

Sommaire

I. Suites.....	2
• Préambule sur les suites.....	2
• Raisonement par récurrence.....	8
• Limites de suites.....	10
II. Fonctions.....	14
• Limites de fonctions.....	14
• Dérivation et convexité.....	18
• Continuité.....	22
• Fonction exponentielle.....	26
• Fonction logarithme népérien.....	28
• Primitives et équations différentielles.....	32
• Calcul intégral.....	37
• Fonctions trigonométriques.....	41
III. Algèbre.....	48
• Combinatoire et dénombrement.....	48
IV. Géométrie.....	53
• Géométrie vectorielle dans l'espace.....	53
• Produit scalaire dans l'espace.....	60
V. Probabilités.....	67
• Probabilités conditionnelles et indépendance.....	67
• Loi binomiale.....	71
• Variables aléatoires.....	75
• Somme de variables aléatoires et concentration.....	77

Préambule sur les suites

I. Généralités sur les suites

Une suite numérique est une **succession infinie de réels**. Une suite numérique est donc une fonction définie sur l'ensemble des **entiers naturels** $\mathbb{N}$.

Une suite numérique (u_n) définie à partir du rang p est une fonction qui à chaque entier $n \geq p$ associe un réel, noté u_n . Cette suite est aussi notée $(u_n)_{n \geq p}$ ou simplement u .

u_n est appelé le **terme général** de la suite ou le **terme d'indice** n .

u_p est le **terme initial** ou le **premier terme** de la suite.

Attention !

- u_{n+1} est le terme d'indice $n+1$. C'est le terme qui suit le terme d'indice n , c'est-à-dire u_n . On ne doit pas le confondre avec $u_n + 1$ qui est la somme de u_n , le terme d'indice n , et de 1.
- u_{n-1} est le terme d'indice $n-1$. Il précède le terme u_n .

Une suite numérique (u_n) peut être représentée par un **nuage de points** de coordonnées $(n; u_n)$.

II. Mode de génération d'une suite numérique

II.1 Suite définie par une formule explicite

Soit a un nombre réel et f une fonction définie sur l'intervalle $[a; +\infty[$.

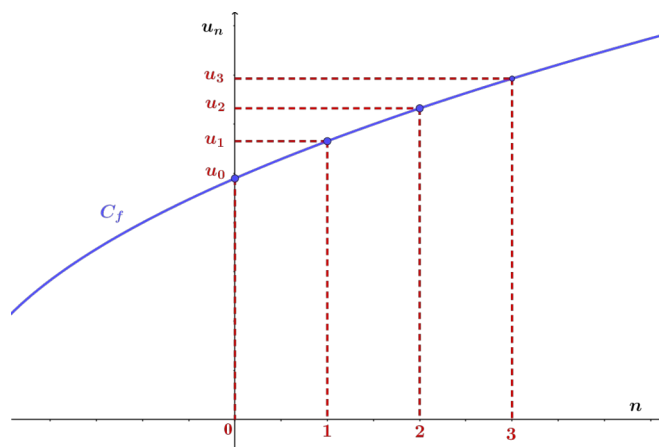
On peut définir une suite (u_n) en posant pour tout entier $n \geq a$, $u_n = f(n)$.

Une suite (u_n) est définie de **façon explicite** quand le terme u_n est exprimé en fonction de n .

Avec cette définition, on peut donc calculer n'importe quel terme de la suite à partir de son indice.

Représentation graphique

Graphiquement, les termes de la suite (u_n) sont les ordonnées des points $A_n(n; u_n)$ d'abscisses entières de la courbe C_f .



II.2 Suite définie par une formule de récurrence

Soit f une fonction définie sur un ensemble I . On suppose que si $x \in I$, alors $f(x) \in I$.

Soit a un nombre réel de I et p un entier.

On peut alors définir une suite (u_n) en posant $u_p = a$ et pour tout entier $n \geq p$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

Représentation graphique

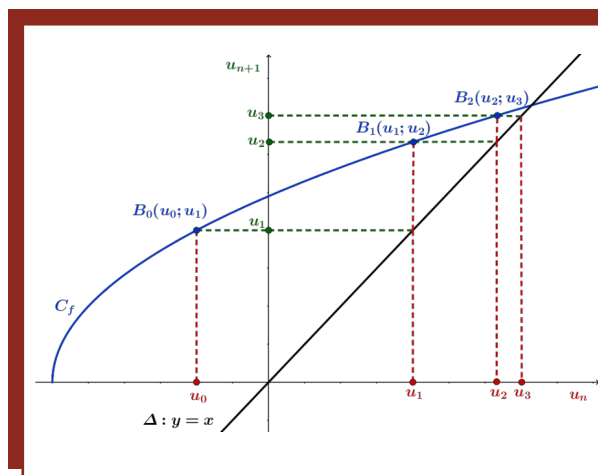
Graphiquement, $B_0(u_0; u_1)$ appartient à la courbe C_f .

Pour déterminer $B_1(u_1; u_2)$, il faut placer u_1 , l'ordonnée de B_0 , en abscisse.

On « reporte » donc u_1 sur l'axe des abscisses en utilisant la droite $\Delta : y = x$.

On poursuit de même pour construire

$B_2(u_2; u_3)$, $B_3(u_3; u_4)$, ...



III. Sens de variations

- Une suite (u_n) est **croissante** à partir du rang p si pour tout $n \geq p$, $u_{n+1} \geq u_n$.
- Une suite (u_n) est **décroissante** à partir du rang p si pour tout $n \geq p$, $u_{n+1} \leq u_n$.
- Une suite (u_n) est **monotone** si elle est soit croissante, soit décroissante à partir du rang p .
- Une suite (u_n) est **stationnaire** à partir du rang p si pour tout n , $u_{n+1} = u_n$.
- Une suite (u_n) est **constante** lorsque pour tout n , $u_{n+1} = u_n$.

Méthodes d'étude de variation d'une suite

- Étude du signe de la différence : Soit (u_n) une suite.

- Si à partir du rang p , pour tout entier $n \geq p$, $u_{n+1} - u_n \geq 0$, alors (u_n) est une suite croissante.
- Si à partir du rang p , pour tout entier $n \geq p$, $u_{n+1} - u_n \leq 0$, alors (u_n) est une suite

décroissante.

- Étude du quotient : Soit (u_n) une suite dont **tous les termes sont strictement positifs**.

- Si à partir du rang p , pour tout entier $n \geq p$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$, alors $u_{n+1} \geq u_n$ et donc (u_n) est une suite croissante.

- Si à partir du rang p , pour tout entier $n \geq p$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1$, alors $u_{n+1} \leq u_n$ et donc (u_n) est une suite décroissante.

- Étude de la fonction f associée pour une suite explicite :

Soit a un nombre réel et f une fonction définie sur l'intervalle $[a; +\infty[$.

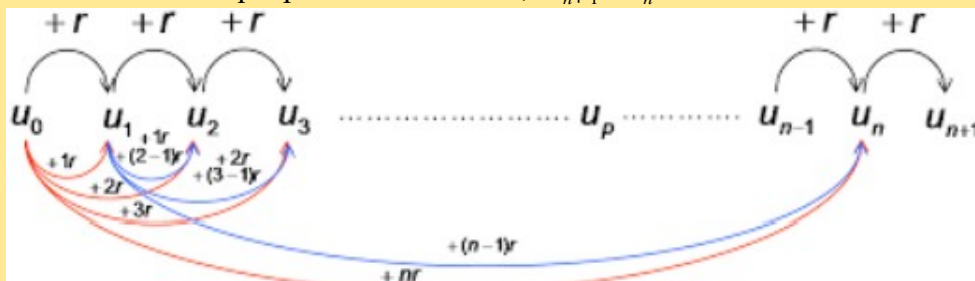
Soit un entier $p \geq a$ et la suite (u_n) définie pour tout entier $n \geq p$ par $u_n = f(n)$.

- Si la fonction f est (strictement) **croissante** sur $[p; +\infty[$, alors la suite (u_n) est (strictement) **croissante** à partir du rang p .
- Si la fonction f est (strictement) **décroissante** sur $[p; +\infty[$, alors la suite (u_n) est (strictement) **décroissante** à partir du rang p .

IV. Suites arithmétiques

On dit qu'une suite (u_n) est **arithmétique** si, à partir de son premier terme, **chaque terme est obtenu en ajoutant au précédent un même nombre**.

Ainsi, il existe un réel r tel que pour tout entier n , $u_{n+1} = u_n + r$.



Le nombre r est appelé **raison** de la suite arithmétique (u_n) . Il est égal à la différence entre deux termes consécutifs quelconques : pour tout entier n , $r = u_{n+1} - u_n$.

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r .

Pour tous entiers n et p tels que $n \geq p$, on a $u_n = u_p + (n - p)r$.

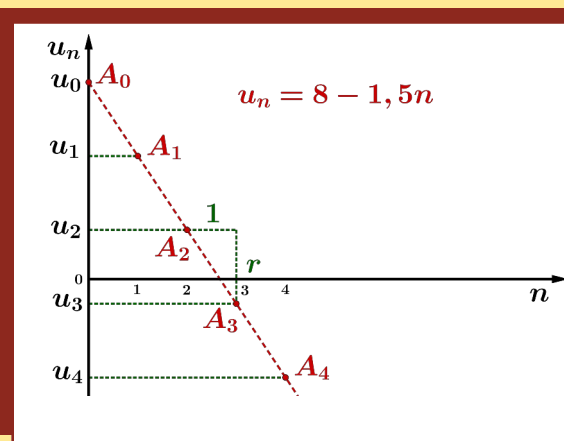
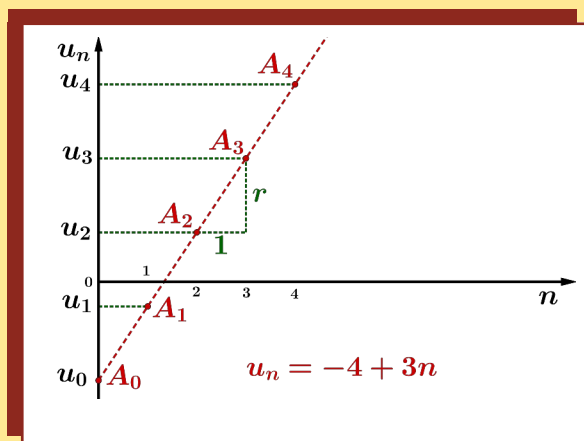
En particulier, pour tout entier n , $u_n = u_0 + nr$.

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_p .

- Si $r > 0$, alors la suite (u_n) est (strictement) **croissante**.
- Si $r < 0$, alors la suite (u_n) est (strictement) **décroissante**.
- Si $r = 0$, alors la suite (u_n) est **constante**, égale à u_p .

La représentation graphique d'une suite arithmétique (u_n) est un **ensemble de points isolés alignés de coordonnées $(n; u_n)$** .

Ces points sont situés sur une **droite** d'équation $y = rx + u_0$ (le coefficient directeur de la droite est la raison r).



Soit n un entier naturel non nul. La somme des n premiers entiers est :

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

Soit (u_n) une suite arithmétique. La formule suivante donne la somme des termes consécutifs :

$$\text{Somme des termes consécutifs} = \text{nombre de termes} \times \frac{\text{premier terme} + \text{dernier terme}}{2}$$

En particulier, pour une suite arithmétique de premier terme u_0 :

$$S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n = \sum_{k=0}^n u_k = (n+1) \times \frac{u_0 + u_n}{2}$$

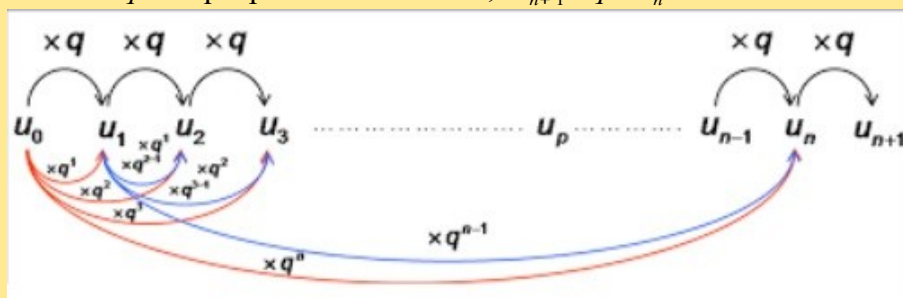
De manière plus générale, si n et p sont deux entiers naturels tels que $n > p$, alors :

$$S_n = u_p + u_{p+1} + \dots + u_n = \sum_{k=p}^n u_k = (n-p+1) \times \frac{u_p + u_n}{2}$$

V. Suites géométriques

On dit qu'une suite (u_n) est **géométrique** si, à partir de son premier terme, **chaque terme est obtenu en multipliant le précédent par un même nombre**.

Ainsi, il existe un réel q tel que pour tout entier n , $u_{n+1} = q \times u_n$.



Le nombre q est appelé **raison** de la suite géométrique (u_n) .

Dans le cas où la suite (u_n) ne s'annule pas, q est égal au quotient de deux termes consécutifs

quelconques : pour tout entier n , $q = \frac{u_{n+1}}{u_n}$.

Soit (u_n) une suite géométrique de raison q .

Pour tous entiers n et p tels que $n \geq p$, on a $u_n = u_p \times q^{n-p}$.

En particulier, pour tout entier n , $u_n = u_0 \times q^n$.

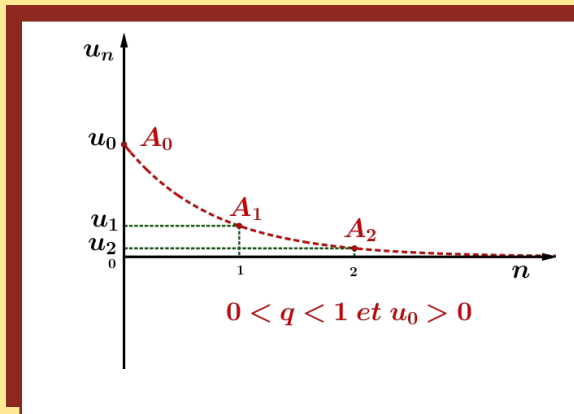
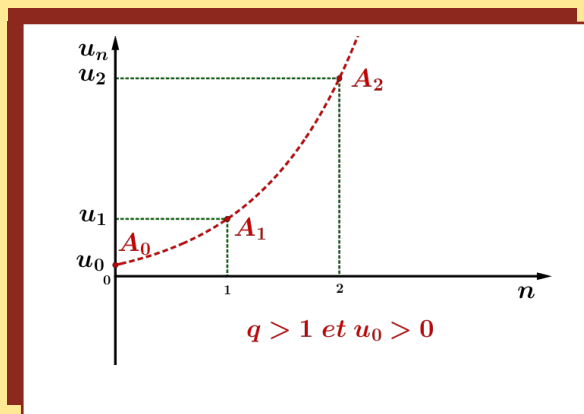
Soit (u_n) une suite géométrique de raison q et de premier terme $u_p > 0$.

- Si $q > 1$, alors la suite (u_n) est (strictement) **croissante**.
- Si $0 < q < 1$, alors la suite (u_n) est (strictement) **décroissante**.
- Si $q = 1$, alors la suite (u_n) est **constante**, égale à u_p .
- Si $q < 0$, alors la suite (u_n) **n'est pas monotone**.

Remarque

Si $u_p < 0$, ces sens de variations sont **inversés**.

La représentation graphique d'une suite géométrique (u_n) est un ensemble de points isolés $(n; u_n)$, situés sur une courbe dite **exponentielle**.



Soit n un entier naturel non nul et q un réel différent de 1. La somme des n premières puissances successives d'un nombre q est : $1 + q + q^2 + \dots + q^n = \sum_{k=0}^n q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$.

Soit (u_n) une suite géométrique de raison $q \neq 1$. La formule suivante donne la somme des termes consécutifs :

$$\text{Somme des termes consécutifs} = \text{premier terme} \times \frac{1 - q^{\text{nombre de termes}}}{1 - q}$$

En particulier, pour une suite géométrique de premier terme u_0 :

$$S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n = \sum_{k=0}^n u_k = u_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

De manière plus générale, si n et p sont deux entiers naturels tels que $n > p$, alors :

$$S_n = u_p + u_{p+1} + \dots + u_n = \sum_{k=p}^n u_k = u_p \times \frac{1 - q^{n-p+1}}{1 - q}$$

VI. Suites arithmético-géométriques

Une suite (u_n) est dite **arithmético-géométrique** s'il existe deux réels a et b tels que pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = au_n + b$.

Méthode générale

Dans les exercices, pour étudier une suite (u_n) arithmético-géométrique, on utilise une suite annexe (v_n) (donnée par l'énoncé et définie en fonction de (u_n)) qui est géométrique.

De manière générale, on démontre que (v_n) est une suite géométrique (en exprimant v_{n+1} en fonction de v_n) et on donne son expression générale. On en déduit alors l'expression générale de (u_n) . Enfin on conclut sur les variations et la limite de (u_n) .

Méthode : Étude d'une suite arithmético-géométrique

M. Durand dépose 5000€ sur un compte rémunéré au taux annuel de 2,5 % et choisit d'y ajouter à la fin de chaque année la somme de 2000€. On note u_n le montant, en euros, du capital acquis au bout de n années.

- On exprime u_{n+1} en fonction de u_n :

Le coefficient multiplicateur associé à un taux d'intérêt de 2,5 % est $1 + \frac{2,5}{100} = 1,025$.

De plus, 2000€ sont ajoutés chaque début d'année.

Donc pour tout entier n , $u_{n+1} = 1,025 u_n + 2000$ et $u_0 = 5000$.

- On introduit la suite géométrique (v_n) :

Soit (v_n) la suite définie pour tout n par $v_n = u_n + 80000$. On montre que (v_n) est géométrique.

Pour tout entier n , on a $v_{n+1} = u_{n+1} + 80000$

$$\begin{aligned} &= 1,025 u_n + 2000 + 80000 \\ &= 1,025 (v_n - 80000) + 82000 \\ &= 1,025 v_n - 82000 + 82000 \\ &= 1,025 v_n \end{aligned}$$

Donc (v_n) est une suite géométrique de raison $q = 1,025$ et de premier terme

$$v_0 = u_0 + 80000 = 5000 + 80000 = 85000.$$

- On exprime v_n en fonction de n :

Pour tout entier n , on a $v_n = v_0 \times q^n = 85000 \times 1,025^n$.

- On exprime u_n en fonction de n :

Pour tout entier n , on a $u_n = v_n - 80000 = 85000 \times 1,025^n - 80000$.

- On cherche un seuil :

M. Durand souhaite s'acheter une voiture à 15000€. Il se demande combien d'années seront nécessaires pour que le montant du capital disponible dépasse 15000€. La calculatrice nous donne (programme ou table de valeurs) $n = 5$. Donc il faudra 5 ans à M. Durand pour s'offrir sa voiture.

Raisonnement par récurrence

I. Principe de récurrence

Soit une propriété P_n qui dépend d'un entier naturel n et n_0 un entier naturel.

Pour montrer que la propriété P_n est vraie pour tout entier $n \geq n_0$, on procède en trois étapes :

- **Initialisation** : on montre que P_{n_0} est vraie.
- **Hérédité** : on suppose qu'il existe un entier $n \geq n_0$ tel que la propriété P_n soit vraie. C'est l'**hypothèse de récurrence**. On montre alors que P_{n+1} est vraie.
- **Conclusion** : la propriété P_n étant vraie au rang n_0 et étant héréditaire, on conclut par le principe de récurrence que P_n est vraie pour tout entier naturel $n \geq n_0$.

II. Exemples

II.1 Démontrer une égalité

Démontrons que la somme des n premiers entiers est égale à $\frac{n(n+1)}{2}$.

Notons pour tout entier $n \geq 1$ la propriété P_n : « $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$ ».

- Initialisation : $n = 1$

On a $\sum_{k=1}^1 k = 1$ et $\frac{1(1+1)}{2} = \frac{1 \times 2}{2} = 1$. Donc P_1 est vraie.

- Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ (fixé) tel que P_n est vraie. Montrons alors que P_{n+1} est vraie, c'est-à-dire

que $\sum_{k=1}^{n+1} k = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$.

On a $\sum_{k=1}^{n+1} k = \sum_{k=1}^n k + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + n+1 = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$.

Donc P_{n+1} est vraie.

- Conclusion : la propriété P_n est vraie au rang $n = 1$ et elle est héréditaire. D'après le principe de récurrence, la propriété P_n est vraie pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}^*$.

Ainsi, pour tout entier naturel $n \geq 1$, $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$.

II.2 Démontrer une inégalité

Soit la suite (u_n) définie par $u_0=1$ et pour tout entier naturel n , $u_{n+1}=\sqrt{u_n+1}$.

Démontrons que cette suite est strictement croissante.

