoriais e $T : E \to W$ uma transformação linear. O* ***núcleo*** *de T, denotado por $N(T)$, é o conjunto de todos os vetores $v \in E$ tais que $T(v) = 0$, onde 0 representa o vetor nulo em W.*

Em outras palavras:

$$N(T) = \{v \in E \mid T(v) = 0\}.$$

A princípio o Núcleo é apenas um subconjunto de E. Veja que como T é linear então $T(0) = 0$ e portanto o vetor nulo SEMPRE está no núcleo de T logo $N(T)$ é um subconjunto não vazio de E. Na verdade ele é um subespaço:

Lema 3.2. *$N(T)$ é um subespaço de E.*

Isso quer dizer que $N(T)$ tem gerador, base, dimensão e tudo aquilo que um subespaço tem direito de ter!

Exemplo 3.2.1. *Considere a transformação linear $T_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por:*

$$T_1(x, y) = (y, x).$$

Cálculo do núcleo $N(T_1)$***:*** *Por definição, o núcleo de T_1 é dado por:*

$$N(T_1) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid T_1(x, y) = (0, 0)\}.$$

Substituímos na expressão de $T_1(x, y)$:

$$T_1(x, y) = (y, x) = (0, 0).$$

Isso implica no sistema de equações:

$$y = 0 \quad e \quad x = 0.$$

Logo, o único par (x, y) que satisfaz $T_1(x, y) = (0, 0)$ é $(x, y) = (0, 0)$. Portanto:

$$N(T_1) = \{(0, 0)\}.$$

Assim, o núcleo de T_1 é trivial, consistindo apenas do vetor nulo.

Agora vamos relembrar (faremos isso em sala de aula) os conceitos de função injetora e sobrejetora (isso mesmo! aquela definição que você viu na escola). O próximo resultado relaciona T. linear injetora com o subespaço $N(T)$.

Lema 3.3. *Seja $T : E \to W$ uma transformação linear entre os espaços vetoriais E e W. Então, T é **injetora** se, e somente se, o núcleo de T for trivial, ou seja:*

$$N(T) = \{0\}.$$

Usando o lema podemos afirmar que a T. linear trabalhada no último exemplo é injetora! Veja que $N(T) = \{0\}$ significa que o núcleo tem base vazia (o vetor nulo não pode formar base) e portanto $\dim(N(T)) = 0$ (o número zero).

Exercício 10

Considere a transformação linear $T_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por:

$$T_2(x, y) = (x, y - x).$$

Exercício pra você: prove que

$$N(T_2) = \{(0, 0)\}.$$

Assim podemos concluir que esta T. linear também é injetora!

Agora um exemplo de uma T. linear que NÃO é injetora:

Exercício 11

Considere a transformação linear $T_3 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida por:

$$T_3(x, y, z) = (x - y - 4z, 3x + y + 8z).$$

Exercício pra você: prove que

$$N(T_3) = [(-1, -5, 1)].$$

Veja que o vetor nulo pertence a $N(T_3)$! mas tem outros caras além dele que também estão lá...

Assim podemos concluir que esta T. linear não é injetora!

Definição 3.3. *Sejam E e W dois espaços vetoriais e $T : E \to W$ uma transformação linear. A* ***imagem*** *de T, denotada por $Im(T)$, é o conjunto de todos os vetores em W que podem ser escritos como $T(v)$ para algum $v \in E$.*

Em outras palavras:

$$Im(T) = \{T(v),\, v \in E\}.$$

Assim como $N(T)$, o vetor nulo também sempre pertence a $\mathrm{Im}(T)$ (por quê?). E além disso $\mathrm{Im}(T)$ também é um subespaço!

