Universidade Federal da Bahia
Instituto de Matemática
Departamento de Matemática-UFBA

Lista 4- Álgebra Linear

Professora- Vanessa Barros

Produto interno, norma de vetor, ângulo entre vetores, ortogonalidade entre vetores e subespaços, complemento ortogonal

Exercício 1

Consideremos o espaço euclidiano $\mathbb{R}^2$ com o produto interno usual . Sejam $u = (1, 2)$ e $v = (-1, 1)$.

(a) Calcule o cosseno do ângulo entre u e v.

(b) Determine um vetor w do $\mathbb{R}^2$ tal que $\langle u, w\rangle = -1$ e $\langle v, w\rangle = -1$.

Exercício 2

Considere os vetores $u = (1, 1, 1)$, $v = (-1, 1, 0)$ e $w = (\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, -\frac{2}{6})$ do $\mathbb{R}^3$. Para cada um dos itens abaixo indique se é verdadeiro ou falso e justifique.

(a) O conjunto $\{u, v\}$ é LI.

(b) O conjunto $\{u, v, w\}$ é ortogonal.

(c) O conjunto {u,v} é uma base de $\mathbb{R}^3$.

(d) O conjunto $\{u, v, w\}$ é LD.

(e) O vetor u é ortogonal ao subespaço $S = [v, w]$ do $\mathbb{R}^3$.

(f) O vetor $(0, -1, 1)$ é ortogonal ao subespaço $F = [u, v]$ do $\mathbb{R}^3$.

Exercício 3

A distância entre dois vetores u e v em um espaço vetorial E com uma norma $\|\cdot\|$ é definida como:

$$d(u, v) = \|u - v\|$$

Em cada um dos itens abaixo determinar $d(u, v)$.

(a) $V = \mathbb{R}^4$, com o produto interno usual, $u = (1, 1, 1, 1)$, $v = (0, 0, 1, 1)$.

(b) $V = P_2(\mathbb{R})$, com o produto interno usual, $u = 1 + t$, $v = \frac{3}{4}t + 3t^2$.

Exercício 4

Considere $\mathbb{R}^3$ com o produto interno usual. Para que valores de k podemos afirmar que $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ são ortogonais?

(a) $\mathbf{u} = (2, 1, 3)$, $\mathbf{v} = (1, 7, k)$

(b) $\mathbf{u} = (k, k, 1)$, $\mathbf{v} = (k, 5, 6)$

Exercício 5

Considere $\mathbb{R}^2$ com o produto interno dado por

$$< (x_1, y_1), (x_2, y_2) >= 2x_1x_2 + x_1y_2 + x_2y_1 + y_1y_2.$$

Determine os valores de k para que $B = \{(2k, -1), (k, 1)\}$ seja uma base ortogonal de $\mathbb{R}^2$.

Exercício 6

Considere o espaço $V = C^0[1, 2]$, com o produto interno usual. Calcule o produto interno de $u(x) = x$ e $v(x) = \ln(x)$. Calcule a norma de $u(x) = x$.

Exercício 7

Considere os seguintes subespaços $S_1 = \{(x, y, z);\ x = y,\ z = 0\}$ e $S_2 = \{(x, y, z);\ x = -y\}$ do $\mathbb{R}^3$.

(a) Encontre um conjunto de geradores para S_1 e S_2. Qual é a dimensão de S_1 e S_2?

(b) Prove que S_1 é ortogonal a S_2.

(c) Prove que $\mathbb{R}^3 = S_1 \oplus S_2$.

Exercício 8

Seja $S = \{(x, y, z, t);\ y - z + 2t = 0,\ x = 2t\}$ um subconjunto do $\mathbb{R}^4$.

(a) Encontre um conjunto de geradores para S.

(b) Encontre $S^\perp$= o complemento ortogonal de S.

(c) Encontre um conjunto de geradores para $S^\perp$.