Notons pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ la propriété P_n : « $u_{n+1} > u_n$ ».

• **Initialisation** : $n=0$

On a $u_0=1$ et $u_1=\sqrt{u_0+1}=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$. Comme $1 < \sqrt{2}$, alors P_0 est vraie.

• **Hérédité** : Soit $n \in \mathbb{N}$ (fixé) tel que P_n est vraie. Montrons alors que P_{n+1} est vraie, c'est-à-dire que $u_{n+2} > u_{n+1}$.

On a $u_{n+1} > u_n \Leftrightarrow u_{n+1} + 1 > u_n + 1$
 $\Leftrightarrow \sqrt{u_{n+1} + 1} > \sqrt{u_n + 1}$ car la fonction racine carrée est croissante sur $\mathbb{R}^+$
 $\Leftrightarrow u_{n+2} > u_{n+1}$

Donc P_{n+1} est vraie.

• **Conclusion** : la propriété P_n est vraie au rang $n=0$ et elle est héréditaire. D'après le principe de récurrence, la propriété P_n est vraie pour tout entier naturel n .

Ainsi, pour tout entier naturel n , la suite (u_n) est strictement croissante.

III. Autres principes de récurrence

III.1 Récurrence double

Soit une propriété P_n qui dépend d'un entier naturel n et n_0 et n_1 deux entiers naturels tels que $n_1 \geq n_0$.

Pour montrer que la propriété P_n est vraie pour tout entier $n \geq n_0$, on procède en trois étapes :

• **Initialisation** : on montre que P_{n_0} et P_{n_1} est vraie.

• **Hérédité** : on suppose qu'il existe un entier $n \geq n_0$ tel que les propriétés P_n et P_{n+1} soient vraies. Ce sont les **hypothèses de récurrence**. On montre alors que P_{n+2} est vraie.

• **Conclusion** : la propriété P_n étant vraie au rang n_0 et n_1 et étant de plus héréditaire, on conclut par le principe de récurrence que P_n est vraie pour tout entier naturel $n \geq n_0$.

III.1 Récurrence forte

Soit une propriété P_n qui dépend d'un entier naturel n et n_0 un entier naturel.

Pour montrer que la propriété P_n est vraie pour tout entier $n \geq n_0$, on procède en trois étapes :

• **Initialisation** : on montre que P_{n_0} est vraie.

• **Hérédité** : on suppose qu'il existe un entier $n \geq n_0$ tel que les propriétés P_{n_0} à P_n soient vraies. C'est l'**hypothèse de récurrence**. On montre alors que P_{n+1} est vraie.

• **Conclusion** : la propriété P_n étant vraie au rang n_0 et étant héréditaire, on conclut par le principe de récurrence que P_n est vraie pour tout entier naturel $n \geq n_0$.

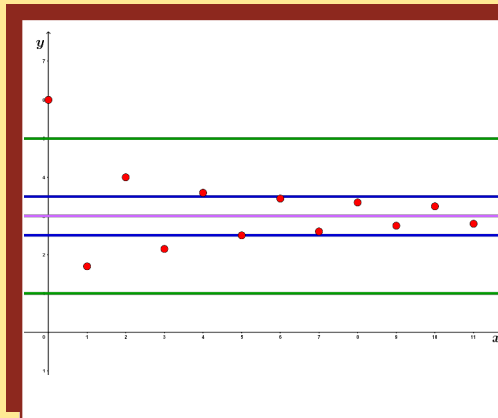
Limites de suites

I. Limite d'une suite

Soit (u_n) une suite et l un réel.

On dit que (u_n) **converge vers l** ou **tend vers l** si tout intervalle ouvert contenant l contient tous les termes u_n à partir d'un certain rang.

Le réel l est appelé **limite** de (u_n) et on note $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$.

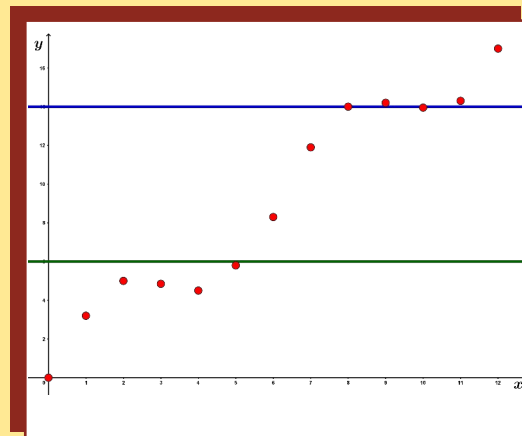


Si une suite (u_n) converge, alors sa limite est **unique**.

Soit (u_n) une suite et A un réel.

• On dit que (u_n) **diverge vers $+\infty$** ou **tend vers $+\infty$** si tout intervalle ouvert de la forme $]A; +\infty[$ contient tous les termes u_n à partir d'un certain rang. On note $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

• On dit que (u_n) **diverge vers $-\infty$** ou **tend vers $-\infty$** si tout intervalle ouvert de la forme $]-\infty; A[$ contient tous les termes u_n à partir d'un certain rang. On note $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$.



II. Opérations sur les limites

II.1 Limites d'une somme de suites

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n =$	l	l	l	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n =$	l'	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n + v_n) =$	$l + l'$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	FI

II.2 Limites d'un produit de suites

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n =$	l	$l > 0$	$l > 0$	$l < 0$	$l < 0$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	0
$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n =$	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n \times v_n) =$	ll'	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	FI

II.3 Limites d'un quotient de suites

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n =$	l	l	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$l > 0$ ou $+\infty$	$l < 0$ ou $-\infty$	$l > 0$ ou $+\infty$	$l < 0$ ou $-\infty$	0	$+\infty$ ou $-\infty$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n =$	l' et $l' \neq 0$	$+\infty$ ou $-\infty$	$l' > 0$	$l' < 0$	$l' > 0$	$l' < 0$	0 et $v_n > 0$	0 et $v_n > 0$	0 et $v_n < 0$	0 et $v_n < 0$	0	$+\infty$ ou $-\infty$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} =$	$\frac{l}{l'}$	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	FI	FI

II.4 Formes indéterminées

Il y a quatre cas d'indétermination qui sont, en utilisant un abus d'écriture :

$$\ll \infty - \infty \gg, \ll 0 \times \infty \gg, \ll \frac{\infty}{\infty} \gg \text{ et } \ll \frac{0}{0} \gg$$

Pour lever une indétermination, le principe est alors de transformer l'écriture de l'expression étudiée pour se ramener aux cas connus.

III. Théorèmes sur les limites

III.1 Limites et inégalités

Soit (u_n) , (v_n) et (w_n) trois suites et l un réel. Si à partir d'un certain rang, on a :

Théorème de comparaison

- $u_n \geq v_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.
- $u_n \leq v_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$.

Théorème d'encadrement

$v_n \leq u_n \leq w_n$, et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = l$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$.

III.2 Limites d'une suite arithmétique

Soit (u_n) une suite arithmétique de premier terme u_p et de raison r non nulle.

- Si $r > 0$, alors la suite (u_n) diverge et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.
- Si $r < 0$, alors la suite (u_n) diverge et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$.

III.3 Limites d'une suite géométrique

Pour tout réel a strictement positif et tout entier naturel n , $(1+a)^n \geq 1+na$.

Soit q un réel.

- Si $q > 1$, alors la suite (q^n) diverge et $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty$.
- Si $q = 1$, alors la suite (q^n) converge et $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 1$.
- Si $-1 < q < 1$, alors la suite (q^n) converge et $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$.
- Si $q \leq -1$, alors la suite (q^n) diverge et n'a pas de limite.

IV. Convergence des suites monotones et bornées

- On dit qu'une suite (u_n) est **majorée** s'il existe un réel M tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq M$. M est appelé un **majorant** de la suite (u_n) .
- On dit qu'une suite (u_n) est **minorée** s'il existe un réel m tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq m$. m est appelé un **minorant** de la suite (u_n) .
- On dit que (u_n) est **bornée** si elle est à la fois majorée et minorée.

- Si une suite (u_n) est croissante et converge vers un réel l , alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq l$.
- Si une suite (u_n) est décroissante et converge vers un réel l , alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq l$.

- Si une suite (u_n) est **croissante et majorée**, alors elle **converge**.
- Si une suite (u_n) est **décroissante et minorée**, alors elle **converge**.

- Si une suite (u_n) est **croissante et non majorée**, alors elle **diverge vers $+\infty$** .
- Si une suite (u_n) est **décroissante et non minorée**, alors elle **diverge vers $-\infty$** .

V. Algorithme de calcul

Un algorithme est une suite finie d'instructions données dans un certain ordre permettant de résoudre un problème. Ce mot vient du nom du mathématicien perse Muhammad ibn Musa al-Khwarizmi (8^e siècle après J.C.), surnommé le père de l'algèbre.

Exemple 1

On souhaite mettre en œuvre un algorithme permettant de déterminer un seuil à partir duquel les termes de la suite sont supérieurs à un réel A donné.

Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = 3n^2 + 2$. On peut démontrer que (u_n) est croissante et que sa limite est $+\infty$. On a $u_0 = 3 \times 0^2 + 2 = 2$.

En langage de programmation, on a par exemple (sur TI) :

```
PROGRAM : SEUIL
: Prompt A
: 0 → N
: 2 → U
: While U < A
: N + 1 → N
: 3 * N^2 + 2 → U
: End
: Disp N
```

Exemple 2

Étant donné une suite géométrique de raison $q \in]0; 1[$, on souhaite mettre en œuvre un algorithme permettant de déterminer un seuil à partir duquel les termes de la suite sont inférieurs à un réel a donné.

On injecte à un patient une dose de 2 cm^3 de médicament. Chaque heure le volume du médicament dans le sang diminue de 12%. Pour tout entier n , on note u_n le volume du médicament en cm^3 .

On souhaite connaître la « demi-vie » du médicament, c'est-à-dire le moment où le médicament sera absorbé à 50%.

(u_n) est une suite géométrique de raison $q = 1 - \frac{12}{100} = 0,88$. Pour tout entier n , $u_n = 2 \times 0,88^n$.

Un algorithme se construit en trois phases : l'**initialisation**, le **traitement** et la **sortie**.

- L'initialisation consiste à affecter aux différentes variables de départ leur valeur. Ici, les deux variables sont n (l'indice de la suite qui correspond au nombre d'heures) qui débute à 0 et u (le volume de médicament dans le sang) qui débute à 2.
- Le traitement consiste à effectuer les différents calculs pour atteindre l'objectif. Ici, tant que u (le volume de médicament dans le sang) est supérieur à 1, on continue à calculer les termes de la suite.
- La sortie consiste à afficher le résultat trouvé. Ici, on affichera la valeur de n , c'est-à-dire au bout de combien d'heures le médicament sera à moitié absorbé.

En langage de programmation, on a par exemple (sur TI) :

```
PROGRAM : SEUIL
: 0 → N
: 2 → U
: While U > 1
: N + 1 → N
: 2 * 0,88^N → U
: End
: Disp N
```

```
PROGRAM : SEUIL
: 0 → N
: While 2 * 0,88^N > 1
: N + 1 → N
: End
: Disp N
```

L'algorithme nous donne un seuil de 6, c'est-à-dire qu'à partir de 6 heures après l'injection du médicament, il en restera moins de la moitié dans le corps du patient.

Limites de fonctions

I. Limites en l'infini

I.1 Limite infinie

- Une fonction f admet une limite infinie égale à $+\infty$ si tout intervalle ouvert de la forme $]A; +\infty[$ contient toutes les valeurs $f(x)$ pour x assez grand.

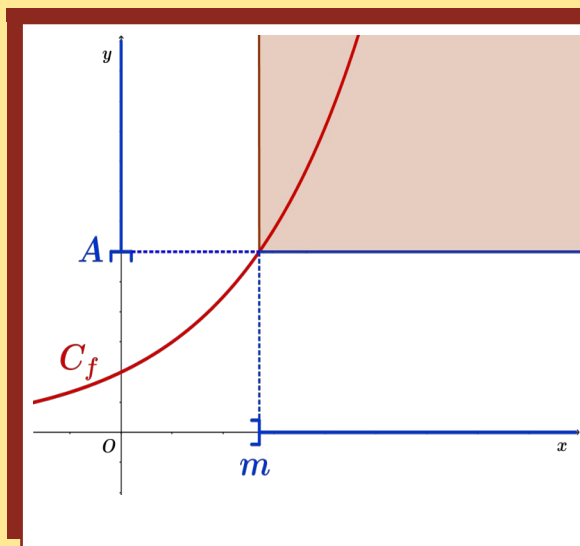
Autrement dit, pour tout réel A , il existe un réel m tel que si $x > m$, alors $f(x) > A$.

On note $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

- Une fonction f admet une limite infinie égale à $-\infty$ si tout intervalle ouvert de la forme $]-\infty; A[$ contient toutes les valeurs $f(x)$ pour x assez grand.

Autrement dit, pour tout réel A , il existe un réel m tel que si $x > m$, alors $f(x) < A$.

On note $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$.



On a pour tout entier naturel n non nul :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{x} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = +\infty \text{ si } n \text{ est pair}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = -\infty \text{ si } n \text{ est impair}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$$

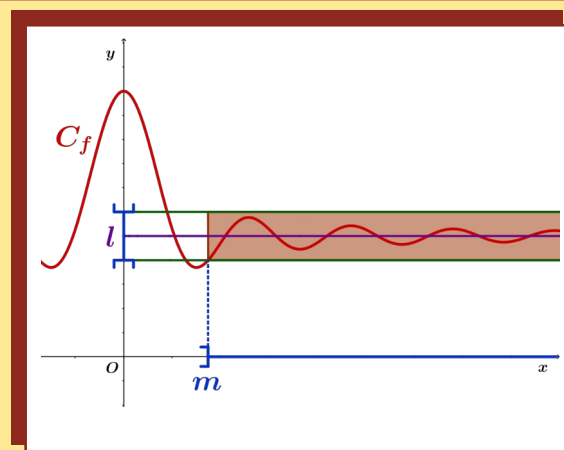
I.2 Limite finie

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et l un réel.

La fonction f admet une limite finie égale à l si tout intervalle ouvert contenant l contient toutes les valeurs $f(x)$ pour x assez grand.

Autrement dit, pour tout intervalle J contenant l , il existe un réel m tel que si $x > m$, alors $f(x) \in J$.

On note $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$.



Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$ ou $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l$, alors la droite d'équation $y = l$ est une **asymptote horizontale** à la courbe représentative de f en $+\infty$ ou $-\infty$.

On a pour tout réel k et tout entier naturel n non nul :

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} k = \lim_{x \rightarrow -\infty} k = k$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^n} = 0$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^n} = 0$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$

II. Limite en un point

II.1 Limite infinie

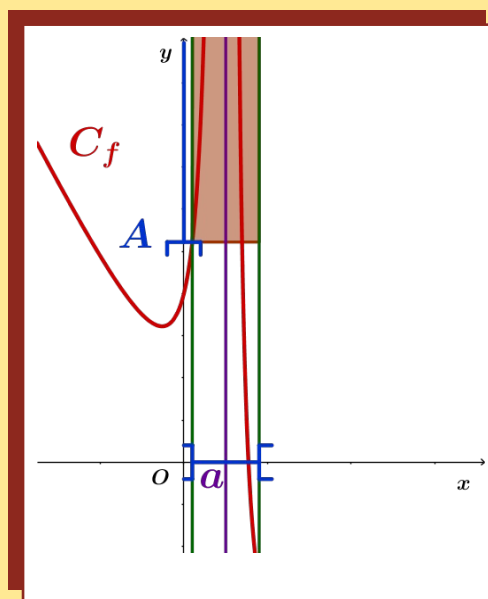
Soit f une fonction définie sur un intervalle I et a un réel étant une borne de I .

- La fonction f admet une limite infinie égale à $+\infty$ en a si tout intervalle ouvert de la forme $]A; +\infty[$ contient toutes les valeurs $f(x)$ pour x suffisamment proche de a .

Autrement dit, pour tout réel A , il existe un intervalle ouvert J contenant a tel que si $x \in J \cap I$, alors $f(x) > A$.
On note $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$.

- La fonction f admet une limite infinie égale à $-\infty$ en a si tout intervalle ouvert de la forme $]-\infty; A[$ contient toutes les valeurs $f(x)$ pour x suffisamment proche de a .

Autrement dit, pour tout réel A , il existe un intervalle ouvert J contenant a tel que si $x \in J \cap I$, alors $f(x) < A$.
On note $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$.



Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ ou $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$, alors la droite d'équation $x = a$ est une **asymptote verticale** à la courbe représentative de f en a .

II.2 Limite à gauche, limite à droite

- On dit que f admet une **limite à droite en a** lorsque f admet une limite quand x tend vers a avec $x > a$. On note cette limite $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x)$ ou $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$.
- On dit que f admet une **limite à gauche en a** lorsque f admet une limite quand x tend vers a avec $x < a$. On note cette limite $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} f(x)$ ou $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$.
- Soit a un réel et f une fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{a\}$.
La fonction f a une limite infinie en a si f possède une limite à gauche en a , une limite à droite en a (infinies) et que ces **limites sont égales**. On a alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$.

II.3 Limite finie

Une fonction f admet une limite finie l en a lorsque $f(x)$ est aussi proche de l que voulu pour x suffisamment proche de a . On note $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$.

III. Opérations sur les limites

III.1 Limites d'une somme de fonctions

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) =$	l	l	l	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim_{x \rightarrow a} g(x) =$	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) =$	$l + l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	FI

III.2 Limites d'un produit de fonctions

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) =$	l	$l > 0$	$l > 0$	$l < 0$	$l < 0$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	0
$\lim_{x \rightarrow a} g(x) =$	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \times g(x)) =$	ll'	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	FI

III.3 Limites d'un quotient de fonctions

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) =$	l	l	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$l > 0$ ou $+\infty$	$l < 0$ ou $-\infty$	$l > 0$ ou $+\infty$	$l < 0$ ou $-\infty$	0	$+\infty$ ou $-\infty$
$\lim_{x \rightarrow a} g(x) =$	l' et $l' \neq 0$	$+\infty$ ou $-\infty$	$l' > 0$	$l' < 0$	$l' > 0$	$l' < 0$	0 et $g(x) > 0$	0 et $g(x) > 0$	0 et $g(x) < 0$	0 et $g(x) < 0$	0	$+\infty$ ou $-\infty$
$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} =$	$\frac{l}{l'}$	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	FI	FI

IV. Théorèmes sur les limites

Limites en l'infini d'une fonction polynomiale

La limite en l'infini d'une fonction polynomiale est égale à la limite en l'infini de son terme de plus haut degré.

Limites en l'infini d'une fonction polynomiale

La limite en l'infini d'une fonction rationnelle est égale à la **limite en l'infini du quotient du terme de plus haut degré du numérateur par le terme de plus haut degré du dénominateur**.

Soit f une fonction définie sur un intervalle J et g une fonction définie sur un intervalle I tel que $g(x) \in J$ pour tout $x \in I$. On définit la composée de g par f comme la fonction définie sur I par : $(f \circ g)(x) = f(g(x))$.

On a le schéma suivant :

$$\begin{array}{ccccccc} f \circ g : & I & \rightarrow & J & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \xrightarrow{g} & g(x) & \xrightarrow{f} & f(g(x)) \end{array}$$

Limite d'une composée de fonctions

Soit les fonctions f et g et trois nombres a , b et c désignant un réel, $+\infty$ ou $-\infty$.

Si $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = b$ et $\lim_{X \rightarrow b} f(X) = c$, alors $\lim_{x \rightarrow a} f(g(x)) = c$.

Limite d'une composée d'une suite et d'une fonction

Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $]A; +\infty[$ et (u_n) une suite définie pour tout entier naturel $n \geq A$ par $u_n = f(n)$. Soit l un réel désignant un nombre, $+\infty$ ou $-\infty$.

Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$.

V. Limites et comparaison

Soit f , g et h trois fonctions définies un intervalle ouvert I et l et a deux réels tel que a appartient à I ou a est une borne de I . Si pour tout $x \in I$, on a :

Théorème de comparaison

- $f(x) \geq g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = +\infty$, alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$.
- $f(x) \leq g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = -\infty$, alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$.

Théorème d'encadrement

$g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ et $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = l$, alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$.

Croissances comparées

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^x = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

Dérivation et convexité

I. Rappels sur la dérivation

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et a un nombre réel de I . Soit h un nombre réel non nul suffisamment petit.

On dit que f est dérivable en a si le taux d'accroissement $\tau(h) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ tend vers un réel quand h tend vers 0, qu'on note $f'(a)$ et qu'on appelle nombre dérivé de la fonction f en a . On écrit alors : $f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \tau(h)$, soit $f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$.