Lema 3.4. *$Im(T)$ é um subespaço de W.*

Algumas observações úteis:

Observação 3.2.
- *Lembre-se que neste curso vamos trabalhar com espaços de dimensão finita, ou seja $\dim(E)$ e $\dim(W)$ são números naturais.*
- *Os vetores em $Im(T)$ "residem" no espaço vetorial W.*
- *Os vetores em $N(T)$ "residem" no espaço vetorial E.*
- *Se $Im(T) = W$, então T é **sobrejetora**, ou seja, T mapeia todo E no espaço W.*
- *Sempre temos $\dim(Im(T)) \leq \dim(W)$. Se ocorrer igualdade, ou seja, $\dim(Im(T)) = \dim(W)$, isso implica que T é sobrejetora.*

Exemplo 3.2.2. *Nesta sessão trabalhamos com as seguintes T. Lineares*

- $T_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, T_1(x, y) = (y, x)$.
- $T_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, T_2(x, y) = (x, y - x)$.
- $T_3 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, T_3(x, y, z) = (x - y - 4z, 3x + y + 8z)$

Calculamos o núcleo de cada uma delas. Agora vamos calcular a Imagem: ***Cálculo da imagem de T_1:*** *Por definição, a imagem de T_1 é o conjunto:*

$$Im(T) = \{T_1(x, y),\ \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2\}.$$

$T_1(x, y) = (y, x) = (y, 0) + (0, x) = y(1, 0) + x(0, 1)$, *logo, os geradores da imagem de T são $(1, 0)$ e $(0, 1)$,i.e.,*

$$Im(T_1) = [(1, 0), (0, 1)].$$

Como estes dois vetores são LI, temos que $\dim(Im(T_1)) = 2 = \dim(\mathbb{R}^2)$ e T_1 é sobrejetora.

Cálculo da imagem de T_2:

Fica como exercício pra você provar que

$$Im(T_2) = [(1, 1), (0, -1)].$$

Como estes dois vetores são LI temos que $\dim(Im(T_2)) = 2 = \dim(\mathbb{R}^2)$ *e* T_2 *é sobrejetora.*

Cálculo da imagem de T_3***:***

Fica como exercício pra você provar que

$$Im(T_3) = [(-1, 1), (1, 3), (-4, 8)].$$

Atenção aqui! lembra que 3 vetores em $\mathbb{R}^2$ *só podem ser LD? Vimos isso em um Teorema lá atrás...*

E de fato $(-4, 8) = 1(1, 3) + 5(-1, 1)$*, logo*

$$Im(T_3) = [(-1, 1), (1, 3)].$$

Como estes dois vetores são LI temos que $\dim(Im(T_3)) = 2 = \dim(\mathbb{R}^2)$ *e* T_3 *é sobrejetora.*

Agora é a sua vez! Um exercício completo pra você treinar:

Exercício 12

Seja $T_4 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, T_4(x, y, z) = (x, y, 0)$.

- Prove que T_4 é uma T. linear
- Calcule $N(T_4)$. T_4 é injetora?
- Calcule $\text{Im}(T_4)$. T_4 é sobrejetora?
- T_4 é bijetora?

3.3 Teoremas

Essa sessão é um pouco mais teórica. Vá fazer yoga e beber um copo de cerveja antes da leitura;)

Começaremos por um dos resultados mais importantes deste curso:
Teorema 3.1 (Teorema da Dimensão)**.** *Sejam* E *e* W *espaços vetoriais de dimensões finitas e* $T : E \to W$ *uma transformação linear. Então:*

$$\dim(E) = \dim(N(T)) + \dim(\mathrm{Im}(T)).$$

Vamos analisar este Teorema e ver quanta coisa legal sai dele. Primeiro suponha que $\dim(E) = \dim(W) = n$. Suponha também que T é injetora. Pelo Teorema teremos $n = 0 + \dim(\mathrm{Im}(T))$. Ora, isso quer dizer que T é sobrejetora pois $\dim(\mathrm{Im}(T)) = \dim(W)$. Vou enunciar o que acabamos de provar. A gente chama isso de Corolário. Como eu já expliquei, Corolário significa "consequência". De fato o que acabamos de provar é uma consequência do Teorema né?

