Universidade Federal da Bahia
Instituto de Matemática
Departamento de Matemática-UFBA

Lista 5- Álgebra Linear

Professora- Vanessa Barros

Transformações lineares: Núcleo, Imagem e Teoremas, operações com T. lineares, matriz de uma T. linear

Exercício 1

Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definida por $T(x, y) = (3x, -2y, x - y)$.

(a) Prove que T é uma transformação linear.

(b) Calcule o conjunto gerador do núcleo e da imagem.

(c) Dê a dimensão do núcleo e da imagem.

(d) Analise se T é injetora e/ou sobrejetora.

Exercício 2

Seja $T : M_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2$ uma transformação linear e $\beta = \{A, B, C, D\}$ um conjunto do $M_2(\mathbb{R})$ sendo

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \ D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Determinar $T\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, sabendo que $T(A) = (-1, -2)$, $T(B) = (0, 1)$, $T(C) = (0, 2)$ e $T(D) = (8, 2)$.

Exercício 3

Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a transformação linear definida por
$T(x, y) = (3x - y, -3x + y)$, $\mathbb{R}^2$ com o produto interno usual.

(a) Determine $N(T)$ e $N(T)^\perp$

(b) Determine uma base para $N(T)$ e $N(T)^\perp$ e suas respectivas dimensões.

(c) Podemos dizer que T é injetora?

(d) Determine $Im(T)$.

(e) Determine uma base para $Im(T)$ e sua dimensão.

(f) Podemos dizer que T é sobrejetora?

(g) Podemos dizer que T é bijetora?

Exercício 4

Seja E um espaço vetorial com dimensão 4, $T : E \to E$ uma transformação linear. Sabemos que T não é sobrejetora. Analise cada afirmação abaixo e diga se é verdadeiro ou falso. Justifique sua resposta.

(a) $N(T) = \{0\}$;

(b) $dim(Im(T)) = 4$;

(c) $dim(Im(T)) + dim(N(T)) = 5$;

Para os próximos exercícios considere as seguintes T. lineares:

1. $T_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por $T_1(x, y, z) = (3x, -2y, x - y)$.
2. $T_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida por $T_2(x, y, z) = (x - z, 2x + y + 3z)$.
3. $T_3 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por $T_3(x, y, z) = (x, y, -z)$.

Exercício 5

Calcule o que se pede:

(a) $T_1 + T_3$

(b) $2T_2$

(c) $T_1 - 4T_3$

(d) $T_2 \circ T_3$

Exercício 6

Analise cada afirmação abaixo e diga se é verdadeiro ou falso. Justifique sua resposta.

(a) T_3 é injetora;

(b) T_1 é injetora;

(c) Se $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ é uma base do $\mathbb{R}^3$ então $S = \{T_1(v_1), T_1(v_2), T_1(v_3)\}$ é uma base do $\mathbb{R}^3$;

(d) O conjunto S do item anterior gera o $\mathbb{R}^3$;

(e) T_2 é injetora (responda sem fazer nenhuma conta);

Exercício 7

Encontre a matriz que representa $T_i,\ i = 1, 2, 3$ (ou seja calcule as matrizes $[T_1],\ [T_2],\ [T_3]$). Use a base canônica do $\mathbb{R}^2$ e do $\mathbb{R}^3$. Depois calcule $[2T_1 - T_3]$.

Exercício 8

Encontre a matriz $[T_2]_{B_2}^{B_1}$, onde $B_1 = \{(2, 1, 0), (1, 0, 3), (1, 1, 0)\}$ é a base do $\mathbb{R}^3$ $B_2 = \{(1, 2), (1, 1)\}$ é a base do $\mathbb{R}^2$.