Soit f une fonction dérivable en a . L'équation réduite de la tangente T à la courbe C_f au point d'abscisse a est : $T: y = f'(a)(x-a) + f(a)$.

Soit une fonction f définie sur un intervalle I .

On dit que f est dérivable sur I si elle est dérivable en tout point x de I .

On appelle fonction dérivée de f et on note f' la fonction qui à chaque x associe $f'(x)$.

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I .

- Pour tout réel x de I , $f'(x) \geq 0$ si et seulement si f est croissante sur I .
- Pour tout réel x de I , $f'(x) \leq 0$ si et seulement si f est décroissante sur I .
- Pour tout réel x de I , $f'(x) = 0$ si et seulement si f est constante sur I .
- Si f' est strictement positive (respectivement strictement négative) sur I , sauf éventuellement pour un nombre fini de valeurs de x où f' s'annule, alors f est strictement croissante (respectivement strictement décroissante) sur I .

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et a un réel de I .

- Si f admet un extremum local en a , alors $f'(a) = 0$.
- Si $f'(a) = 0$ et si f' change de signe en a , alors la fonction f admet un extremum local en a .

II. Compléments sur la dérivation

II.1 Fonction composée

Soit u une fonction définie sur un intervalle I à valeur dans un intervalle J et v une fonction définie sur un intervalle J .

La composée de u par v , notée $v \circ u$, est la fonction définie sur I par $(v \circ u)(x) = v(u(x))$.

On a le schéma suivant :

$$v \circ u : \begin{array}{ccccc} I & \xrightarrow{\quad} & J & \xrightarrow{\quad} & \mathbb{R} \\ x & \xrightarrow[u]{\quad} & u(x) & \xrightarrow[v]{\quad} & v(u(x)) \end{array}$$

Soit u une fonction définie sur un intervalle I et v une fonction définie sur un intervalle J telles que $u(x) \in J$ pour tout $x \in I$.
La fonction composée $v \circ u$ est dérivable sur I et pour tout réel $x \in I$, $(v \circ u)' = u'(v' \circ u)$.

Soit u et v deux fonctions.

- Si u et v sont de même monotonie, alors la fonction composée $v \circ u$ est croissante.
- Si u et v sont de monotonie contraire, alors la fonction composée $v \circ u$ est décroissante.

II.2 Dérivée seconde

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I . On note f' sa fonction dérivée.
La fonction f est **deux fois dérivable** sur I si f' est elle-même dérivable sur I .
On note f'' la dérivée de f' . Elle est appelée **dérivée seconde** de f .

III. Tableaux des dérivées

DÉRIVÉES DES FONCTIONS USUELLES

Fonction	D_f	Fonction dérivée	$D_{f'}$
$f(x) = k$, $k \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 0$	$\mathbb{R}$
$f(x) = mx + p$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = m$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$
$f(x) = \sqrt{x}$	$[0; +\infty[$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0; +\infty[$
$f(x) = x^n$, $n \geq 1$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \frac{1}{x^n}$, $n \geq 1$	$\mathbb{R}^*$	$f'(x) = -\frac{n}{x^{n+1}}$	$\mathbb{R}^*$
$f(x) = \sin x$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = \cos x$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \cos x$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = -\sin x$	$\mathbb{R}$
$f(x) = e^x$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = e^x$	$\mathbb{R}$

OPÉRATIONS SUR LES DÉRIVÉES

Fonction	Fonction dérivée
$u + v$	$u' + v'$
$\lambda u, \lambda \in \mathbb{R}$	$\lambda u'$
uv	$u'v + uv'$
$\frac{1}{v}, v(x) \neq 0$	$-\frac{v'}{v^2}$
$\frac{u}{v}, v(x) \neq 0$	$\frac{u'v - uv'}{v^2}$
$\sqrt{u}, u(x) \geq 0$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$
$u^n, n \geq 1$	$nu' u^{n-1}$
$\frac{1}{u^n}, n \geq 1 \text{ et } u(x) \neq 0$	$-n \frac{u'}{u^{n+1}}$
e^u	$u' e^u$
$v \circ u, u(x) \in J \text{ pour tout } x \in I$	$u'(v' \circ u)$

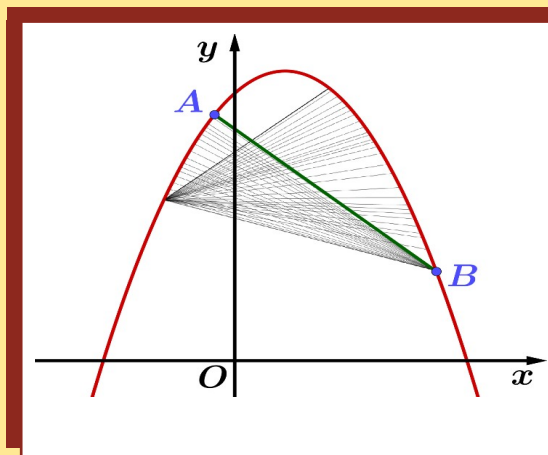
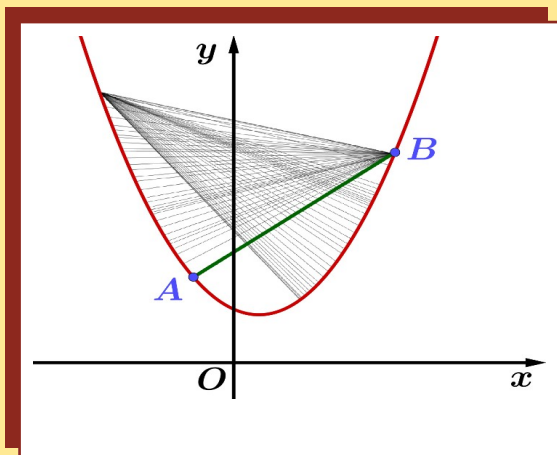
IV. Convexité

IV.1 Fonctions convexes et concaves

Soit f une fonction, C_f sa courbe représentative dans un repère et A et B deux points de C_f . Alors la droite (AB) est appelée **sécante** de C_f .

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et C_f sa courbe représentative dans un repère.

- f est **convexe** sur I si, pour tout $x \in I$, C_f est **en dessous de ses sécantes**.
- f est **concave** sur I si, pour tout $x \in I$, C_f est **au-dessus de ses sécantes**.



- Les fonctions carrée et exponentielle sont convexes sur $\mathbb{R}$.
- La fonction racine carrée est concave sur $[0; +\infty[$.
- La fonction inverse est concave sur $] -\infty; 0[$ et convexe sur $] 0; +\infty[$.
- La fonction cube est concave sur $] -\infty; 0]$ et convexe sur $[0; +\infty[$.

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I .

- Si f est une fonction convexe sur I , alors $-f$ est concave sur I .
- Si f est une fonction concave sur I , alors $-f$ est convexe sur I .

IV.2 Convexité des fonctions dérivables

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I .

- La fonction f est **convexe** sur I si et seulement si f' est **croissante** sur I .
- La fonction f est **concave** sur I si et seulement si f' est **décroissante** sur I .

Soit f une fonction définie et deux fois dérivable sur un intervalle I .

- La fonction f est **convexe** sur I si et seulement si f'' est **positive** sur I .
- La fonction f est **concave** sur I si et seulement si f'' est **négative** sur I .

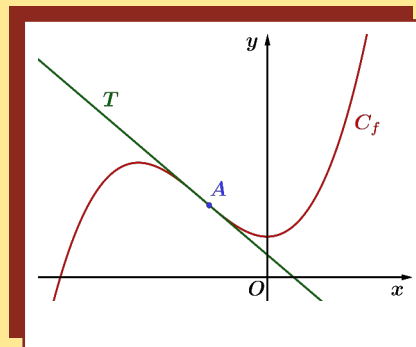
Soit f une fonction définie et deux fois dérivable sur I .

Si f'' est **positive** sur I , alors la courbe représentative de f est **au-dessus de chacune de ses tangentes**.

IV.3 Point d'inflexion

Soit f une fonction définie sur un intervalle I .

Un **point d'inflexion** est un point où la représentation graphique de f traverse sa tangente. Lorsque la courbe représentative d'une fonction admet un point d'inflexion, alors la fonction change de convexité.



Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I et a un réel de I .

f' change de sens de variations sur I en a si et seulement si sa courbe $C_{f'}$ admet un point d'inflexion au point d'abscisse a . Ce point a pour coordonnées $(a; f'(a))$.

Soit f une fonction définie et deux fois dérivable sur un intervalle I et a un réel de I .

La courbe représentative de f admet un point d'inflexion au point d'abscisse a si et seulement si f'' s'annule en changeant de signe en a . Ce point a pour coordonnées $(a; f(a))$.

Continuité

I. Notion de continuité

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

On dit que f est **continue** sur I si lorsque l'on trace la courbe de la fonction f , on ne lève pas le crayon. On dit qu'il n'y a pas de « saut » dans la représentation graphique de la fonction f .

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et a un réel de I .

- La fonction f est **continue en a** si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.
- La fonction f est **continue sur I** si elle est continue en tout point de I .

• Les fonctions polynômes, rationnelles, racine carrée, valeur absolue, exponentielle, sinus et cosinus sont continues sur tout intervalle sur lequel elles sont définies.

• La somme, le produit, le quotient et la composée de fonctions continues sont continues.

Une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ est continue sur I .

II. Continuité et suite

II.1 Image d'une suite par une fonction

Soit (u_n) une suite définie sur $\mathbb{N}$ et f une fonction définie sur un intervalle I contenant tous les termes de la suite. L'image de la suite (u_n) par la fonction f est la suite $(f(u_n))$.

II.2 Continuité et limite de suite

Soit (u_n) une suite convergente vers l et f une fonction continue sur un intervalle I contenant tous les termes de la suite. Alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = f\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n\right) = f(l)$.

II.3 Théorème du point fixe

Soit f une fonction continue sur un intervalle I dans lui-même et (u_n) une suite définie par son premier terme $u_p \in I$ et pour tout $n \geq p$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

Si (u_n) converge vers un réel l , alors $f(l) = l$.

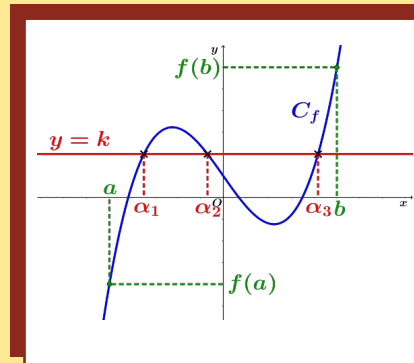
Remarques

- Le réel l est solution de l'équation $f(x) = x$.
- On dit que la fonction f est **stable par I** . Autrement dit, $f(I) \subset I$.
- Par abus de langage, on dit qu'on passe à la limite dans la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ pour obtenir l'égalité $f(l) = l$.

III. Théorème des valeurs intermédiaires

Théorème des valeurs intermédiaires (TVI)

Soit f une fonction définie et **continue** sur un intervalle $[a; b]$. Alors pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x)=k$ **admet au moins une solution** α dans l'intervalle $[a; b]$.



Théorème de Bolzano

Soit f une fonction définie et **continue** sur un intervalle $[a; b]$.

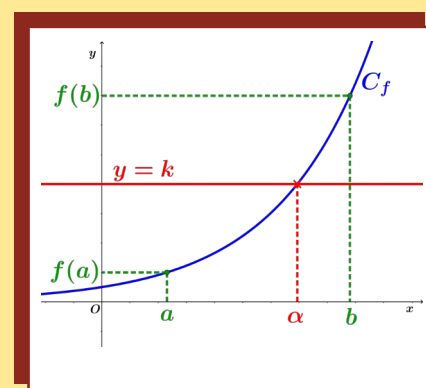
Si $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires, alors il existe **au moins un réel c** compris entre a et b tel que $f(c)=0$.

IV. Fonctions continues et strictement monotones

Théorème de la bijection

Soit f une fonction **continue et strictement monotone** sur un intervalle $[a; b]$. Alors :

- L'image de l'intervalle $[a; b]$ par la fonction f est l'intervalle $[f(a); f(b)]$.
- Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x)=k$ admet **une unique solution** α dans l'intervalle $[a; b]$.



Remarques

- Le terme « bijection » signifie qu'une image par la fonction f n'admet qu'un seul antécédent.
- On appelle aussi ce théorème le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires.
- Le corollaire s'applique aussi dans le cas d'un intervalle semi ouvert ($[a; b[$ ou $]a; b]$) ou d'un intervalle ouvert ($]a; b[$). On remplace alors le calcul de $f(a)$ (ou de $f(b)$) par le calcul de $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ (ou de $\lim_{x \rightarrow b} f(x)$), a et b pouvant être des réels, $-\infty$ ou $+\infty$.
- Ce corollaire permet d'affirmer l'existence d'une unique solution à une équation que l'on ne sait pas résoudre par le calcul. On cherche alors une valeur approchée de cette solution.

Soit f une fonction **continue et strictement monotone** sur un intervalle $[a; b]$.
Si $f(a) \times f(b) < 0$, alors l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution.

V. Méthodes

Méthode d'encadrement d'une solution par balayage

Avec la calculatrice on construit un tableau de valeurs de $f(x)$ à partir de $x=a$ avec un pas de 1 (à l'aide des touches « 2nde » et « déf table »).

On peut en déduire l'appartenance de la solution à un intervalle d'amplitude 1. On note $[p; p+1]$ cet intervalle. Puis on fait un tableau de valeurs à partir de $x=p$ avec un pas de 0,1 et on réitère ce procédé en diminuant le pas à chaque étape, jusqu'à obtenir la précision souhaitée.

Méthode d'encadrement d'une solution par dichotomie

Le principe de la dichotomie est de déterminer successivement l'intervalle dans lequel se situe la solution, en divisant par 2 l'amplitude de l'intervalle à chaque étape. Ainsi, on calcule le centre m de l'intervalle et on teste si la solution se trouve dans $[a, m]$ ou $[m; b]$.

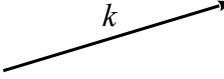
Si la solution est dans $[a, m]$ (respectivement $[m; b]$), on recommence ce procédé dans $[a, m]$ (respectivement $[m; b]$).

Méthode générale de résolution

En pratique, pour montrer que l'équation $f(x)=k$ admet une unique solution sur $[a; b]$, on peut procéder ainsi :

- On calcule la dérivée de f afin d'obtenir son signe ;
- On construit le tableau de variations de f sur l'intervalle $[a; b]$;
- Chaque « flèche oblique » traduisant la continuité et la stricte monotonie de la fonction sur un intervalle, on conclut sur l'unicité de la solution.

x	a	b
$f(x)$	$f(a)$	$f(b)$



Si l'on souhaite donner le signe de f , on détermine les éventuels intervalles où la fonction s'annule, c'est-à-dire les intervalles $[a; b]$ pour lesquels $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires.

Méthode : Solution d'une équation du type $f(x)=k$

Soit la fonction f définie sur $[2;3]$ par $f(x)=x^3-3x^2+2$.

On souhaite démontrer que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution dans $[2;3]$ et donner une valeur approchée à 10^{-2} près de cette solution.

- On calcule la dérivée de f :

Pour tout $x \in [2;3]$, $f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$.

- On étudie le signe de la dérivée de f :

Pour tout $x \in [2;3]$, $3x > 0$ et $x-2 \geq 0$, donc $f'(x) \geq 0$.

Donc f est strictement croissante sur l'intervalle $[2;3]$ (car elle ne s'annule qu'en un point isolé).

- On construit le tableau de variations de f :

x	2	3
$f'(x)$	+	
$f(x)$	-2	2

$$f(2)=2^3-3 \times 2^2+2=8-12+2=-2 \text{ et } f(3)=3^3-3 \times 3^2+2=27-27+2=2$$

- On utilise le TVI (ou le corollaire) :

La fonction f est continue et strictement croissante sur $[2;3]$. De plus, l'image de l'intervalle $[2;3]$ par la fonction f est l'intervalle $[-2;2]$.

Donc d'après le théorème de la bijection, l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α .

- On utilise la calculatrice pour déterminer un encadrement de la solution :

X	Y
2	-2
2,1	-1,969
2,2	-1,872
2,3	-1,703
2,4	-1,456
2,5	-1,125
2,6	-0,704
2,7	-0,187
2,8	0,432
2,9	1,159
3	2

La solution est comprise entre 2,7 et 2,8

X	Y
2,7	-0,187
2,71	-0,13
2,72	-0,072
2,73	-0,012
2,74	0,048
2,75	0,1094
2,76	0,1718
2,77	0,2352
2,78	0,2998
2,79	0,3653
2,8	0,432

La solution est comprise entre 2,73 et 2,74

Fonction exponentielle

I. Généralités sur la fonction exponentielle

La **fonction exponentielle** est l'unique fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$.
On note $\exp(x) = e^x$.

II. Propriétés algébriques

Pour tous réels x et y et tout entier relatif n , on a :

- $e \approx 2,718$
- $e^0 = 1$
- $e^1 = e$
- $e^x \times e^{-x} = 1$
- $e^x \neq 0$
- $e^{x+y} = e^x + e^y$
- $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$
- $e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}$
- $(e^x)^n = e^{nx}$

III. Étude de la fonction exponentielle

III.1 Signe

La fonction exponentielle est **strictement positive** sur $\mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x > 0$.

III.2 Variation

La fonction exponentielle est **strictement croissante** sur $\mathbb{R}$.

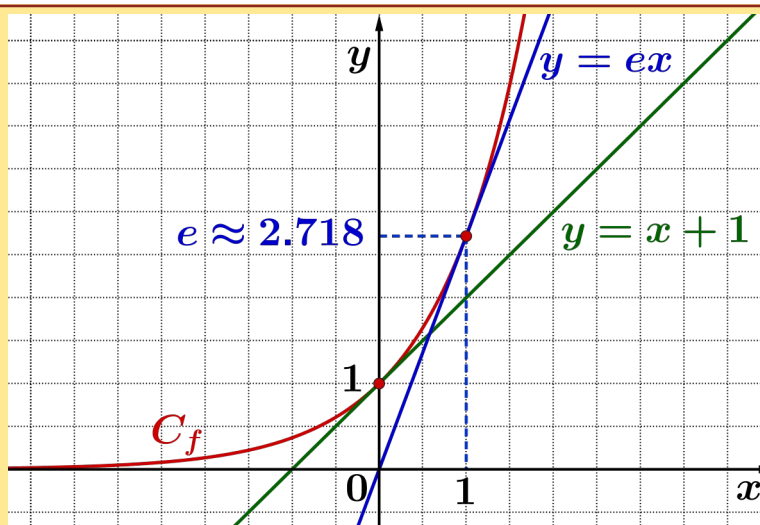
III.3 Limites (hors programme)

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$

III.4 Tableau

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	+			
$f(x)$				

III.5 Représentation graphique



Équations de tangente :

- L'équation de la tangente au point d'abscisse 0 est $T_0 : y = x + 1$.
- L'équation de la tangente au point d'abscisse 1 est $T_1 : y = ex$.

IV. Lien avec les suites géométriques

Soit $a \in \mathbb{R}$. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier n par $u_n = e^{na}$.

La suite (u_n) est une suite géométrique de raison e^a . Alors :

- Si $a > 0$, la suite (u_n) est strictement croissante et $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{na} = +\infty$.
- Si $a < 0$, la suite (u_n) est strictement décroissante et $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{na} = 0$.

V. Équations de inéquations

Pour tous réels x et y , on a :

- Si $x \leq 0$, alors $0 < e^x \leq 1$
- Si $x \geq 0$, alors $1 \leq e^x$
- $e^x = e^y \Leftrightarrow x = y$
- $e^x < e^y \Leftrightarrow x < y$

VI. Les fonctions exponentielles de la forme e^u

Soit u une fonction définie et dérivable sur un intervalle I .

- La fonction e^u définie par $x \rightarrow e^{u(x)}$ est appelée exponentielle de u .
- La fonction $x \rightarrow e^{u(x)}$ est **strictement positive** sur son ensemble de définition.

Soit f une fonction définie par $f(x) = e^{u(x)}$ où u est une fonction dérivable sur un intervalle I .

- La fonction f est dérivable sur I et on a pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = u'(x)e^{u(x)}$.
- La fonction f a le même sens de variation que la fonction u .

Fonction logarithme népérien

I. Généralités sur la fonction logarithme népérien

La **fonction logarithme népérien** est la fonction **réciroque** de la fonction exponentielle. Elle est définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ et est noté $\ln$. Pour tout $x \in \mathbb{R}^{+*}$, $f(x) = \ln(x)$.