Corolário 3.1. *Seja $T : E \to W$ uma transformação linear entre espaços vetoriais E e W tais que $\dim(E) = \dim(W) = n$. Então:*

$$T \text{ é injetora} \iff T \text{ é sobrejetora.}$$

Tem duas afirmações aí. Se $\dim(E) = \dim(W)$ e T é injetora então T é sobrejetora (foi o que provamos). A outra é Se $\dim(E) = \dim(W)$ e T é sobrejetora então T é injetora (essa fica pra você tentar;)).

Outra consequência do Teorema:

Corolário 3.2. *Seja $T : E \to W$ uma transformação linear entre espaços vetoriais E e W, tais que $\dim(E) = \dim(W) = n$, e T seja injetora. Então, T leva base em base.*

Em outras palavras, se $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ é uma base de E, então $S = \{T(v_1), T(v_2), \ldots, T(v_n)\}$ é uma base de W.

Vamos a um exemplo pra digerir toda essa informação:
Exemplo 3.3.1. *Seja $T : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$ uma transformação linear tal que $N(T) = \{0\}$. Determine se as afirmações a seguir são verdadeiras (**V**) ou falsas (**F**):*

1. *T é sobrejetora.*
2. $\dim(\mathrm{Im}(T)) = 4$.
3. *T não é bijetora.*
4. *Se $B = \{e_1, e_2, \ldots, e_5\}$ é a base canônica de $\mathbb{R}^5$, então $S = \{T(e_1), T(e_2), \ldots, T(e_5)\}$ é uma base de $\mathbb{R}^5$.*

A resposta é $\boldsymbol{V}$,$\boldsymbol{F}$,$\boldsymbol{F}$,$\boldsymbol{V}$.

Mais um Teorema:

Teorema 3.2. *Sejam E e W espaços vetoriais de dimensões finitas e $T : E \to W$ uma transformação linear. Seja $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ uma base de E e $S = \{T(v_1), \ldots, T(v_n)\} \subseteq W$. Então:*

a) S gera $\mathrm{Im}(T)$.

b) T é injetora $\Leftrightarrow$ S é linearmente independente.

c) T é sobrejetora $\Leftrightarrow$ S gera todo o espaço W.

d) T é bijetora $\Leftrightarrow$ S é uma base para W.

Na matemática quando a aplicação linear é bijetora chamamos essa aplicação de isomorfismo. É só um nome chique pra uma coisa que você já conhece...

Exemplo 3.3.2. *Considere $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, com $T(x, y) = (x + y, y)$.*

Seja $B = \{(1, 0), (1, 2)\}$ uma base do $\mathbb{R}^2$.

a) Calcule S:

$$S = \{T(v_1), T(v_2)\} = \{T(1, 0), T(1, 2)\} = \{(1, 0), (3, 2)\}.$$

b) T é injetora? Sim pelo Teorema pois S é LI.

c) T é sobrejetora? Sim, pois S possui dois vetores LI portanto (pelo Teorema 2.4) S gera o $\mathbb{R}^2$. Aí basta aplicar o Teorema que acabamos de ver.

d) T é isomorfismo? Sim, pois T é linear, injetora e sobrejetora.

Corolário 3.3. *Seja $T : E \to W$ uma transformação linear entre espaços vetoriais de dimensões finitas E e W. Então:*

a) Se $\dim(E) < \dim(W)$ então T não pode ser sobrejetora.

b) Se $\dim(E) > \dim(W)$ então T não pode ser injetora.

Exercício 13

Verdadeiro ou Falso.

a) Uma T. linear de R^2 em $M_2(\mathbb{R})$ certamente será sobrejetora.

a) Uma T. linear de $\mathbb{P}^2$ em $\mathbb{R}$ certamente será injetora.

c) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, onde $T(x, y) = (x, y)$ é um isomorfismo.

3.4 Matriz de uma Transformação Linear

Sejam E e W espaços vetoriais de dimensões finitas n e m, respectivamente. Fixe uma base $B_E = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ de E e uma base $B_W = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_m\}$ de W. Podemos associar esta transformação linear T (e suas bases fixadas) B_E, B_W a uma matriz $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, chamada a **matriz de** T nas bases B_E, B_W .

Daqui a pouco eu vou ensinar como calcular esta matriz A usando um exemplo. Mas a moral da história é a seguinte. Fixadas as bases B_E de E e B_W de W então:

- Cada transformação linear $T : E \to W$ corresponde a uma única matriz $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$. A notação para essa matriz é $[T]_{B_W}^{B_E}$. Quando B_E e B_W são as bases canônicas, a gente escreve simplesmente $[T]$.
- Cada matriz $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ define uma transformação linear única $T : E \to W$.

Isso significa que existe uma bijeção entre o mundo das T. lineares de E em W e o mundo das Matrizes $M_{m\times n}(\mathbb{R})$. Esta bijeção é fundamental para estudar transformações lineares, pois permite representar e operar com transformações lineares usando álgebra matricial. Agora vamos ao exemplo prometido:

Exemplo 3.4.1. *Considere a transformação linear* $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ *definida por* $T(x, y) = (x, y, 0)$*. Sejam* $B_E = \{(1, 1), (0, 1)\}$ *uma base de* $\mathbb{R}^2$ *e* $B_W = \{(1, 0, 0), (0, 2, 0), (0, 0, 1)\}$ *uma base de* $\mathbb{R}^3$*. O objetivo é determinar a matriz* $[T]_{B_W}^{B_E}$*.*

Passo 1: Calcular T ***para os vetores da base*** B_E

Calculamos as imagens dos vetores de B_E *pela transformação* T*:*

$$T(1, 1) = (1, 1, 0), \quad T(0, 1) = (0, 1, 0).$$

Passo 2: Encontrar as coordenadas de $T(1, 1)$ ***e*** $T(0, 1)$ ***na base*** B_W

Para expressar $T(1,1) = (1,1,0)$ na base B_W, escrevemos:

$$(1,1,0) = c_1(1,0,0) + c_2(0,2,0) + c_3(0,0,1).$$

Comparando as componentes, temos o sistema:

$$c_1 = 1, \quad 2c_2 = 1 \implies c_2 = \frac{1}{2}, \quad c_3 = 0.$$

Portanto, as coordenadas de $T(1,1)$ na base B_W são $(1, \frac{1}{2}, 0)$. Esta será a primeira coluna da nossa matriz procurada.

Agora, para $T(0,1) = (0,1,0)$, escrevemos:

$$(0,1,0) = d_1(1,0,0) + d_2(0,2,0) + d_3(0,0,1).$$

Comparando as componentes, obtemos:

$$d_1 = 0, \quad 2d_2 = 1 \implies d_2 = \frac{1}{2}, \quad d_3 = 0.$$

Portanto, as coordenadas de $T(0,1)$ na base B_W são $(0, \frac{1}{2}, 0)$. Esta será a segunda coluna da nossa matriz procurada.

Passo 3: Montar a matriz $[T]_{B_W}^{B_E}$

A matriz $[T]_{B_W}^{B_E}$ que representa T com relação às bases B_E e B_W tem como colunas as coordenadas das imagens dos vetores de B_E na base B_W:

$$[T]_{B_W}^{B_E} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Atenção! A ordem dos vetores nas bases B_E e B_W é importante. Faça o exercício abaixo e você vai ver:

Exercício 14

Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definida por $T(x, y) = (x, y, 0)$. Sejam $B_E = \{(0,1), (1,1)\}$ uma base de $\mathbb{R}^2$ e $B_W = \{(0,2,0), (0,0,1), (1,0,0)\}$ uma base de $\mathbb{R}^3$. Determine a matriz $[T]_{B_W}^{B_E}$.