Relation entre les fonctions $\exp$ et $\ln$

Pour tout y réel strictement positif et x réel, on a :

- $y = e^x \Leftrightarrow \ln(y) = x$
- $\ln(e^x) = x$ et $e^{\ln(y)} = y$

II. Propriétés algébriques

Pour tous réels strictement positifs x et y et tout entier relatif n , on a :

- $\ln(1) = 0$
- $\ln(e) = 1$
- $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$
- $\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x)$
- $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$
- $\ln(x^n) = n \ln(x)$
- $\ln(\sqrt{x}) = \frac{1}{2} \ln(x)$

III. Étude de la fonction exponentielle

III.1 Dérivée

La fonction $\ln$ est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et, pour tout réel $x > 0$, $\ln'(x) = \frac{1}{x}$.

III.2 Signe

- La fonction logarithme népérien est **négative** sur $]0; 1]$. Pour tout $x \in]0; 1]$, $\ln(x) \leq 0$.
- La fonction logarithme népérien est **positive** sur $[1; +\infty[$. Pour tout $x \in [1; +\infty[$, $\ln(x) \geq 0$.

III.3 Variation

La fonction $\ln$ est **strictement croissante** sur $\mathbb{R}^{+*}$.

III.4 Limites

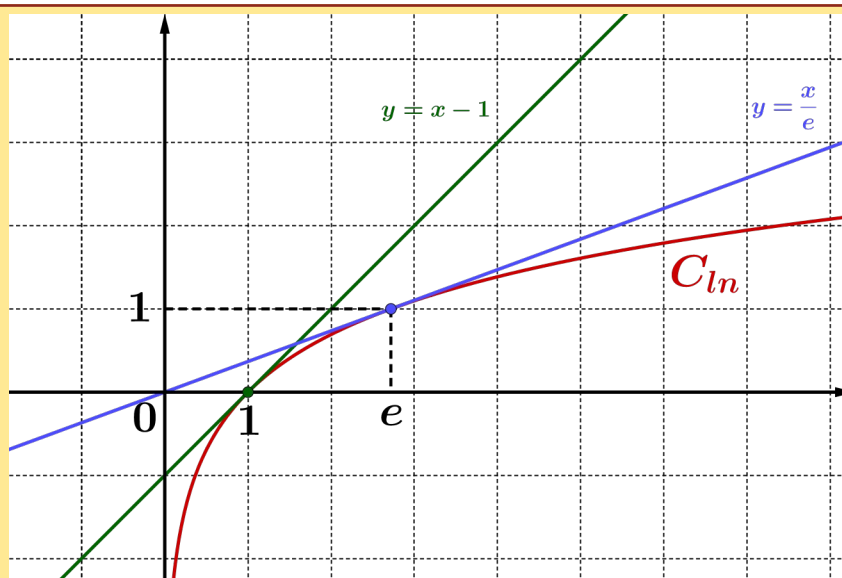
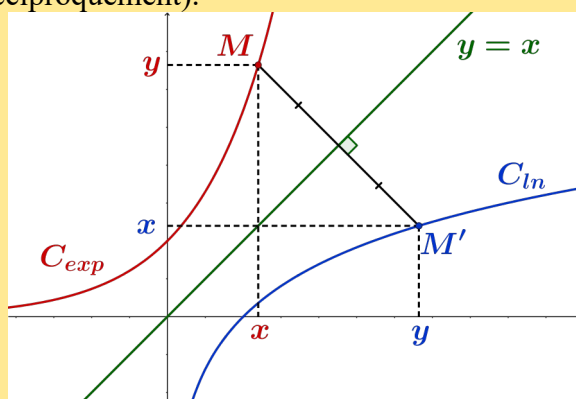
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty$

III.5 Tableau

x	0	1	e	$+\infty$
$f'(x)$	$ $		+	
$f(x)$	$-\infty$	0	1	$+\infty$

III.6 Représentation graphique

Dans un repère orthonormé, la courbe représentative de la fonction logarithme népérien peut être obtenue comme la courbe image de la représentation de la fonction exponentielle par la symétrie d'axe la droite $y=x$ (et réciproquement).



Équations de tangente :

- L'équation de la tangente au point d'abscisse 1 est $T_1: y=x-1$.
- L'équation de la tangente au point d'abscisse e est $T_e: y=\frac{x}{e}$.

III.7 Croissances comparées

Soit n un entier naturel non nul. Alors :

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0 & \quad \bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x) = 0 & \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x^n} = 0 & \bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} x^n \ln(x) = 0 \end{aligned}$$

IV. Équations de inéquations

Pour tous réels strictement positifs x et y , on a :

$$\begin{aligned} \bullet \ln(x) = \ln(y) &\Leftrightarrow x = y \\ \bullet \ln(x) < \ln(y) &\Leftrightarrow 0 < x < y \\ \bullet \ln(x) > \ln(y) &\Leftrightarrow x > y > 0 \end{aligned}$$

Pour tout réel x strictement positif et tout réel y , on a :

$$\begin{aligned} \bullet \ln(x) = y &\Leftrightarrow x = e^y \\ \bullet \ln(x) < y &\Leftrightarrow 0 < x < e^y \\ \bullet \ln(x) > y &\Leftrightarrow x > e^y \end{aligned}$$

Attention !

Pour les équations et les inéquations avec les logarithmes, ne pas oublier de commencer par définir les conditions d'existence (les expressions contenues dans un logarithme doivent être positives).

V. Fonctions composées $x \rightarrow \ln(u(x))$

Soit u une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle I .

On considère la fonction composée f définie par $f = \ln \circ u$.

Pour tout $x \in I$, $f(x) = \ln(u(x))$. On la note aussi $f = \ln(u)$.

Soit f la fonction définie par $f = \ln(u)$ où u est une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle I . La fonction f est dérivable sur I et pour tout réel $x \in I$, $f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$.

Soit f une fonction définie par $f(x) = \ln(u(x))$ où u est une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle I . Alors la fonction f a le même sens de variation que la fonction u .

VI. Fonction logarithme décimal

La fonction **logarithme décimal** est la fonction, notée $\log$, définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par $\log(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(10)}$.

Remarques

- $\ln(10) > 0$, donc le nombre $k = \frac{1}{\ln(10)}$ est strictement positif. Donc, de $\log(x) = k \ln(x)$, on en déduit que la fonction $\log$ a le même sens de variation que la fonction $\ln$.
- Toutes les propriétés analytiques de la fonction $\ln$ s'appliquent à la fonction $\log$.
- Les fonctions $\ln$ et $\log$ sont intégrées de manière distincte dans les calculatrices.

Utilisations du logarithme décimal

- En chimie, on exprime le caractère acido-basique d'une solution au moyen d'un indicateur noté pH . On a $pH = -\log[H_3O^+]$ où $[H_3O^+]$ est exprimée en $mol.L^{-1}$.
- Sur l'échelle de Richter, la magnitude d'un tremblement de terre est donnée par la formule $R = \log\left(\frac{I}{I_0}\right)$, I étant l'intensité du tremblement de terre et I_0 une intensité minimale.
- La puissance d'un son est donnée en décibels par $10 \log\left(\frac{I}{I_0}\right)$, I_0 étant l'intensité la plus faible perceptible par l'oreille humaine.
- D'après la loi de Benford, lorsqu'on tire au hasard un nombre dans une série de nombres quelconques, la probabilité que le premier chiffre significatif soit le chiffre d est environ égale à $\log\left(1 + \frac{1}{d}\right)$. Ainsi, la probabilité que le premier chiffre significatif soit 1 est environ égale à $\log(2)$. Cette loi est utilisée en France pour détecter les fraudes fiscales.

Primitives et équations différentielles

I. Équation différentielle $y' = f$ et primitives

I.1 Équation différentielle $y' = f$

Soit f une fonction continue sur un intervalle I .

- On dit qu'une fonction F est **solution de l'équation différentielle $y' = f$** sur I lorsque F est dérivable sur I et $F' = f$.
- Résoudre sur I une équation différentielle $y' = f$, c'est trouver toutes les fonctions F dérivables sur I telles que $F' = f$.

Remarques

- La dérivée est associée à un taux de variation, quotient des variations de y sur les variations de x , d'où le terme différentiel.
- On peut être amené à utiliser l'écriture différentielle $y' = \frac{dy}{dx}$ ou $y' = \frac{dy}{dt}$.

I.2 Ensemble des primitives d'une fonction continue

Soit f une fonction continue définie sur un intervalle I .

On appelle **primitive** de f sur I toute fonction F dérivable sur l'intervalle I telle que :

$$\text{Pour tout réel } x \in I, F'(x) = f(x)$$

Remarques

- D'après la définition, une primitive est toujours dérivable et donc continue.
- F est une primitive de f sur I si et seulement si F est solution de l'équation différentielle $y' = f$. Résoudre sur I l'équation $y' = f$ revient donc à déterminer toutes les primitives de f sur I .

Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I qui admet une primitive F sur I .

Alors la fonction f **admet une infinité de primitives** sur I et toute primitive G de f sur I est définie par : $G(x) = F(x) + k$, où $k \in \mathbb{R}$.

Soit f une fonction continue admettant une primitive sur un intervalle I . Soit $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}$. Il existe une unique primitive F de f sur I telle que $F(x_0) = y_0$.

Autrement dit, l'équation différentielle $y' = f$ admet une unique solution F telle que $F(x_0) = y_0$.

Remarques

- La condition $F(x_0) = y_0$ est parfois appelée **condition initiale** en référence à certaines situations rencontrées en physique.
- En cinétique (étude des mouvements), l'utilisation des conditions initiales est primordiale pour obtenir les équations du mouvement et par la suite la loi horaire.

Toute fonction continue sur un intervalle I admet des primitives sur I .

II. Primitives et opérations

II.1 Primitives des fonctions usuelles

Fonction f	Primitive F	Intervalle I
$f(x)=k$	$F(x)=kx$	$\mathbb{R}$
$f(x)=x$	$F(x)=\frac{x^2}{2}$	$\mathbb{R}$
$f(x)=x^n, n \in \mathbb{N}$	$F(x)=\frac{x^{n+1}}{n+1}$	$\mathbb{R}$
$f(x)=\frac{1}{x}$	$F(x)=\ln(x)$	$]0; +\infty[$
$f(x)=\frac{1}{x^2}$	$F(x)=-\frac{1}{x}$	$]-\infty; 0[$ ou $]0; +\infty[$
$f(x)=\frac{1}{x^n}, n \geq 2$	$F(x)=-\frac{1}{(n-1)x^{n-1}}$	$]-\infty; 0[$ ou $]0; +\infty[$
$f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$	$F(x)=2\sqrt{x}$	$]0; +\infty[$
$f(x)=e^x$	$F(x)=e^x$	$\mathbb{R}$
$f(x)=\sin(x)$	$F(x)=-\cos(x)$	$\mathbb{R}$
$f(x)=\cos(x)$	$F(x)=\sin(x)$	$\mathbb{R}$

II.2 Primitives de $f+g$ et de kf avec k un réel

- Si F et G sont des primitives respectives des fonctions continues f et g sur un intervalle I , alors $F+G$ est une primitive de $f+g$ sur I .
- Si F est une primitive de la fonction continue f sur un intervalle I et si k est un réel, alors kF est une primitive de kf sur I .

II.3 Primitives des fonctions composées

Soit u une fonction définie sur un intervalle I et v une fonction définie sur un intervalle J telles que $u(x) \in J$ pour tout $x \in I$.

La fonction composée $v \circ u$ est une primitive sur I de $u'(v' \circ u)$.

Les dérivées de certains types de fonctions se déduisent des résultats connus sur les dérivées.

On obtient donc le tableau des fonctions composées suivant, où u est une fonction dérivable sur un intervalle I de dérivée continue sur I .

Fonction f	Primitive F	Conditions
$u' u^n, n \in \mathbb{N}$	$\frac{u^{n+1}}{n+1}$	
$\frac{u'}{u^n}, n \geq 2$	$-\frac{1}{(n-1)u^{n-1}}$	Pour tout $x \in I, u(x) \neq 0$
$\frac{u'}{u} = u' u^{-1}$	$\ln(u)$	Pour tout $x \in I, u(x) \neq 0$
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}$	Pour tout $x \in I, u(x) > 0$
$u' e^u$	e^u	

Remarques

- On pourra vérifier le résultat en dérivant la primitive obtenue et ainsi voir si l'on retombe sur f .
- Trouver une primitive n'est pas toujours chose facile. Des manipulations plus sophistiquées (par exemple pour les fonctions rationnelles ou les fonctions possédant des radicaux) sont parfois nécessaires pour déterminer une primitive. Parfois la primitive ne correspond à aucune fonction connue, elle est alors uniquement définie par une intégrale (par exemple une primitive de e^{-x^2}). Contrairement à la dérivation qui est toujours possible, la recherche de primitive s'avère donc parfois impossible.

Attention !

Bien adapter le coefficient lorsque cela est nécessaire pour obtenir une forme connue.

III. Équations différentielles

III.1 Définition

- Une **équation différentielle** est une égalité reliant une fonction dérivable et ses dérivées successives, et éventuellement d'autres fonctions.
- Une **solution d'une équation différentielle** est une fonction dérivable qui vérifie cette égalité.

Remarques

- Résoudre une équation différentielle, c'est trouver toutes les fonctions solutions vérifiant l'égalité.
- Une équation différentielle met en jeu une fonction et ses dérivées successives. Cependant, nous nous limiterons essentiellement dans ce chapitre à l'étude des **équations différentielles du premier ordre**, c'est-à-dire les équations différentielles reliant une fonction dérivable à sa dérivée première.
- De même que pour une dérivée première, on peut être amené à utiliser l'écriture différentielle

$$y'' = \frac{d^2 y}{dx^2} \quad \text{ou} \quad y'' = \frac{d^2 y}{dt^2}.$$

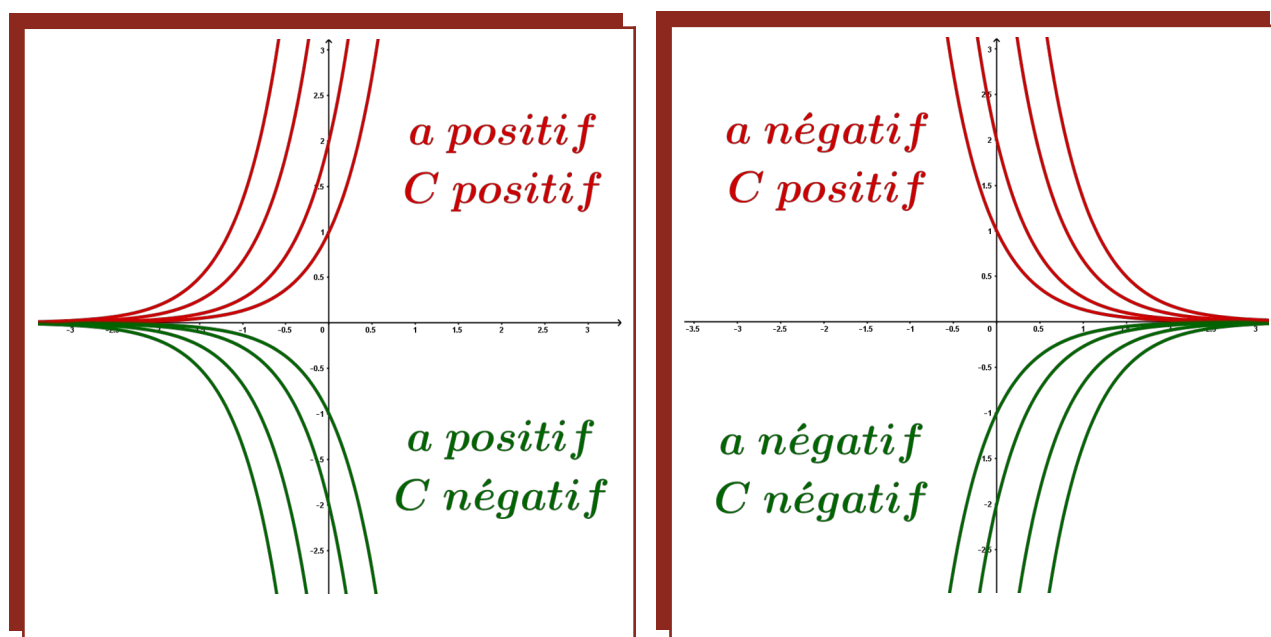
III.2 Équation différentielle $y' = ay$

Soit a un réel. L'équation différentielle $(E_0): y' = ay$ est appelée **équation différentielle linéaire homogène du premier ordre à coefficients constants**.

Les solutions de l'équation différentielle $(E_0): y' = ay$ sont les fonctions y définies sur $\mathbb{R}$ de la forme $y(x) = Ce^{ax}$, où C est un réel.

Allures des courbes

Les courbes des solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' = ay$ ont les allures suivantes :



Soit $(E_0): y' = ay$ une **équation différentielle linéaire homogène du premier ordre à coefficients constants** et $(x_0; y_0) \in \mathbb{R}^2$.

Il existe une unique solution y_0 de (E_0) telle que $y(x_0) = y_0$.

Soit y_1 et y_2 deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, $(E_0): y' = ay$ une équation différentielle et k un réel. Si les fonctions y_1 et y_2 sont solutions de l'équation différentielle (E_0) , alors $y_1 + y_2$ et ky_1 sont aussi solutions de (E_0) .

III.3 Équation différentielle $y' = ay + b$ avec $a \neq 0$

Soit a et b des réels tels que $a \neq 0$. L'équation différentielle $(E): y' = ay + b$ est appelée **équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants avec second membre**.

Les solutions de l'équation différentielle $(E): y' = ay + b$ sont les fonctions y définies sur $\mathbb{R}$ de la forme $y(x) = Ce^{ax} - \frac{b}{a}$, où C est un réel.

III.4 Équation différentielle $y' = ay + f$ avec $a \neq 0$

Soit a un réel non nul et f une fonction continue. L'équation différentielle $(E): y' = ay + f$ est appelée **équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants avec second membre**.

Soit ϕ une solution particulière de l'équation différentielle $(E): y' = ay + f$.
Les solutions de l'équation différentielle (E) sont les fonctions y définies sur $\mathbb{R}$ de la forme $y(x) = Ce^{ax} + \phi(x)$, où C est un réel.

Soit ϕ une solution particulière de l'équation différentielle $(E): y' = ay + f$.
Alors y est une solution de (E) si et seulement si $y - \phi$ est une solution de l'équation homogène associée $(E_0): y' = ay$.

Méthode : Résolution de l'équation différentielle $(E): y' = ay + f$

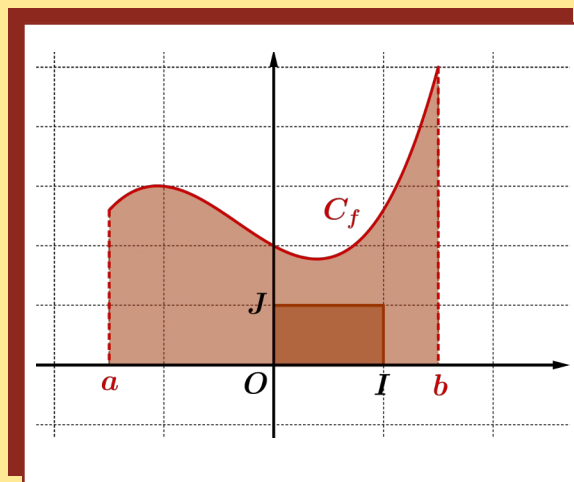
- On détermine une solution particulière ϕ de l'équation (E) .
- On écrit l'équation homogène associée $(E_0): y' = ay$ et ses solutions $x \rightarrow Ce^{ax}$ où $C \in \mathbb{R}$.
- On détermine toutes les solutions de l'équation (E) en effectuant la somme des solutions de (E_0) et de ϕ .

Calcul intégral

I. Intégrale d'une fonction continue positive

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a; b]$ (avec $a \leq b$) et C_f sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O; I, J)$. On appelle :

- **unité d'aire** l'aire du rectangle construit à l'aide des points O , I et J . On la note **u.a.** .
- **Domaine sous la courbe** le domaine délimité par la courbe C_f , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=a$ et $x=b$. Ce domaine est l'ensemble des points $M(x; y)$ tels que :
 $a \leq x \leq b$ et $0 \leq y \leq f(x)$
- **Intégrale de f sur $[a; b]$** la mesure de l'aire, en unité d'aire, du domaine situé sous la courbe.
 On la note $\int_a^b f(x) dx$.



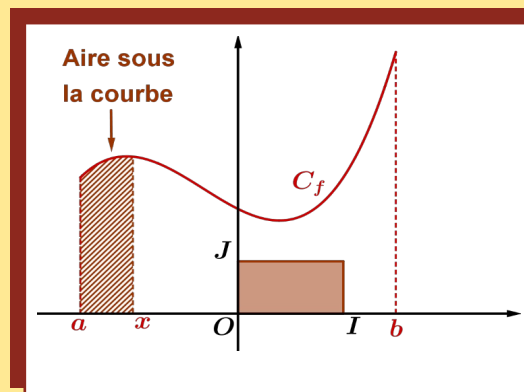
II. Primitive d'une fonction continue

Théorème fondamental

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a; b]$. La fonction F définie par

$F(x) = \int_a^x f(t) dt$ est dérivable sur $[a; b]$ et a pour dérivée f . Ainsi $F' = f$.