Então quando eu disse, no início desta sessão para fixar as bases B_E e B_W, isso significa que a ordem dos vetores nas bases também deve ser fixada. Vamos a outro exemplo.

Exemplo 3.4.2. *Sejam B_E a base canônica de $M_2(\mathbb{R})$ e $B_W = \{(0,2),(1,1)\}$ uma base de $\mathbb{R}^2$. O objetivo é determinar a matriz $[T]_{B_W}^{B_E}$, onde*

$$T(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}) = (a+d, b+c)$$

Eu vou deixar você fazer essa conta pra ver se você entendeu mesmo, mas como eu sou gente boa, vou te dar a resposta:

$$[T]_{B_W}^{B_E} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0.5 & 0.5 & 1 \end{bmatrix}.$$

Mais dois exercícios para você treinar:

Exercício 15

Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $T(x,y) = (y,x)$. Sejam $B_E = \{(1,0),(1,2)\}$ uma base de $\mathbb{R}^2$ e $B_W = \{(0,1),(1,1)\}$ outra base de $\mathbb{R}^2$. Determine a matriz $[T]_{B_W}^{B_E}$.

Resposta:

$$[T]_{B_W}^{B_E} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Esse é muito fácil. As duas bases são canônicas.

Exercício 16

Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $T(x,y) = (y,x)$. Sejam $B_E = B_W$ a base canônica de $\mathbb{R}^2$. Determine a matriz $[T]_{B_W}^{B_E}$.

Resposta:

$$[T]_{B_W}^{B_E} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Agora vamos fazer o contrário. Suponhamos que você tem uma T. linear $T : E \to W$, você conhece as bases B_E, B_W e a matriz A que representa T mas não conhece a lei de T. Como você calcula $T(v)$ para um certo vetor v de E? Vou te ensinar com um exemplo:

Exemplo 3.4.3. *Seja* $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$*,* $B_E = \{(1,0),(1,2)\}$ *uma base de* $\mathbb{R}^2$ *e* $B_W = \{(0,1,1),(1,1,0),(2,0,0)\}$ *uma base de* $\mathbb{R}^3$*. Seja*

$$[T]_{B_W}^{B_E} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Determine $T(1,1)$*.*

Solução:

Para determinar $T(1,1)$*, seguimos os seguintes passos:*

Passo 1: Determinar as coordenadas de $v = (1,1)$ ***em relação à base*** B_E***.***

Sabemos que

$$v = c_1(1,0) + c_2(1,2),$$

ou seja, precisamos resolver o sistema:

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 1 \\ 2c_2 = 1. \end{cases}$$

Da segunda equação, temos $c_2 = \frac{1}{2}$*. Substituindo na primeira,*

$$c_1 + \frac{1}{2} = 1 \implies c_1 = \frac{1}{2}.$$

Portanto,

$$[v]_{B_E} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Passo 2: Multiplicar a matriz $[T]_{B_W}^{B_E}$ ***pelas coordenadas do passo 1.***

$$[T]_{B_W}^{B_E} \cdot [v]_{B_E} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Calculamos o produto matricial:

$$\begin{bmatrix} 0 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2} \\ 1 \cdot \frac{1}{2} + 0 \cdot \frac{1}{2} \\ 1 \cdot \frac{1}{2} - 1 \cdot \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Esse resultado que você encontrou são as coordenadas de $T(1,1)$ na base B_W.

Passo 3: Calcular** $T(1,1)$ **usando as coordenadas do passo 2.

$T(1,1)$ em $\mathbb{R}^3$ é dado por

$$T(1,1) = \frac{1}{2} \cdot (0,1,1) + \frac{1}{2} \cdot (1,1,0) + 0 \cdot (2,0,0).$$

Efetuando a soma:

$$T(1,1) = \left(0 + \frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{1}{2}, \frac{1}{2} + 0\right) = (\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}).$$

Portanto,

$$T(1,1) = \left(\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}\right).$$

3.5 Operações com Transformações Lineares

Nesta seção, exploraremos três operações fundamentais envolvendo transformações lineares: adição, multiplicação por um escalar e composição.

3.5.1 Adição de Transformações Lineares

Sejam $T_1, T_2 : E \to W$ duas transformações lineares, onde E e W são espaços vetoriais. A soma $T_1 + T_2 : E \to W$ é definida por:

$$(T_1 + T_2)(v) = T_1(v) + T_2(v), \quad \forall v \in E.$$

A soma de duas T lineares ainda é uma transformação linear, ou seja $T = T_1 + T_2$ atende àquelas duas regrinhas (a soma separa e o α sai).

Exemplo 3.5.1. *Considere as transformações lineares T_1 e T_2, ambas definidas de $\mathbb{R}^3$ em $\mathbb{R}^2$, dadas por:*

$$T_1(x,y,z) = (2x + y - z, x + y),$$

$$T_2(x,y,z) = (-x + z, x).$$

Vamos calcular a soma $T_1 + T_2$.

$$(T_1 + T_2)(x, y, z) = T_1(x, y, z) + T_2(x, y, z).$$

Substituímos as expressões de T_1 e T_2:

$$(T_1 + T_2)(x, y, z) = \big((2x + y - z) + (-x + z), (x + y) + x\big).$$

Simplificamos as componentes e obtemos o resultado:

$$(T_1 + T_2)(x, y, z) = (x + y, 2x + y).$$

Ok! Agora digamos que eu não conheço a lei de T_1 mas eu conheço a sua matriz $[T_1]_{B_W}^{B_E}$, eu não conheço a lei de T_2 mas eu conheço a sua matriz $[T_2]_{B_W}^{B_E}$. Como eu faço pra encontrar a matriz da soma $T_1 + T_2$?

Lema 3.5. *Sejam $T_1, T_2 : E \to W$ duas transformações lineares entre os espaços vetoriais E e W. Suponha que B_E seja uma base de E e B_W seja uma base de W. Então, a matriz da soma $T_1 + T_2$ em relação às bases B_E e B_W é dada por:*

$$[T_1 + T_2]_{B_W}^{B_E} = [T_1]_{B_W}^{B_E} + [T_2]_{B_W}^{B_E}.$$

Se você não conhece as leis de T_1 e T_2 mas conhece as matrizes, então você pode calcular a matriz da soma $T_1 + T_2$. E se você tem a matriz de uma T. linear (e as bases) então você tem tudo o que precisa para trabalhar com essa T. linear. Dá até pra recuperar a lei de $T_1 + T_2$ se você quiser!

Exemplo 3.5.2. *Sejam as matrizes A e B que representam, respectivamente, as transformações lineares $T_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ e $T_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ em relação às bases $B_E = \{(1, 0), (1, 2)\}$ de $E = \mathbb{R}^2$ e $B_W = \{(0, 1), (1, 1)\}$ de $W = \mathbb{R}^2$:*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}.$$

- *Calcular a matriz $[T]_{B_W}^{B_E}$, onde $T = T_1 + T_2$,*
- *Calcular $T(-1, 2)$ usando a matriz que você encontrou.*

***Determinação de* $[T]_{B_W}^{B_E}$.**

A matriz $[T]_{B_W}^{B_E}$ pode ser obtida somando as matrizes A e B, ou seja:

$$[T]_{B_W}^{B_E} = A + B.$$

Calculando a soma:

$$[T]_{B_W}^{B_E} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+5 & 2+6 \\ 3+7 & 4+8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{bmatrix}.$$