La fonction F est la primitive de f sur $[a; b]$ qui s'annule en a .



Soit f une fonction continue définie sur un intervalle I .

On appelle **primitive** de f sur I toute fonction F dérivable sur l'intervalle I telle que :

$$\text{Pour tout réel } x \in I, F'(x) = f(x)$$

Toute fonction continue sur un intervalle I admet des primitives sur I .

III. Intégrale d'une fonction continue quelconque

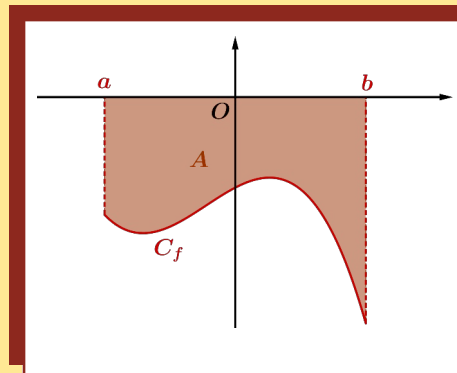
Soit f une fonction continue sur un intervalle I , F une primitive de f et a et b deux réels de I . L'intégrale de f entre a et b est définie par :

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Soit f une fonction continue et négative sur un intervalle I et a et b deux réels de I .

On appelle intégrale de f sur $[a; b]$, et on note $\int_a^b f(x) dx$, l'opposé de l'aire A , en unités d'aire, délimitée par la courbe C_f , l'axe des abscisses et les droites d'équation $x=a$ et $x=b$.

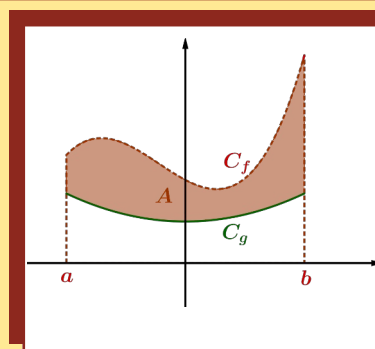
Ainsi $A = -\int_a^b f(x) dx$.



Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[a; b]$ telles que $f(x) \geq g(x)$.

On appelle A l'aire comprise entre les deux courbes et les droites d'équation $x=a$ et $x=b$.

Ainsi $A = \int_a^b (f - g)(x) dx$.



IV. Propriétés de l'intégrale

Soit f et g des fonctions continues sur un intervalle I et α et β des réels.

- Pour tout $a \in I$, $\int_a^a f(x) dx = 0$.
- Pour tout $(a; b) \in I^2$, $\int_b^a f(x) dx = -\int_a^b f(x) dx$.
- **Relation de Chasles** : Pour tout $(a; b; c) \in I^3$, $\int_a^c f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx$.
- **Linéarité** : Pour tout $(a; b) \in I^2$, $\int_a^b (\alpha f + \beta g)(x) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx$.

Parité

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et a un réel.

- Si f est paire, alors $\int_{-a}^0 f(x) dx = \int_0^a f(x) dx$.
- Si f est impaire, alors $\int_{-a}^0 f(x) dx = -\int_0^a f(x) dx$.

Remarques

- Si une fonction est paire, alors d'après la relation de Chasles, on a :

$$\int_{-a}^a f(x) dx = \int_{-a}^0 f(x) dx + \int_0^a f(x) dx = \int_0^a f(x) dx + \int_0^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$$

- Si une fonction est impaire, alors d'après la relation de Chasles, on a :

$$\int_{-a}^a f(x) dx = \int_{-a}^0 f(x) dx + \int_0^a f(x) dx = -\int_0^a f(x) dx + \int_0^a f(x) dx = 0$$

Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle I , a et b des réels de I tels que $a \leq b$.

Positivité

- Si f est positive sur $[a; b]$, alors $\int_a^b f(x) dx \geq 0$.

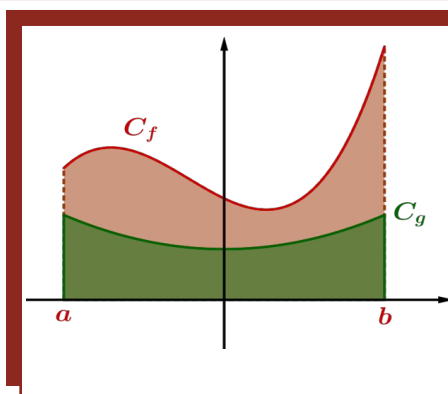
- Si f est négative sur $[a; b]$, alors $\int_a^b f(x) dx \leq 0$.

Inégalité

Si pour tout $x \in [a; b]$, $f(x) \geq g(x)$, alors $\int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx$.

Remarque

Dans le cas où f et g sont positives sur $[a; b]$, si $f(x) \geq g(x)$ alors l'aire sous la courbe représentative de f est inférieure ou égale à l'aire sous la courbe représentative de g .

**Valeur moyenne**

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et a et b deux réels de I tels que $a < b$.

La **valeur moyenne** de la fonction f sur $[a; b]$ est le réel μ défini par :

$$\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

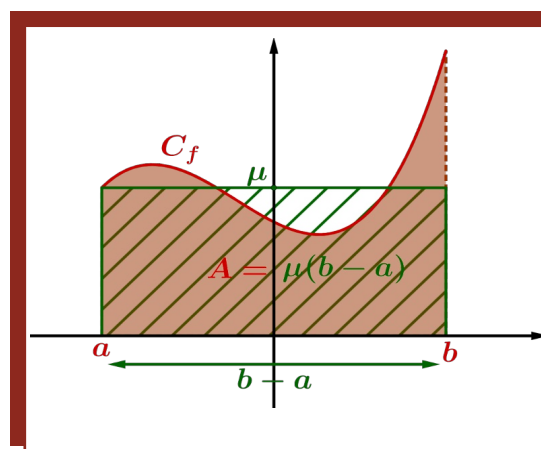
Interprétation graphique

La valeur moyenne μ est telle que :

$$\int_a^b f(x) dx = \mu(b-a)$$

Ainsi, lorsque f est continue et positive sur un intervalle $[a; b]$, la valeur moyenne μ peut-être interprété comme la hauteur du rectangle de base $b-a$ et ayant la même aire que le domaine A sous la courbe C_f .

Ainsi $A = \int_a^b f(x) dx = \mu(b-a)$.



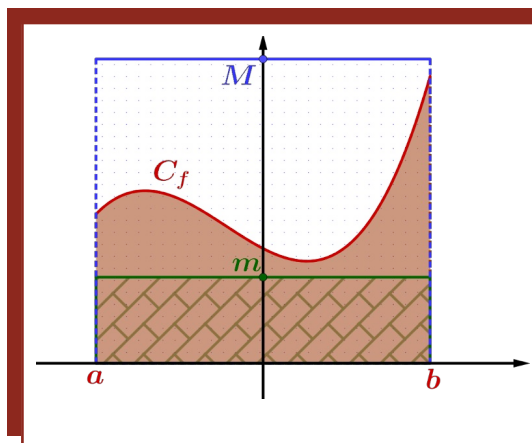
Inégalité de la moyenne

Soit f une fonction continue sur un intervalle I , a et b deux réels de I tels que $a \leq b$.
 Soit deux réels m et M tels que pour tout $x \in [a; b]$, $m \leq f(x) \leq M$. Alors :

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$$

Interprétation graphique

Si la fonction f est bornée sur $[a; b]$ par deux constantes m et M positives, alors l'inégalité de la moyenne traduit le fait que l'aire sous la courbe C_f sur $[a; b]$ est comprise entre les aires des rectangles construits sur $[a; b]$ et de hauteurs respectives m et M .

**V. Intégration par parties****Intégration par parties**

Soit u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I telles que u' et v' soient continues sur I . Pour tout $(a; b) \in I^2$, on a $\int_a^b (u'v)(x) dx = [uv](x)_a^b - \int_a^b (uv')(x) dx$

Remarques

- Le choix des fonctions u' et v est important. Certaines fonctions sont plus faciles à intégrer.
- Il est parfois utile de prendre $u'(x) = 1$.

Fonctions trigonométriques

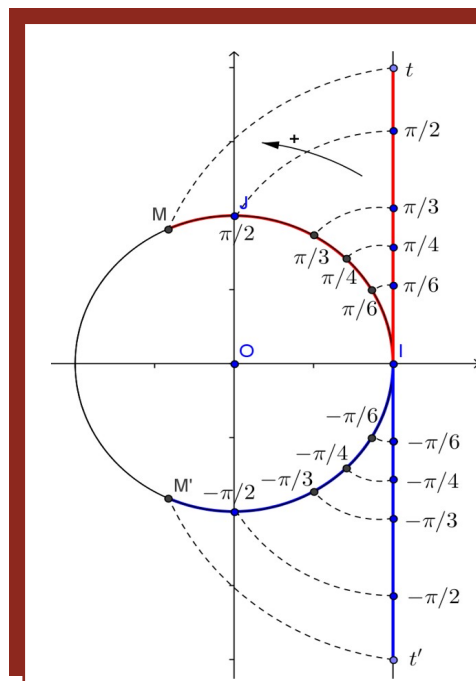
I. Cercle trigonométrique

Le **cercle trigonométrique** est un cercle de centre O et de rayon 1 sur lequel on choisit un sens de parcours, le sens direct ou indirect.

Enroulement de la droite des réels :

Soit d une droite numérique graduée dont le zéro coïncide avec le point I . Quand on enroule, sur le cercle C , la demi-droite des réels positifs dans le sens direct, et celle des réels négatifs dans le sens indirect, chaque réel t vient s'appliquer sur un point M du cercle C . On dit alors que M est l'image de t sur le cercle C .

La longueur (périmètre) du cercle trigonométrique étant 2π , deux réels t_1 et t_2 ont même point image sur C si et seulement si l'enroulement de la droite des réels entre t_1 et t_2 correspond à un nombre entier de tours de C .



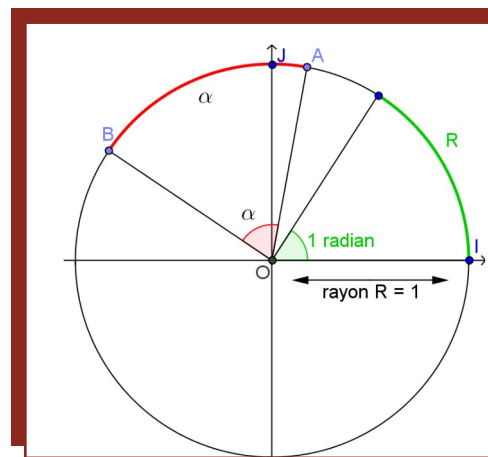
Tout point du cercle est l'image d'une infinité de réels.

Si t est l'un deux, les autres sont les réels $t + 2k\pi$, où k est un entier relatif.

II. Le radian

Le **radian** est l'unité de mesure des angles telle que la mesure en radian d'un angle est égale à la longueur de l'arc que cet angle intercepte sur un cercle de rayon R .

Les mesures en degré et en radian d'un angle sont proportionnelles : $180 \times \alpha = \pi \times d$.



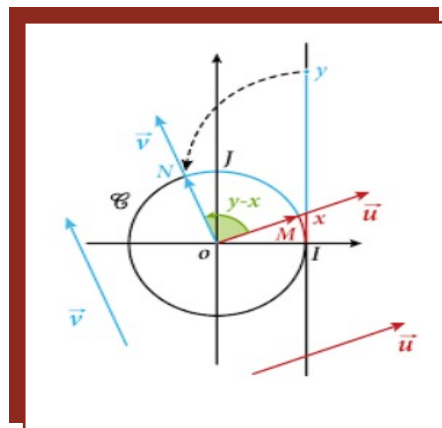
Angle d en degré	180	90	60	45	30	0
Angle α en radian	π	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	0

III. Mesure d'un angle orienté et mesure principale

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
On considère deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et on construit sur le cercle trigonométrique les points M et N tels que $\overrightarrow{OM}$ soit colinéaire et de même sens que $\vec{u}$ et $\overrightarrow{ON}$ soit colinéaire et de même sens que $\vec{v}$.

• La mesure de l'**angle orienté** $(\vec{u}, \vec{v})$ est égale à celle de l'angle orienté $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON})$.

• Pour tout réel x associé au point M et tout réel y associé au point N , $y-x$ est une mesure en radian de l'angle orienté $(\vec{u}, \vec{v})$.



• L'unique mesure en radian d'un angle orienté $(\vec{u}, \vec{v})$ appartenant à l'intervalle $]-\pi; \pi]$ est appelé la **mesure principale** de cet angle.

• La valeur absolue de la mesure principale d'un angle orienté $(\vec{u}, \vec{v})$ est égale à la mesure, en radian, de l'**angle géométrique** défini par $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Méthode : Déterminer la mesure principale d'un angle orienté

Déterminons la mesure principale de l'angle $x = \frac{273\pi}{12}$.

1^{ère} méthode : On cherche $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x = \alpha + 2k\pi$ et $-\pi < \alpha \leq \pi$.

On effectue la division euclidienne de 273 par 12. On a $273 = 12 \times 22 + 9$.

D'où $\frac{273\pi}{12} = \frac{9\pi + 22 \times 12\pi}{12} = \frac{9\pi}{12} + 22\pi = \frac{3\pi}{4} + 2 \times 11\pi = \frac{3\pi}{4} + 2\pi[22]$ (on trouve $k = 11$).

La mesure principale de l'angle $x = \frac{273\pi}{12}$ est $\frac{3\pi}{4}$.

2^e méthode : On cherche $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x = \alpha + 2k\pi$ et $-\pi < \alpha \leq \pi$.

On a alors $\alpha = x - 2k\pi = \frac{273\pi}{12} - 2k\pi$.

$$-\pi < \alpha \leq \pi \Leftrightarrow -\pi < \frac{273\pi}{12} - 2k\pi \leq \pi$$

$$\Leftrightarrow -\pi - \frac{273\pi}{12} < -2k\pi \leq \pi - \frac{273\pi}{12}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{285\pi}{12} < -2k\pi \leq -\frac{261\pi}{12}$$

$$\Leftrightarrow 10,875 \leq k < 11,875$$

Comme k est un entier relatif, on a $k = 11$.

Donc $\alpha = x - 2k\pi = \frac{273\pi}{12} - 2 \times 11\pi = \frac{273\pi}{12} - \frac{264\pi}{12} = \frac{9\pi}{12} = \frac{3\pi}{4}$.

La mesure principale de l'angle $x = \frac{273\pi}{12}$ est $\frac{3\pi}{4}$.

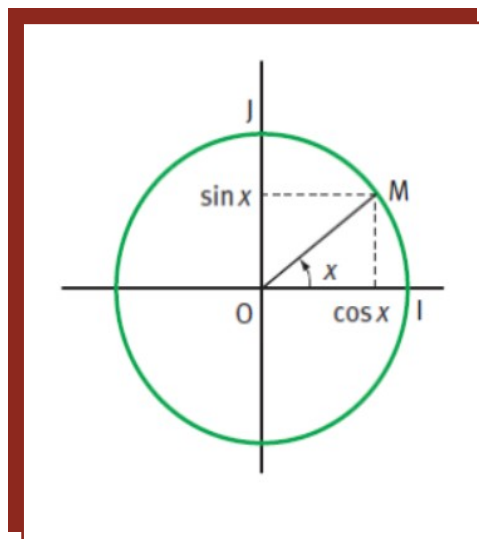
IV. Cosinus et sinus

Soit M un point image d'un réel x sur le cercle trigonométrique.

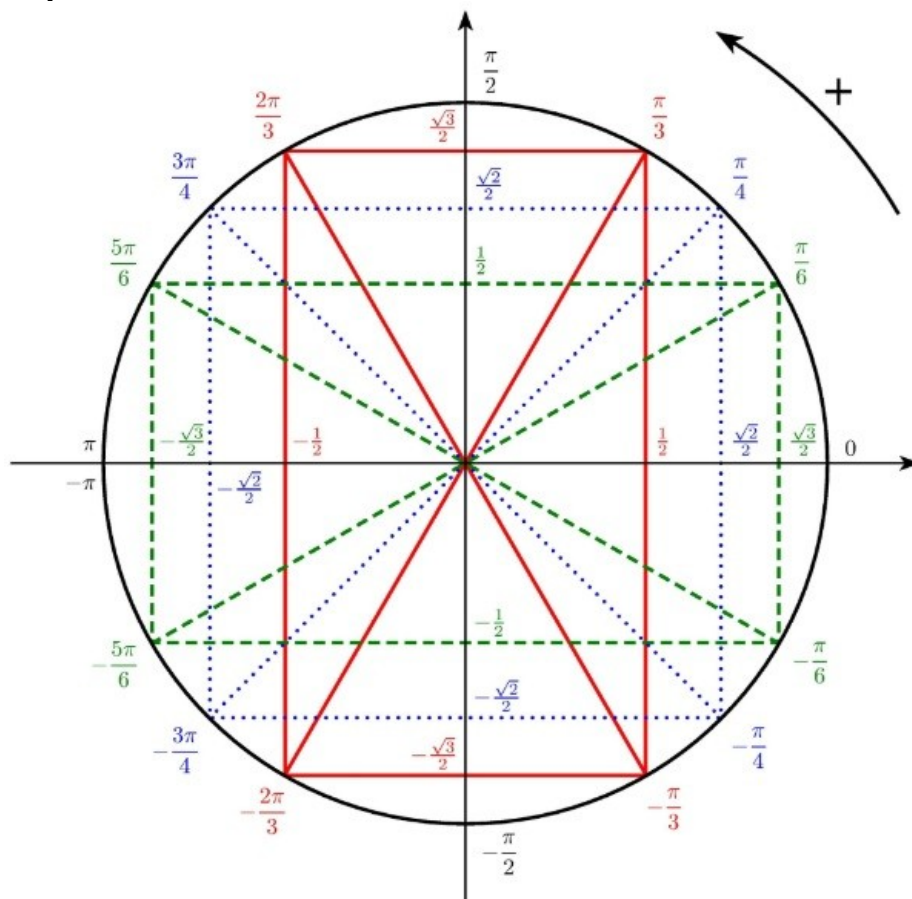
Dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$, le cosinus de x , noté $\cos x$, est l'abscisse du point M et le sinus de x , noté $\sin x$, est son ordonnée.

Soit x un réel et k un entier relatif. On a :

- $-1 \leq \cos x \leq 1$ et $-1 \leq \sin x \leq 1$
- $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$
- $\cos(x + 2k\pi) = \cos x$ et $\sin(x + 2k\pi) = \sin x$



Valeurs remarquables



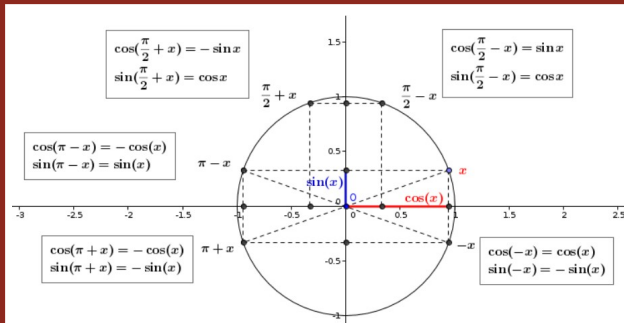
x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

V. Formules et équations

Angles associés

Pour tout réel x , on a :

- $\cos(-x) = \cos x$ et $\sin(-x) = -\sin x$
- $\cos(\pi + x) = -\cos x$ et $\sin(\pi + x) = -\sin x$
- $\cos(\pi - x) = -\cos x$ et $\sin(\pi - x) = \sin x$
- $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x$ et $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$
- $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$ et $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$



Équations trigonométriques

Soit x et a deux réels.

L'équation $\cos x = \cos a$ admet les solutions suivantes :

$$x = a + 2k\pi \text{ ou } x = -a + 2k\pi, \text{ avec } k \in \mathbb{Z}$$

L'équation $\sin x = \sin a$ admet les solutions suivantes :

$$x = a + 2k\pi \text{ ou } x = \pi - a + 2k\pi, \text{ avec } k \in \mathbb{Z}$$

Formules d'addition

- $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$
- $\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$
- $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$
- $\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$

Formules de duplication

- $\cos(2x) = 1 - \sin^2 x$
- $\sin(2x) = 2 \sin x \cos x$

Formules de linéarisation

- $\cos^2 x = \frac{1 + \cos(2x)}{2}$
- $\sin^2 x = \frac{1 - \cos(2x)}{2}$

Formules de factorisation

- $1 + \cos x = 2 \cos^2\left(\frac{x}{2}\right)$
- $1 - \cos x = 2 \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)$

VI. Fonctions cosinus et sinus

VI.1 Définitions

- La **fonction sinus** est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x \rightarrow \sin x$.
- La **fonction cosinus** est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x \rightarrow \cos x$.