Determinação de *$T(-1, 2)$.*

Passo 1: Determinar as coordenadas de *$v = (-1, 2)$* ***em relação à base*** *B_E. Sabemos que $v = (-1, 2)$ pode ser escrito como:*

$$(-1, 2) = c_1(1, 0) + c_2(1, 2),$$

ou seja, precisamos resolver o sistema linear:

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = -1, \\ 2c_2 = 2. \end{cases}$$

Da segunda equação, temos $c_2 = 1$. Substituindo na primeira, obtemos:

$$c_1 + 1 = -1 \implies c_1 = -2.$$

Portanto, as coordenadas de $(-1, 2)$ em relação a B_E são:

$$[(-1, 2)]_{B_E} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Passo 2: Multiplicar a matriz *$[T]_{B_W}^{B_E}$* ***pelas coordenadas*** *$[(-1, 2)]_{B_E}$.*

$$[T]_{B_W}^{B_E} \cdot [(-1, 2)]_{B_E} = \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Calculando o produto matricial:

$$\begin{bmatrix} 6 \cdot (-2) + 8 \cdot 1 \\ 10 \cdot (-2) + 12 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -12 + 8 \\ -20 + 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ -8 \end{bmatrix}.$$

E essas são as coordenadas de $T(-1, 2)$ na base B_W.

Passo 3: Determinar *$T(-1, 2)$.*

Sabemos que $T(-1,2)$ em W é uma combinação linear dos vetores de B_W com as coordenadas obtidas:

$$T(-1,2) = -4 \cdot (0,1) + (-8) \cdot (1,1).$$

Efetuando a combinação linear:

$$T(-1,2) = (0,-4) + (-8,-8) = (-8,-12).$$

Resposta final:

$$T(-1,2) = (-8,-12).$$

3.5.2 Multiplicação de uma Transformação Linear por um Escalar

Seja $T : E \to F$ uma transformação linear e $\alpha \in \mathbb{R}$. A multiplicação αT é definida por:

$$(\alpha T)(v) = \alpha \cdot T(v), \quad \forall v \in E.$$

Assim como na soma, a nova transformação $T_3 = \alpha T$ é linear.

Exemplo 3.5.3. *Considere a transformação linear T definida de $\mathbb{R}^3$ em $\mathbb{R}^3$, dadas por:*

$$T(x,y,z) = (2x+y, x+y, 2z),$$

Vamos calcular $3T$. Sabemos que para uma transformação linear T, multiplicar por um escalar c implica multiplicar o resultado de $T(x,y,z)$ por c. Logo:

$$(3T)(x,y,z) = 3 \cdot T(x,y,z).$$

Portanto:

$$(3T)(x,y,z) = 3 \cdot (2x+y, x+y, 2z) = (6x+3y, 3x+3y, 6z).$$

E de novo, suponhamos que você conheça a matriz A que representa uma T. linear T nas bases B_E e B_W, mas não conheça a lei de T. Será que dá pra calcular a matriz que representa $2T$? A resposta está no lema abaixo:

Lema 3.6. *Seja $T : E \to W$ uma transformação linear representada pela matriz $[T]_{B_W}^{B_E}$ em relação às bases B_E de E e B_W de W. A matriz que representa αT, onde $\alpha \in \mathbb{R}$, é dada por:*

$$[\alpha T]_{B_W}^{B_E} = \alpha \cdot [T]_{B_W}^{B_E}.$$

Exemplo 3.5.4. *Seja*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

a matriz que representa a transformação linear $T : E \to W$ *nas bases* B_E *e* B_W*. Vamos calcular a matriz que representa* $-4T$*, ou seja,* $[-4T]_{B_W}^{B_E}$.