VI.2 Périodicité

Les fonctions sinus et cosinus sont **périodiques** de période 2π . Elles sont dites **2π -périodique**.
 Pour tout réel x , $\sin(x + 2k\pi) = \sin x$ et $\cos(x + 2k\pi) = \cos x$.

VI.3 Parité

- La fonction sinus est une fonction **impaire**. Pour tout réel x , $\sin(-x) = -\sin x$.
 Sa courbe représentative est **symétrique par rapport à l'origine du repère**.
- La fonction cosinus est une fonction **paire**. Pour tout réel x , $\cos(-x) = \cos x$.
 Sa courbe représentative est **symétrique par rapport à l'axe des ordonnées**.

VI.4 Dérivées

- La fonction sinus est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sin' x = \cos x$.
- La fonction cosinus est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos' x = -\sin x$.

VI.5 Variations

Les fonctions sinus et cosinus étant périodiques de période 2π , il suffit de les étudier sur un intervalle d'amplitude 2π . On choisit l'intervalle $]-\pi; \pi]$.

• Variations de la fonction sinus

x	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	π	
$\sin' x = \cos x$	$-$	0	$+$	0	$-$
$\sin x$	0	-1	1	0	

• Variations de la fonction cosinus

x	$-\pi$	0	π
$\cos' x = -\sin x$	+	0	—
$\cos x$	-1	1	-1

Diagramme de variation pour la fonction cosinus :
 À $x = -\pi$, $\cos x = -1$.
 Entre $x = -\pi$ et $x = 0$, la fonction croît (signe +) jusqu'à $\cos x = 1$.
 Entre $x = 0$ et $x = \pi$, la fonction décroît (signe —) jusqu'à $\cos x = -1$.

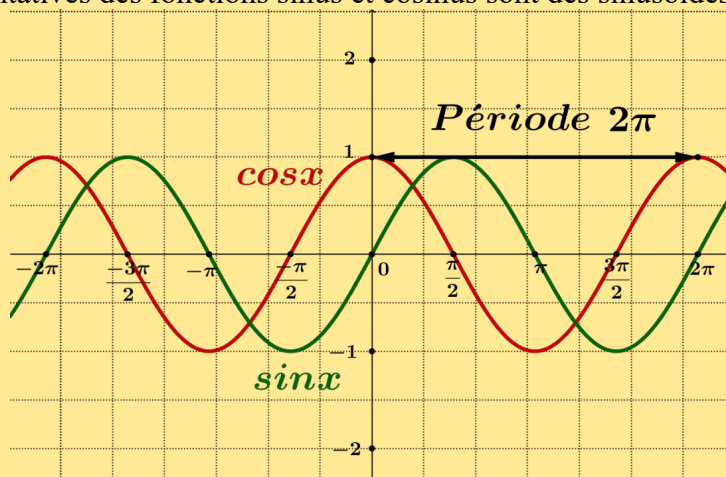
VI.6 Signes

Sur l'intervalle $]-\pi; \pi]$, les fonctions sinus et cosinus ont les signes suivants :

x	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π			
$\sin x$	0	−	−1	−	0	+	1	+
$\cos x$	−1	−	0	+	1	+	0	−

VI.7 Représentations graphiques

Les courbes représentatives des fonctions sinus et cosinus sont des sinusoïdes.



VI.8 Fonctions composées

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I .

• La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin(u(x))$ est dérivable sur I .

Pour tout $x \in I$, $f'(x) = u'(x) \cos(u(x))$.

• La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \cos(u(x))$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Pour tout $x \in I$, $f'(x) = -u'(x) \sin(u(x))$.

VII. Résolution d'inéquations trigonométriques

Inéquations trigonométriques de la forme $\sin x < k$ (k réel)

Méthode 1 : Résolution graphique à l'aide de la courbe représentative de la fonction sinus

Sur la courbe représentative de la fonction sinus, on colorie les points dont l'ordonnée est strictement inférieure à k . Leurs abscisses sont les solutions de l'inéquation $\sin(x) < k$.

Méthode 2 : Résolution graphique à l'aide du cercle trigonométrique

Sur le cercle trigonométrique, on colorie les points associés à un réel dont le sinus est strictement inférieur à k , c'est-à-dire qui ont une ordonnée strictement inférieure à k . On repère les réels auxquels sont associés ces points.

Inéquations trigonométriques de la forme $\cos x < k$ (k réel)

Méthode 1 : Résolution graphique à l'aide de la courbe représentative de la fonction sinus

Sur la courbe représentative de la fonction cosinus, on colorie les points dont l'ordonnée est strictement inférieure à k . Leurs abscisses sont les solutions de l'inéquation $\cos x < k$.

Méthode 2 : Résolution graphique à l'aide du cercle trigonométrique

Sur le cercle trigonométrique, on colorie les points associés à un réel dont le cosinus est strictement inférieur à k , c'est-à-dire qui ont une abscisse strictement inférieure à k . On repère les réels auxquels sont associés ces points.

VIII. Limites associées aux fonctions trigonométriques

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0$$

Combinatoire et dénombrement

I. Définitions générales

I.1 Ensemble et vocabulaire

Un ensemble E est une collection d'objets distincts x qu'on appelle élément. On dit alors que x appartient à E et on note $x \in E$.

Remarques

- Pour lister un ensemble d'éléments isolés les uns des autres, on utilise des accolades.
- L'ensemble qui ne contient aucun élément s'appelle l'ensemble vide et se note $\emptyset$.
- L'ordre n'intervient pas : $\{a; b\} = \{b; a\}$. De plus, il n'y a pas répétition d'un élément : $\{a; a\} = \{a\}$.

Soit E un ensemble. On appelle partie de E un ensemble F tels que tous les éléments de F appartiennent aussi à E . On dit que F est **inclus** dans E et on note $F \subset E$.

Soit A et B deux ensembles.

- La réunion $A \cup B$ est l'ensemble des éléments appartenant à A **ou** à B .
- L'intersection $A \cap B$ est l'ensemble des éléments appartenant à A **et** à B .

Soit A et B deux ensembles. A et B sont **disjoints** lorsqu'ils ne possèdent aucun élément en commun, autrement dit quand leur intersection est vide. On note $A \cap B = \emptyset$.

On appelle **k -uplet** ou **k -liste** d'un ensemble E une collection ordonnée d'objets qu'on appelle, selon les cas, coordonnées, composantes ou termes. Un k -uplet s'écrit avec des parenthèses.

Remarques

- Un 2-uplet s'appelle un **couple** et un 3-uplet s'appelle un **triplet**.
- L'ordre intervient, c'est-à-dire que $(a; b) \neq (b; a)$.
- Les objets peuvent être identiques. De ce fait, le couple $(a; a)$ existe.

I.2 Ensemble fini et cardinal

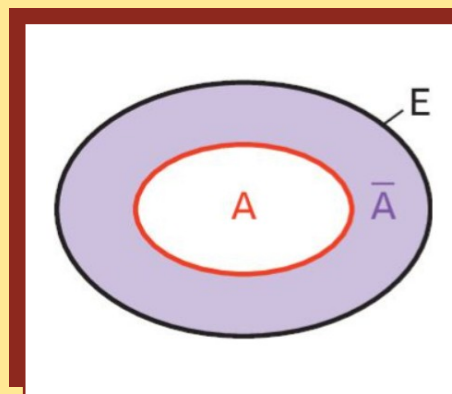
Soit un entier naturel n . Un ensemble E est dit **fini** s'il possède n éléments. Le nombre n d'éléments de E est appelé **cardinal** de E , noté $\text{Card}(E)$.

II. Principes additif et multiplicatif

II.1 Principe additif

Soit un entier naturel n supérieur ou égal à 2 et $A_1, A_2, \dots, A_n$ des ensembles finis disjoints deux à deux. Alors $\text{Card}(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = \sum_{k=1}^n \text{Card}(A_k) = \text{Card}(A_1) + \text{Card}(A_2) + \dots + \text{Card}(A_n)$.

Soit A une partie d'un ensemble E fini et $\bar{A}$ le complémentaire de A dans E .
Alors $\text{Card}(\bar{A}) = \text{Card}(E) - \text{Card}(A)$.



II.2 Principe multiplicatif

Soit E et F deux ensembles non vides. Le **produit cartésien** de E par F , noté $E \times F$, est l'ensemble des couples $(x; y)$ où $x \in E$ et $y \in F$. Ainsi $E \times F = \{(x; y), x \in E, y \in F\}$.

Remarque

$A \times B$ se lit « A croix B ».

Soit E et F deux ensembles finis non vides. Alors $\text{Card}(E \times F) = \text{Card}(E) \times \text{Card}(F)$.

Attention !

Le signe $\times$ dans $\text{Card}(E \times F)$ désigne le produit cartésien des ensembles E et F , alors que celui dans $\text{Card}(E) \times \text{Card}(F)$ désigne la multiplication du nombre d'éléments de E par celui de F .

Soit k un entier naturel supérieur ou égal à 2 et $E_1, E_2, \dots, E_k$, k ensembles non vides. On note les k -uplets $(x_1; x_2; \dots; x_k)$, avec $x_i \in E_i$ pour i allant de 1 à k .

- L'ensemble de ces k -uplets est le produit cartésien $E_1 \times E_2 \times \dots \times E_k$.
- Si les ensembles $E_1, E_2, \dots, E_k$ sont **finis**, alors :

$$\text{Card}(E_1 \times E_2 \times \dots \times E_k) = \prod_{i=1}^k \text{Card}(E_i) = \text{Card}(E_1) \times \text{Card}(E_2) \times \dots \times \text{Card}(E_k)$$

III. Dénombrement

III.1 Nombre de k-uplet d'un ensemble à n éléments

Soit k un entier naturel non nul et E un ensemble non vide. Un **k -uplet** (ou **k -liste**) d'éléments de E est un élément du produit cartésien $E^k = E \times E \times \dots \times E$.

Soit k et n deux entiers naturels non nuls et E un ensemble fini de cardinal n .
Le nombre de k -uplets de E est n^k . On a alors $\text{Card}(E^k) = [\text{Card}(E)]^k = n^k$.

III.2 Factorielle

Soit n un entier naturel non nul. On appelle **factorielle n** (ou **n factorielle**) le nombre :

$$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times 3 \times 2 \times 1$$

$$\bullet \ 0! = 1$$

$$\bullet \ n! = n(n-1)!$$

$$\bullet \ (n+1)! = (n+1)n!$$

III.2 Arrangements d'un ensemble

Soit n et k deux entiers naturels tels que $1 \leq k \leq n$ et E un ensemble fini non vide à n éléments. Un **arrangement** de k éléments de E (ou **k -arrangement**) est un k -uplet d'éléments distincts de E .

Soit n un entier naturel non nul et k un entier naturel tel que $1 \leq k \leq n$.
Soit E un ensemble fini non vide à n éléments. Le nombre de k -arrangements de E est :

$$A_n^k = n \times (n-1) \times \dots \times (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

III.3 Permutations d'un ensemble

Soit n un entier naturel et E un ensemble fini non vide à n éléments.
Une permutation de E est un n -uplet d'éléments deux à deux distincts de E .

Remarque

Les permutations d'un ensemble correspondent à tous les ordres possibles dans les n -uplets constitués des éléments de l'ensemble.

Soit n un entier naturel non nul. Le nombre de permutations d'un ensemble fini non vide à n éléments est $n!$.

IV. Combinaisons

IV.1 Partie d'un ensemble fini

Une partie d'un ensemble E est un sous-ensemble de E .

Soit n un entier naturel et E un ensemble fini à n éléments. Le nombre de parties de E est égal au nombre de n -uplets de l'ensemble $\{0;1\}$, c'est-à-dire 2^n .

IV.2 Combinaisons

Soit n et k deux entiers naturels tels que $0 \leq k \leq n$ et E un ensemble fini de cardinal n . On appelle **combinaison** de k éléments de E toute partie de E ayant k éléments.

Le nombre de combinaisons de k éléments parmi n est noté $\binom{n}{k}$.

Remarque

Les nombres $\binom{n}{k}$ sont appelés les **coefficients binomiaux**.

Soit n et k deux entiers naturels tels que $0 \leq k \leq n$. Alors $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Méthode pour déterminer les coefficients binomiaux avec la calculatrice :

- Casio 35+ et supérieur : Pour calculer $\binom{5}{2}$, dans le menu RUN (calcul), appuyer sur la touche OPTN, puis choisir PROB. Tapez 5, puis choisir nCr, puis taper 2 et EXE.
- TI 82 et supérieur : Pour calculer $\binom{5}{2}$, taper 5, puis appuyer sur la touche MATH, choisir le menu PROB, puis choisir nCr ou Combinaison (version fr), puis taper 2 et ENTER.

IV.3 Propriétés des combinaisons

Soit n un entier naturel.

- $\binom{n}{0} = 1$. Dans un ensemble à n éléments, il existe une seule partie à 0 élément : la partie vide.
- $\binom{n}{1} = n$. Dans un ensemble à n éléments, il existe n parties ayant un élément.
- $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$. Dans un ensemble à n éléments, il y a $\frac{n(n-1)}{2}$ parties ayant deux éléments.
- $\binom{n}{n} = 1$. Dans un ensemble à n éléments, il y a une seule partie à n éléments : l'ensemble lui-même.

Propriété de symétrie

Pour tous entiers n et k vérifiant $0 \leq k \leq n$, $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$. Dénombrer les parties à k éléments revient à dénombrer les parties à $(n-k)$ éléments qui en sont les complémentaires.

Relation de Pascal

Pour tous entiers naturels $n \geq 2$ et k vérifiant $1 \leq k \leq n-1$, $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$.

Remarque

Ces propriétés permettent de tracer le triangle de Pascal.

- $\binom{n}{0} = 1$ assure que la première colonne ne contient que des 1 ;
- $\binom{n}{n} = 1$ assure que la diagonale ne contient que des 1 ;
- $\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}$ permet de déterminer n'importe quel coefficient binomial à partir de deux connus auparavant.

Par exemple, pour $n=5$ et $k=2$, on a

$$\binom{5}{2} = \binom{4}{1} + \binom{4}{2} = 4 + 6 = 10.$$

$n \backslash k$	0	1	2	3	4	5
0	1					
1	1	1				
2	1	2	1			
3	1	3	3	1		
4	1	4	6	4	1	
5	1	5	10	10	5	1

Pour tout entier naturel n , $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$.

V. Critères à retenir

Pour dénombrer toutes les éventualités d'un problème, les deux critères à prendre en compte sont :

- les éléments peuvent-ils être répétés ?
- l'ordre des éléments est-il à prendre en compte ?

On résume alors les différentes réponses dans le tableau suivant :

Critères	Répétition	Pas de répétition
Ordre	k -listes ou k -uplets (n^k)	k -listes d'éléments distincts (arrangement ou permutation)
Pas d'ordre	Combinaisons avec répétition (hors programme)	Combinaisons $\binom{n}{k}$

Géométrie vectorielle dans l'espace

I. Vecteurs de l'espace

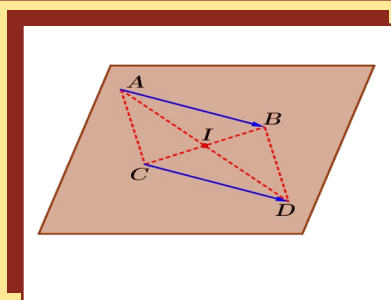
I.1 Définitions et propriétés

Soit deux points A et B de l'espace. Le vecteur $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ est défini par :

- Une **direction** : la droite (AB) .
- Un **sens** : de A vers B .
- Une **norme** (ou distance) : $\|\vec{u}\| = \|\overrightarrow{AB}\| = AB$.

Deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égaux si et seulement si $ABDC$ est un parallélogramme.

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow ABDC \text{ parallélogramme.}$$



Relation de Chasles

Pour tous points A , B et C , on a : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

Soit deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et un réel λ tel que $\vec{v} = \lambda \vec{u}$.

- Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont même direction.
- Le vecteur $\vec{v}$ a le même sens que le vecteur $\vec{u}$ si $\lambda > 0$ et un sens contraire si $\lambda < 0$.
- $\|\vec{v}\| = |\lambda| \|\vec{u}\|$.

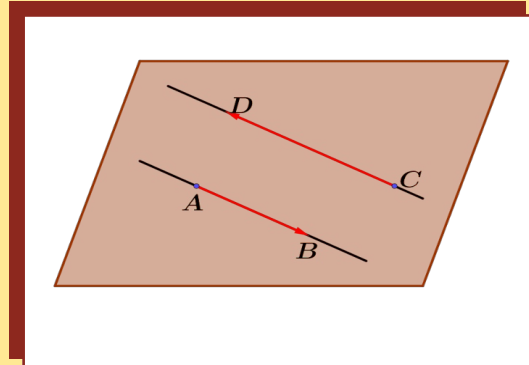
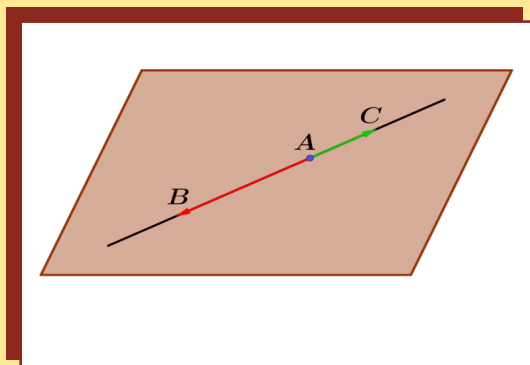
I.2 Colinéarité

Deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires s'ils ont la même direction, c'est-à-dire si $(AB) \parallel (CD)$.

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs. Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement s'il existe un réel k tel que $\vec{v} = k \vec{u}$ ou si l'un d'entre eux est nul.

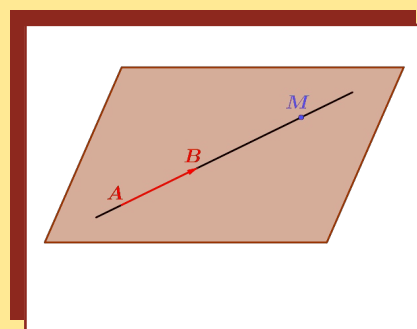
Soit A , B , C et D des points de l'espace.

- A , B et C sont alignés $\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{AC} = k \overrightarrow{AB}$.
- $(AB) \parallel (CD) \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{CD} = k \overrightarrow{AB}$.



Soit A et B deux points distincts de l'espace.
La droite (AB) est l'ensemble des points M tels que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AM}$ sont colinéaires.

Autrement dit : (AB) est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM} = k \overrightarrow{AB}$, avec $k \in \mathbb{R}$.



II. Plans de l'espace et positions relatives

II.1 Le plan

Un plan P peut être défini par trois points A , B et C non alignés. Il est alors noté (ABC) .
Un plan peut aussi être défini par deux droites sécantes ou strictement parallèles.

Différentes façons de définir un plan

par trois points non alignés	par une droite et un point n'appartenant pas à cette droite	par deux droites sécantes	par deux droites strictement parallèles

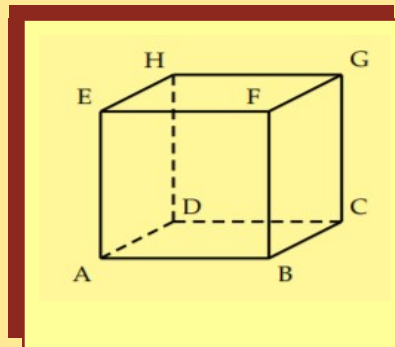
Deux éléments de l'espace (points ou droites) situés dans un même plan sont dits **coplanaires**.

II.2 Positions relatives

Positions relatives entre deux droites

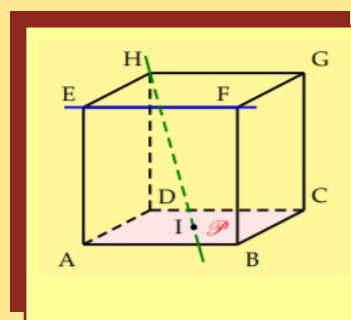
Deux droites, dans l'espace, peuvent être :

- coplanaires, si ces deux droites appartiennent à un même plan [(AF) et (BE)].
- sécantes, si ces deux droites se coupent en un point [(AB) et (AD)].
- parallèles, si ces deux droites sont coplanaires et n'ont aucun point commun ou si ces deux droites sont confondues [(AB) et (HG)].
- non coplanaires [(AB) et (DG)].