Solução

Sabemos que a matriz que representa αT *é obtida multiplicando a matriz que representa* T *pelo escalar* α*. No caso,* $\alpha = -4$*. Assim:*

$$[-4T]_{B_W}^{B_E} = -4 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

A matriz que representa $-4T$ *nas bases* B_E *e* B_W *é:*

$$[-4T]_{B_W}^{B_E} = \begin{bmatrix} -4 & -8 \\ -12 & -16 \end{bmatrix}.$$

3.5.3 Composição de Transformações Lineares

Sejam $T_1 : E \to F$ e $T_2 : F \to G$ duas transformações lineares. A composição $T_2 \circ T_1 : E \to G$ é definida por:

$$(T_2 \circ T_1)(v) = T_2(T_1(v)), \quad \forall v \in E.$$

A composição de duas Transformações Lineares ainda é uma T. Linear.
Exemplo 3.5.5. *Considere as transformações lineares* T_1 *e* T_2*, ambas definidas de* $\mathbb{R}^3$ *em* $\mathbb{R}^3$*, dadas por:*

$$T_1(x, y, z) = (2x + y, -z, x + y),$$

$$T_2(x, y, z) = (-x + z, x, 2y).$$

Vamos calcular a composição $T_1 \circ T_2$.

Solução. *A composição* $T_1 \circ T_2$ *é dada por:*

$$T_1 \circ T_2(x, y, z) = T_1(T_2(x, y, z)).$$

Substituímos $T_2(x,y,z) = (-x+z, x, 2y)$ *em* T_1*:*

$$T_1(-x+z, x, 2y) = (2(-x+z)+x, -2y, (-x+z)+x).$$

Simplificamos as expressões.

$$\begin{aligned} T_1(-x+z, x, 2y) &= (2(-x+z)+x, -2y, (-x+z)+x), \\ &= (-2x+2z+x, -2y, -x+z+x), \\ &= (-x+2z, -2y, z). \end{aligned}$$

Portanto, a composição $T_1 \circ T_2$ *é:*

$$T_1 \circ T_2(x,y,z) = (-x+2z, -2y, z).$$

Veja que $T_1 \circ T_2$ *é uma T. Linear!*

E o que acontece com as matrizes $[T_1]$ e $[T_2]$ quando a gente calcula a composta $T_1 \circ T_2$? Resposta: Elas multiplicam.

Lema 3.7. *Sejam* $T_1 : E \to W$ *e* $T_2 : V \to E$ *transformações lineares, e sejam* $[T_1]_{B_W}^{B_E}$ *e* $[T_2]_{B_E}^{B_V}$ *as matrizes que representam* T_1 *e* T_2 *nas respectivas bases* B_E, B_W *e* B_V*.*

A matriz que representa a composição $T_1 \circ T_2 : V \to W$*, em relação às bases* B_V *de* V *e* B_W *de* W*, é dada pelo produto matricial:*

$$[T_1 \circ T_2]_{B_W}^{B_V} = [T_1]_{B_W}^{B_E} \cdot [T_2]_{B_E}^{B_V}.$$

Exemplo 3.5.6. *Considere as transformações lineares* T_1 *e* T_2*, ambas definidas de* $\mathbb{R}^3$ *em* $\mathbb{R}^3$*. Sejam* A_1 *e* A_2 *as matrizes que representam* T_1 *e* T_2*, respectivamente, na base canônica do* $\mathbb{R}^3$*:*

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 4 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Calcule a matriz que representa a composição $T_1 \circ T_2$*, ou seja,* $[T_1 \circ T_2]$*,.*

Solução.

Para encontrar a matriz que representa a composição $T_1 \circ T_2$, multiplicamos as matrizes A_1 e A_2 na ordem correta, ou seja, $[T_1 \circ T_2] = A_1 A_2$. Assim:

$$[T_1 \circ T_2] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 4 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Portanto, a matriz que representa $T_1 \circ T_2$ é:

$$[T_1 \circ T_2] = \begin{bmatrix} 16 & 9 & 7 \\ 17 & 7 & 8 \\ 16 & 18 & 5 \end{bmatrix}.$$

Sua vez: agora calcule

$$[T_2 \circ T_1].$$