**Positions relatives entre une droite et un plan**

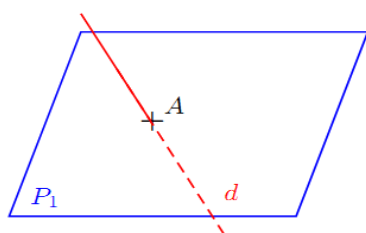
Une droite et un plan peuvent être :

- parallèles : si la droite et le plan n'ont aucun point commun ou si la droite est contenue dans le plan [(EF) et P].
- sécantes : si la droite et le plan ont un seul point commun [(HI) et P].

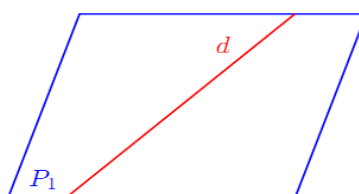
**Remarque**

En « isolant » une droite et un plan, on obtient les cas suivants :

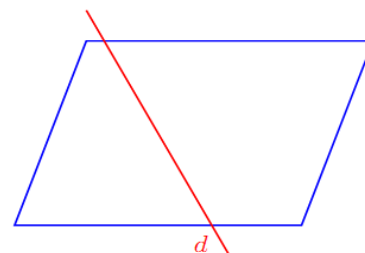
Droite et plan sécants :
un point d'intersection



Droite et plan parallèles :
droite incluse dans le plan

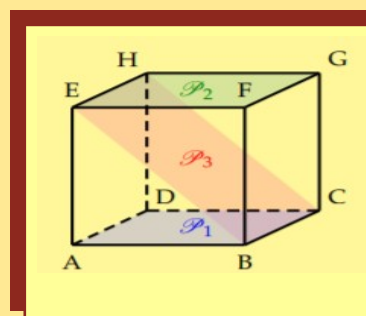


Droite et plan parallèles :
aucun point d'intersection

**Positions relatives entre deux plans**

Deux plans peuvent être :

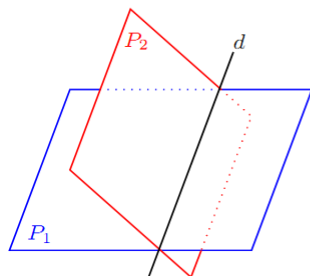
- parallèles : si les deux plans n'ont aucun point commun ou si les deux plans sont confondus ($P_1 \cap P_2 = \emptyset$)
- sécants : si les deux plans ont une droite en commun. ($P_1 \cap P_3 = (BC)$)



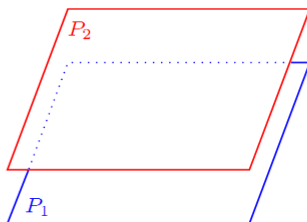
Remarque

En « isolant » deux plans, on obtient les cas suivants :

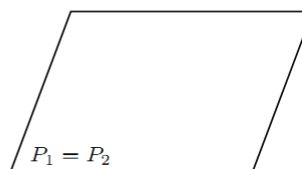
Plans sécants :
un droite d'intersection



Plans parallèles strictement :
aucun point d'intersection



Plans parallèles confondus :
un plan d'intersection

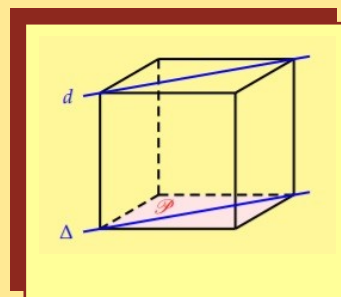


II.3 Parallélisme

Parallélisme d'une droite et d'un plan

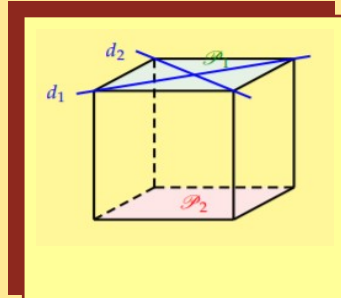
- Si une droite d est parallèle à une droite Δ contenue dans un plan P , alors d est parallèle à P .

$$\left. \begin{array}{l} d \parallel \Delta \\ \Delta \subset P \end{array} \right\} \text{ alors } d \parallel P$$



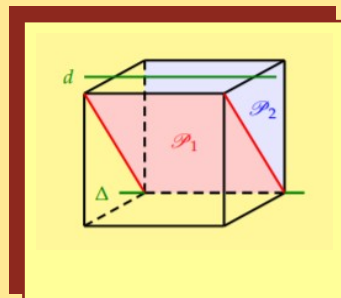
- Si un plan P_1 contient deux droites sécantes d_1 et d_2 parallèles à un plan P_2 , alors les plans P_1 et P_2 sont parallèles.

$$\left. \begin{array}{l} d_1 \subset P_1 \text{ et } d_2 \subset P_1 \\ d_1 \text{ et } d_2 \text{ sécantes} \\ d_1 \parallel P_2 \text{ et } d_2 \parallel P_2 \end{array} \right\} \text{ alors } P_1 \parallel P_2$$



- Si une droite d est parallèle à deux plans P_1 et P_2 sécants en une droite Δ , alors d et Δ sont parallèles.

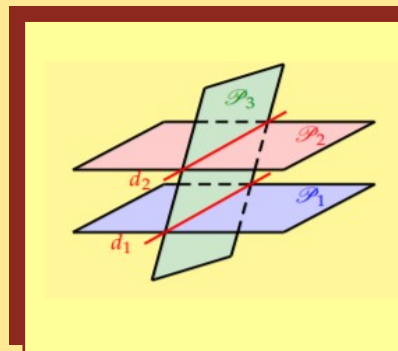
$$\left. \begin{array}{l} d \parallel P_1 \text{ et } d \parallel P_2 \\ P_1 \cap P_2 = \Delta \end{array} \right\} \text{ alors } d \parallel \Delta$$



Parallélisme de deux plans

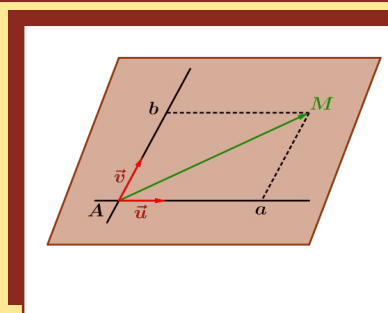
Si deux plans P_1 et P_2 sont parallèles, alors tout plan sécant à l'un est sécant à l'autre et les droites d'intersection d_1 et d_2 sont parallèles.

$$\left. \begin{array}{l} P_1 \parallel P_2 \\ P_1 \cap P_3 = d_1 \end{array} \right\} \text{ alors } \left\{ \begin{array}{l} P_2 \cap P_3 = d_2 \\ d_1 \parallel d_2 \end{array} \right.$$

**III. Vecteurs coplanaires****III.1 Caractérisation vectorielle d'un plan**

Un plan P est engendré par un point A et deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non colinéaires.

- Le plan P est l'ensemble des points M tels que $\vec{AM} = x\vec{u} + y\vec{v}$ avec $(x; y) \in \mathbb{R}^2$.
- Le plan (ABC) est l'ensemble des points M tels que $\vec{AM} = x\vec{AB} + y\vec{AC}$ avec $(x; y) \in \mathbb{R}^2$.



Deux plans déterminés par le même couple de vecteurs non colinéaires sont parallèles.

III.2 Vecteurs coplanaires

Trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ de l'espace sont coplanaires s'ils possèdent des représentants appartenant à un même plan.

Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs et A , B , C et D quatre points.

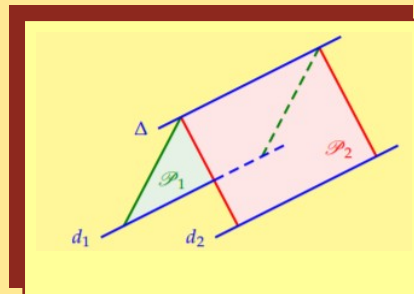
- $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ coplanaires $\Leftrightarrow \exists! (a; b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$.
- A , B , C et D coplanaires $\Leftrightarrow \exists! (a; b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\vec{AD} = a\vec{AB} + b\vec{AC}$.

- Une droite D est parallèle à un plan P si et seulement si un vecteur directeur de D est coplanaire avec deux vecteurs non colinéaires de P .
- Deux plans P et P' sont parallèles si et seulement si un couple de vecteurs directeurs de P est colinéaire à un couple de vecteurs directeurs de P' .

III.3 Théorème du toit

Soient d_1 et d_2 deux droites parallèles contenues respectivement dans les plans P_1 et P_2 . Si ces deux plans P_1 et P_2 sont sécants en une droite Δ , alors la droite Δ est parallèle à d_1 et d_2 .

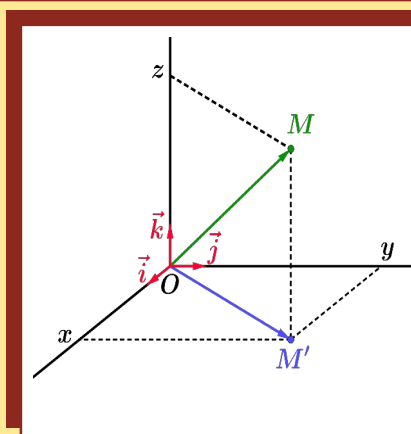
$$\left. \begin{array}{l} d_1 \parallel d_2 \\ d_1 \subset P_1 \text{ et } d_2 \subset P_2 \\ P_1 \cap P_2 = \Delta \end{array} \right\} \text{ alors } \left\{ \begin{array}{l} \Delta \parallel d_1 \\ \Delta \parallel d_2 \end{array} \right.$$



IV. Repérage dans l'espace

IV.1 Repère de l'espace et coordonnées

- Un repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace est un quadruplet constitué d'un point origine O et de trois vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ non coplanaires. On dit alors que $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est une **base** de l'espace. Le repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est dit **orthonormé** si et seulement si $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = \|\vec{k}\|$ et $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ sont deux à deux orthogonaux. La base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est orthonormée avec les mêmes conditions.
- Pour tout point M de l'espace, il existe un unique triplet de réels $(x; y; z)$ tel que $\vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$. Les trois réels uniques x , y et z sont appelés coordonnées de M dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On note x l'abscisse, y l'ordonnée et z la cote.



IV.2 Décomposition d'un vecteur dans l'espace

Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs non coplanaires de l'espace. Pour tout vecteur $\vec{V}$, $\exists! (x; y; z) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\vec{V} = x\vec{u} + y\vec{v} + z\vec{w}$. Les trois réels uniques x , y et z sont les coordonnées du vecteur $\vec{V}$ dans la base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$.

IV.3 Calculs sur les coordonnées

- Soit $\vec{u}(x; y; z)$ et $\vec{v}(x'; y'; z')$ deux vecteurs dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace et $\lambda \in \mathbb{R}$.
- $\vec{u} = \vec{v} \Leftrightarrow x = x', y = y' \text{ et } z = z'$.
 - le vecteur $\vec{u} + \vec{v}$ a pour coordonnées $(x + x'; y + y'; z + z')$.
 - Le vecteur $\lambda \vec{u}$ a pour coordonnées $(\lambda x; \lambda y; \lambda z)$.
 - Si le repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est orthonormé, alors $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Soit $A(x_A; y_A; z_A)$ et $B(x_B; y_B; z_B)$ deux points dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace.

- Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $(x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A)$.
- Le milieu I du segment $[AB]$ a pour coordonnées $\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}; \frac{z_A + z_B}{2}\right)$.
- Si le repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est orthonormé, alors $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$.

V. Représentations paramétriques

V.1 Représentation paramétrique d'une droite

Soit x_0, y_0, z_0, a, b et c des réels tels que $(a; b; c) \neq (0; 0; 0)$.

Le système d'équations
$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}, t \in \mathbb{R},$$
 définit une **représentation paramétrique** de

la droite Δ passant par le point $A(x_0; y_0; z_0)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(a; b; c)$.

Le réel t est le **paramètre** du point $M(x; y; z)$.

V.2 Représentation paramétrique d'un plan

Soit $x_0, y_0, z_0, a, b, c, \alpha, \beta$ et γ des réels tels que a, b et c ne soient pas proportionnels à α, β et γ .

Le système d'équations
$$\begin{cases} x = x_0 + at + \alpha s \\ y = y_0 + bt + \beta s \\ z = z_0 + ct + \gamma s \end{cases}, (t; s) \in \mathbb{R}^2,$$
 définit une **représentation**

paramétrique du plan P passant par le point $A(x_0; y_0; z_0)$ et dirigé par les vecteurs $\vec{u}(a; b; c)$ et $\vec{v}(\alpha; \beta; \gamma)$. Le couple de réels $(t; s)$ est appelé couple de **paramètres** du point $M(x; y; z)$.

Produit scalaire dans l'espace

I. Produit scalaire

I.1 Définition

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls du plan. On appelle **produit scalaire** de $\vec{u}$ par $\vec{v}$ le nombre réel noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$ défini par $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2)$.

I.2 Expression analytique

Soit $\vec{u}(x; y; z)$ et $\vec{v}(x'; y'; z')$ deux vecteurs dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Alors :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'$$

I.3 Expression du produit scalaire avec les angles

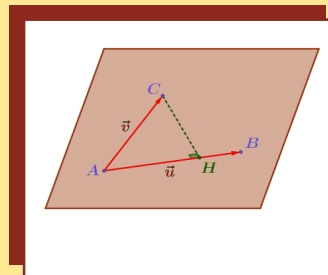
Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls du plan. Alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v})$.

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$.

Le produit scalaire de $\vec{u}$ par $\vec{v}$ est :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH}$$

où H est le projeté orthogonal de C sur la droite (AB).



I.4 Propriétés

Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace et λ et α deux réels. Le produit scalaire est :

- Symétrique : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$.
- Distributif par rapport à l'addition : $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$.
- Distributif par rapport à la multiplication : $(\lambda \vec{u}) \cdot (\alpha \vec{v}) = \lambda \alpha (\vec{u} \cdot \vec{v})$.

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace.

- $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = (\vec{u} + \vec{v})^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2$
- $\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = (\vec{u} - \vec{v})^2 = \|\vec{u}\|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2$
- $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2$

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs colinéaires non nuls de l'espace.

- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont de même sens, alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$.
- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont de sens contraires, alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = -\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$.

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace.

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} (\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2)$
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} (\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2)$
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{4} (\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2)$

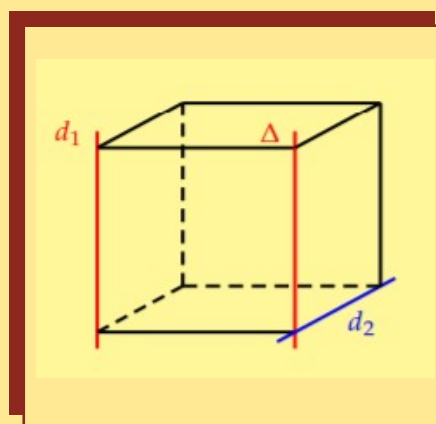
II. Orthogonalité

II.1 Droites orthogonales

Deux droites d_1 et d_2 sont :

- perpendiculaires si et seulement si d_1 et d_2 se coupent perpendiculairement.
- orthogonales si et seulement s'il existe une droite Δ parallèle à d_1 qui est perpendiculaire à d_2 .

On écrira indistinctement pour deux droites perpendiculaires ou orthogonales : $d_1 \perp d_2$.



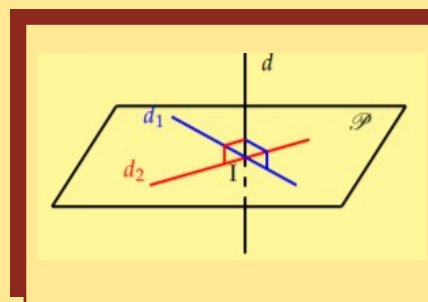
Si deux droites sont parallèles alors toute droite orthogonale à l'une est orthogonale à l'autre.

II.2 Orthogonalité entre une droite et un plan

Une droite d est perpendiculaire ou orthogonale à un plan P si et seulement s'il existe deux droites sécantes de P perpendiculaires à d .

Si une droite d est perpendiculaire en I à un plan P alors toute droite de P passant par I est perpendiculaire à d .

$$\left. \begin{array}{l} d \perp P \\ d \cap P = I \\ I \in d_1 \end{array} \right\} \text{ alors } d_1 \perp d_2$$

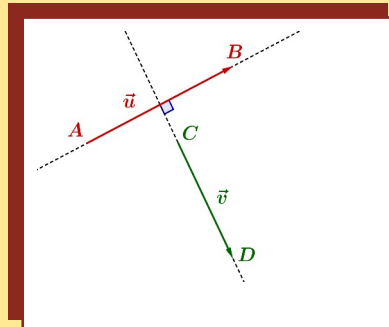


II.3 Orthogonalité et vecteurs

Deux vecteurs non nuls sont dits **orthogonaux** s'ils dirigent des droites orthogonales.

En particulier, si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont orthogonaux, alors les droites (AB) et (CD) sont orthogonales.

On note $\vec{u} \perp \vec{v}$.



Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace. $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow xx' + yy' + zz' = 0$.

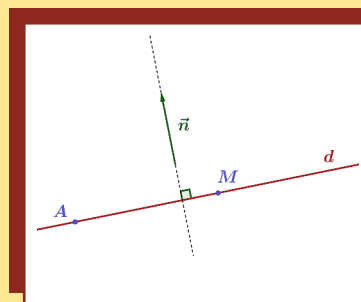
III. Équation cartésienne de plan

III.1 Vecteur normal à une droite

Soit $\vec{n}$ un vecteur non nul et A et M deux points distincts de l'espace.

Le vecteur $\vec{n}$ est dit **normal** à la droite (AM) si les vecteurs $\vec{n}$ et $\overrightarrow{AM}$ sont orthogonaux.

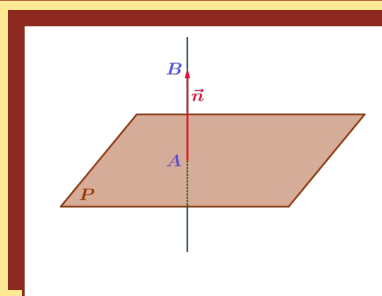
On note $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$.



III.2 Vecteur normal à un plan

Un vecteur $\vec{n}$ est dit **normal** à un plan P si et seulement si toute droite de vecteur directeur $\vec{n}$ est orthogonale au plan P.

En particulier, le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est normal à P si la droite (AB) est orthogonale à P.

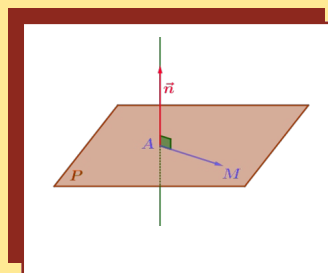


III.3 Orthogonalité d'une droite et d'un plan

Une droite d est orthogonale à un plan P si et seulement s'il existe deux droites sécantes de P orthogonales à d .

III.4 Équation cartésienne

Soit $\vec{n}$ un vecteur non nul et A un point de l'espace. L'unique plan P passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$ est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$.



Soit $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère orthonormé de l'espace et $(a; b; c; d) \in \mathbb{R}^4$. Alors :

- Un plan P de vecteur normal $\vec{n}(a; b; c)$ a une équation cartésienne de la forme $ax + by + cz + d = 0$.
- Réciproquement, si a , b et c sont trois réels non tous nuls, l'ensemble des points $M(x; y; z)$ tels que $ax + by + cz + d = 0$ est un plan de vecteur normal $\vec{n}(a; b; c)$.

IV. Positions relatives de droites et de plans

IV.1 Position entre une droite et un plan

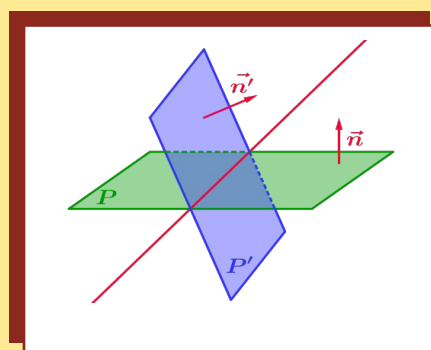
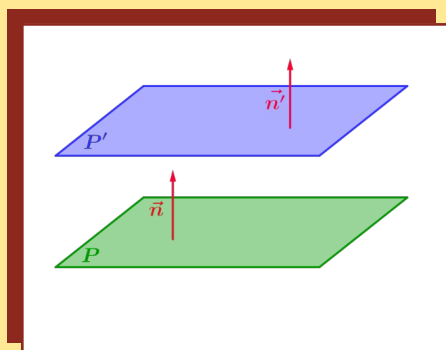
Soit d une droite passant par un point A et de vecteur directeur $\vec{u}$ et P un plan de vecteur normal $\vec{n}$.

- Si $\vec{u}$ et $\vec{n}$ ne sont pas orthogonaux, la droite d et le plan P sont sécants.
- Si $\vec{u}$ et $\vec{n}$ sont orthogonaux et que A appartient à P , la droite d est incluse dans le plan P .
- Si $\vec{u}$ et $\vec{n}$ sont orthogonaux et que A n'appartient pas à P , la droite d est strictement parallèle au plan P .

IV.2 Position entre deux plans

Soit P et P' deux plans de vecteurs normaux respectifs $\vec{n}$ et $\vec{n}'$.

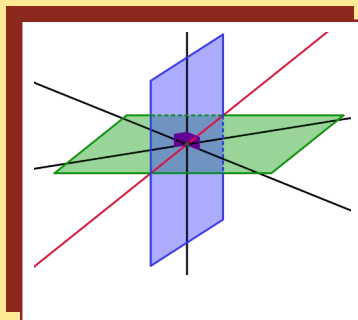
- Si $\vec{n}$ et $\vec{n}'$ sont colinéaires, les plans P et P' sont parallèles.
- Si $\vec{n}$ et $\vec{n}'$ ne sont pas colinéaires, les plans P et P' sont sécants d'intersection une droite.



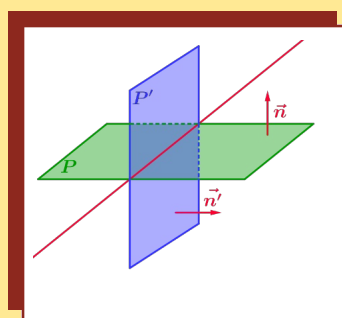
Soit $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère orthonormé de l'espace et $(a; b; c; d) \in \mathbb{R}^4$. Alors :

- Les plans P et P' d'équations cartésiennes respectives $ax + by + cz + d = 0$ et $a'x + b'y + c'z + d' = 0$ sont parallèles si et seulement si $(a; b; c)$ est proportionnel à $(a'; b'; c')$.
- Lorsque $(a; b; c)$ n'est pas proportionnel à $(a'; b'; c')$, l'ensemble des points $M(x; y; z)$ de l'espace qui vérifient $\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases}$ est une droite.

Deux plans sont dits perpendiculaires si l'un des deux plans contient une droite perpendiculaire à l'autre.



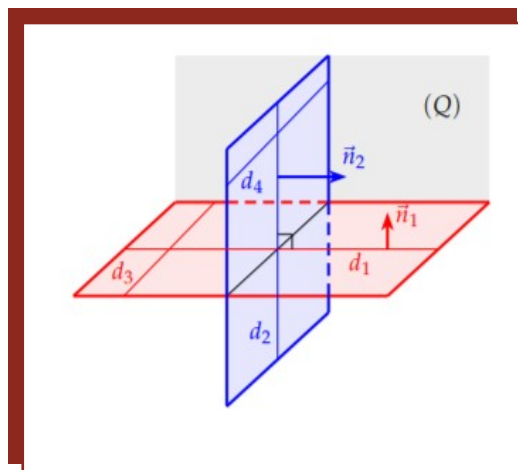
Deux plans P_1 et P_2 de vecteurs normaux respectifs $\vec{n}_1$ et $\vec{n}_2$ sont perpendiculaires ou orthogonaux si et seulement si $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0$.



Remarque

La notion d'orthogonalité de deux plans est moins souple qu'avec deux droites.

- Si $P_1 \perp P_2$, une droite d_3 de P_1 peut être parallèle à une droite d_4 de P_2 .
- Si un plan Q est perpendiculaire à deux plans P_1 et P_2 , les plans P_1 et P_2 ne sont pas nécessairement parallèles entre eux.



Méthode : étude de position relative de plan

On considère les plans P_1 , P_2 et P_3 d'équations cartésiennes respectives :

$$2x - 3y + z - 1 = 0, \quad 4x - 5y + 3z - 3 = 0 \quad \text{et} \quad x + 2y + 4z - 6 = 0$$

- Déterminons la position relative des deux plans.

Le vecteur $\vec{n}_1(2; -3; -1)$ est un vecteur normal à P_1 et le vecteur $\vec{n}_2(4; -5; -3)$ est un vecteur normal à P_2 . Les vecteurs $\vec{n}_1$ et $\vec{n}_2$ ne sont pas colinéaires car le triplet $(2; -3; 1)$ n'est pas proportionnel au triplet $(4; -5; 3)$. Les plans P_1 et P_2 n'étant pas parallèles, ils sont sécants.

- Déterminons une représentation paramétrique de la droite d'intersection.

Les plans P_1 et P_2 sont sécants d'intersection une droite Δ . Pour déterminer Δ , on résout le système suivant :

$$\begin{cases} 2x - 3y + z - 1 = 0 \\ 4x - 5y + 3z - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = -2x + 3y + 1 \\ 4x - 5y + 3(-2x + 3y + 1) - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = -2x + 3y + 1 \\ -2x + 4y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = -y + 1 \\ x = 2y \end{cases}$$

On choisit y comme paramètre et on pose $y = t$. On obtient alors le système suivant :

$$\begin{cases} x = 2t \\ y = t, \\ z = 1 - t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

On a donc obtenu une équation paramétrique de la droite Δ .

- Déterminons que les plans P_1 et P_3 sont perpendiculaires.

Le vecteur $\vec{n}_3(1; 2; 4)$ est un vecteur normal à P_3 .

On a $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_3 = 2 \times 1 + (-3) \times 2 + 1 \times 4 = 2 - 6 + 4 = 0$. Les vecteurs $\vec{n}_1$ et $\vec{n}_3$ sont orthogonaux.

Ainsi les plans P_1 et P_3 sont perpendiculaires.

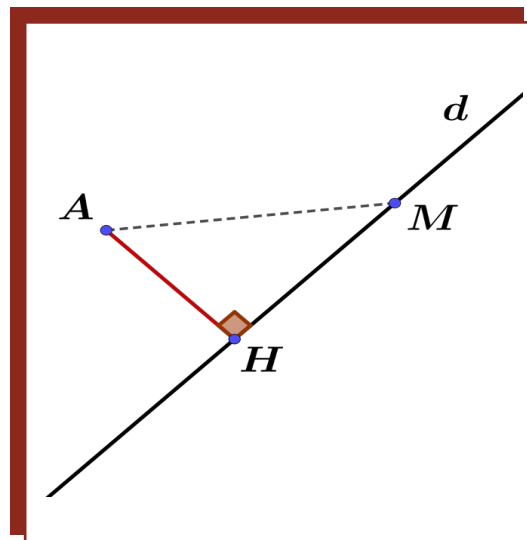
V. Projection orthogonale et distance**V.1 Distance d'un point à une droite dans le plan**

Soit d une droite du plan et A un point n'appartenant pas à cette droite.

On appelle **projeté orthogonal** de A sur la droite d l'unique point H tel que $(AH) \perp d$.

On appelle **distance d'un point A à une droite d** la longueur AH où H est le projeté orthogonal de A sur la droite d .

La distance d'un point A à une droite d est la plus courte distance entre le point A et un point de la droite d . On a $d(A; d) = AH$.



Soit d une droite d'équation cartésienne $ax + by + c = 0$ et $A(x_A; y_A)$ un point dans un repère orthonormal. La distance du point A à la droite d est définie par :

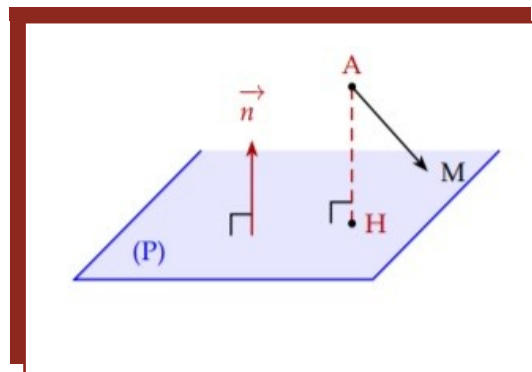
$$d(A; d) = \frac{|ax_A + by_A + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

V.2 Distance d'un point à un plan

Soit P un plan de vecteur normal $\vec{n}$ et A un point extérieur au plan.

On appelle **projeté orthogonal** de A sur P l'intersection du plan et de la droite de vecteur directeur $\vec{n}$ passant par A .

On appelle **distance d'un point A à un plan P** la longueur AH où H est le projeté orthogonal de A sur le plan P .



La distance d'un point A à un plan P est la plus courte distance entre le point A et un point du plan. En particulier, on a $d(A;P)=AH$.

Soit P un plan d'équation cartésienne $ax+by+cz+d=0$ et $A(x_A; y_A; z_A)$ un point dans un repère orthonormal. La distance du point A au plan P est définie par :

$$d(A;P)=\frac{|\vec{MA} \cdot \vec{n}|}{\|\vec{n}\|} = \frac{|ax_A + by_A + cz_A + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

VI. Équation de sphère

La sphère de centre I et de rayon R est l'ensemble des points M de l'espace tels que $IM=R$.

Soit $I(\alpha; \beta; \gamma)$ et $M(x; y; z)$ deux points de l'espace. Une équation cartésienne de la sphère de centre I et de rayon R dans un repère orthonormal est $(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2 = R^2$.

La sphère de diamètre $[AB]$ est l'ensemble des points M de l'espace tels que $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = 0$.

Probabilités conditionnelles et indépendance

I. Généralités

- Une **expérience aléatoire** est une expérience dont le résultat dépend du hasard. Chacun des résultats possibles s'appelle **éventualité** ou **issue**. L'ensemble Ω (ou E) de tous les résultats possibles d'une expérience aléatoire s'appelle l'**univers** de l'expérience.
- Un **événement** A est une partie de l'univers Ω (un événement peut donc être constitué de zéro, une ou plusieurs issues de Ω).
- Un **événement élémentaire** est une partie de Ω qui ne contient qu'une seule issue.
- L'**événement contraire** de A , noté $\bar{A}$, est la partie constituée de toutes les issues de Ω qui ne sont pas dans A .

- $P(\emptyset)=0$ et $P(\Omega)=1$.
- La probabilité d'un événement A , notée $P(A)$, est la **somme des probabilités des événements élémentaires inclus dans A** .
- Pour tout événement A , on a $0 \leq P(A) \leq 1$.
- La somme des probabilités des événements élémentaires vaut 1.
- La probabilité de l'événement contraire d'un événement A est : $P(\bar{A})=1-P(A)$.

- Si $\Omega=\{e_1; e_2; \dots; e_n\}$ et si à chaque issue e_i on associe un nombre $P(e_i)$ tel que $0 \leq P(e_i) \leq 1$ et $P(e_1)+P(e_2)+\dots+P(e_n)=1$, on dit que l'on a défini une **loi de probabilité** sur Ω .
- Lorsque tous les événements élémentaires d'une expérience aléatoire ont la même probabilité, on dit alors qu'ils sont **équiprobables**. On parle d'**expérience équiprobable** ou de **loi équirépartie**.

- L'événement « **A et B** », noté $A \cap B$, s'appelle l'**intersection** des événements A et B . Il est réalisé lorsque **les deux événements sont réalisés simultanément**.
- L'événement « **A ou B** », noté $A \cup B$, s'appelle la **réunion** des événements A et B . Il est réalisé lorsqu'**au moins l'un des deux événements est réalisé**.
- Deux événements A et B sont dits **incompatibles** si $A \cap B = \emptyset$.

Soit A un événement d'un univers Ω . Pour une loi équirépartie, on a :

$$P(A) = \frac{\text{nombre d'éléments de } A}{\text{nombre d'éléments de } \Omega} = \frac{\text{nombre de cas favorables à } A}{\text{nombre de cas possibles}}$$

Soit A et B deux événements d'un univers Ω .

- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.
- Si A et B sont **incompatibles**, $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

II. Probabilités conditionnelles

Soit A et B deux événements d'un univers Ω avec $P(A) \neq 0$.

La **probabilité conditionnelle** que l'événement B se réalise sachant que l'événement A est

réalisé est notée $P_A(B)$, et elle est définie par : $P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$.

La probabilité $P_A(B)$ vérifie bien $0 \leq P_A(B) \leq 1$ et $P_A(B) + P_A(\bar{B}) = 1$.

Soit A et B deux événements d'un univers Ω avec $P(A) \neq 0$ et $P(B) \neq 0$. Alors :

$$P(A) \times P_A(B) = P(B) \times P_B(A)$$

Utilisation de tableaux

Les tableaux à double entrées permettent une présentation claire de certaines expériences aléatoires et facilitent le calcul des probabilités conditionnelles.

	B	$\bar{B}$	Total
A	$P(A \cap B)$	$P(A \cap \bar{B})$	$P(A)$
$\bar{A}$	$P(\bar{A} \cap B)$	$P(\bar{A} \cap \bar{B})$	$P(\bar{A})$
Total	$P(B)$	$P(\bar{B})$	1

- $P(A \cap B)$ se lit à l'intersection de la ligne A et de la colonne B .
- $P(A)$ (respectivement $P(B)$) se lit sur la dernière colonne (respectivement la dernière ligne).
- $P_A(B)$ (ou $P_B(A)$) s'obtient en calculant le quotient des deux probabilités adéquates :

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \quad \text{et} \quad P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Exemple

Un club sportif rassemble 180 membres répartis en juniors et seniors. On compte 135 seniors dont 81 hommes. Il y a 27 garçons parmi les seniors.

En choisissant une femme au hasard, calculer la probabilité d'avoir une juniore.

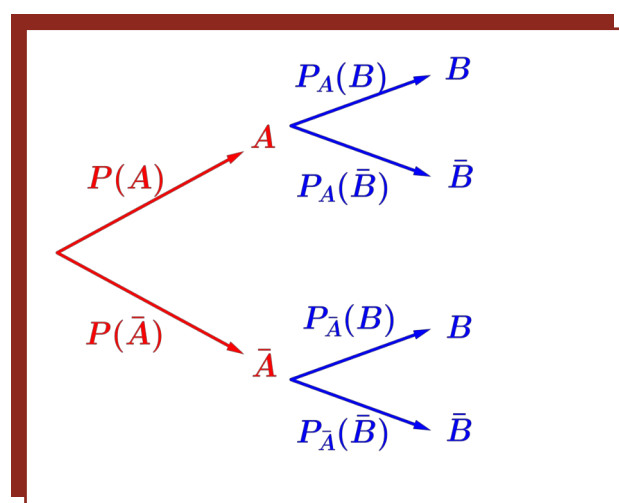
	J	S	Total
H	$\frac{27}{180} = 0,15$	$\frac{81}{180} = 0,45$	$0,15 + 0,45 = 0,6$
F	0,1	0,3	0,4
Total	0,25	$\frac{135}{180} = 0,75$	1

Ainsi $P_F(J) = \frac{P(F \cap J)}{P(F)} = \frac{0,1}{0,4} = 0,25$.

III. Arbre pondéré et calculs de probabilité

- La probabilité de l'événement correspondant à un chemin est obtenue en multipliant les probabilités portées par ses branches.
- La somme des probabilités sur les branches partant d'un même nœud est égale à 1.
- La probabilité de l'événement correspondant à plusieurs chemins est obtenue en additionnant les probabilités de chacun de ces chemins (**formule des probabilités totales**).

Le cas le plus fréquent correspond à la partition la plus simple (A et $\bar{A}$). Si on connaît les probabilités de B et $\bar{B}$ par l'intermédiaire de A et $\bar{A}$, on a l'arbre suivant :



- Le produit des probabilités inscrites sur chaque branche d'un chemin donne la probabilité de l'intersection des événements placés sur ce chemin.

$$P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$$
- La somme des probabilités inscrites sur les branches issues d'un même nœud est égale à 1 (loi des nœuds).

$$P_A(B) + P_A(\bar{B}) = 1$$
- La probabilité d'un événement E est la somme des probabilités des chemins qui aboutissent à E .

$$P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B)$$

$$= P(A) \times P_A(B) + P(\bar{A}) \times P_{\bar{A}}(B)$$

Exemple

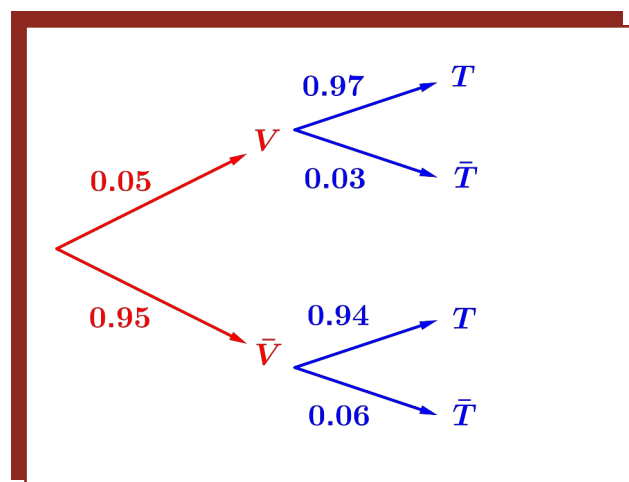
Dans un pays, il y a 5% de la population contaminée par le coronavirus. On dispose d'un test de dépistage de ce virus qui a les propriétés suivantes

- La probabilité qu'une personne contaminée ait un test positif est de 0,97 (sensibilité du test).
- La probabilité qu'une personne non contaminée ait un test négatif est de 0,94 (spécificité du test). On fait passer un test à une personne choisie au hasard dans cette population.

On note les événements suivants :

V : « la personne est contaminée par le virus »

T : « le test est positif »



- La probabilité que le test soit positif est :

$$P(T) = P(V \cap T) + P(\bar{V} \cap T)$$

$$= 0,05 \times 0,97 + 0,95 \times 0,94$$

$$= 0,9415$$

- La probabilité que la personne soit contaminée sachant que le test est positif est :

$$P_T(V) = \frac{P(V \cap T)}{P(T)}$$

$$= \frac{0,05 \times 0,97}{0,9415}$$

$$= 0,051514$$

IV. Formule des probabilités totales

Soit n (où $n \geq 2$) événements de probabilités non nulles $A_1, A_2, \dots, A_n$ des sous-ensembles d'un univers Ω . Ces événements forment une **partition de l'univers Ω** (ou un **système complet d'événements**) si :

- Ils sont **disjoints** (ou **incompatibles**) deux à deux, c'est-à-dire que $A_i \cap A_j = \emptyset$ si $i \neq j$;
- $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = \Omega$.

Soit $A_1, A_2, \dots, A_n$ des événements formant une partition de Ω .

Pour tout événement B de Ω , on a :

$$P(B) = P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + \dots + P(A_n \cap B)$$

Ou, de manière équivalente :

$$P(B) = P(A_1) \times P_{A_1}(B) + P(A_2) \times P_{A_2}(B) + \dots + P(A_n) \times P_{A_n}(B)$$

On appelle cette égalité la **formule des probabilités totales**.

V. Indépendance

- Soit A et B deux événements d'un univers Ω .

On dit que A et B sont **indépendants** lorsque $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

- Soit A et B deux événements d'un univers Ω tels que $P(A) \neq 0$.

Les événements A et B sont **indépendants** si et seulement si $P_A(B) = P(B)$.

Soit A et B deux événements d'un univers Ω .

Si A et B sont indépendants, alors il en est de même pour :

- $\bar{A}$ et B
- A et $\bar{B}$
- $\bar{A}$ et $\bar{B}$

En réalisant successivement deux expériences aléatoires telles que les événements associés à la première soit indépendants des événements associés à la seconde, on dit que l'on réalise une **succession de deux épreuves indépendantes**.

- Deux expériences sont dites **indépendantes** si le résultat de l'une n'influe pas sur le résultat de l'autre.
- Deux expériences sont dites **identiques** si elles ont les mêmes issues et les mêmes probabilités pour chaque issue.

Loi binomiale

I. Succession d'épreuves indépendantes

Soit une succession de n épreuves indépendantes $E_1, E_2, \dots, E_n$ d'univers associés respectifs $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_n$.

L'univers des issues possibles associé est le produit cartésien $\prod_{i=1}^n \Omega_i = \Omega_1 \times \Omega_2 \times \dots \times \Omega_n$.

Une issue de la succession d'épreuves est un n -uplet $(e_1; e_2; \dots; e_n)$ où e_i est une issue de E_i .

Soit une succession de n épreuves indépendantes $E_1, E_2, \dots, E_n$ d'univers associés respectifs $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_n$.

La probabilité d'une issue $(e_1; e_2; \dots; e_n)$ est égale au produit des probabilités de chacune des issues du n -uplet. Autrement dit, $P((e_1; e_2; \dots; e_n)) = \prod_{i=1}^n P(e_i) = P(e_1) \times P(e_2) \times \dots \times P(e_n)$.

II. Épreuve, loi et schéma de Bernoulli

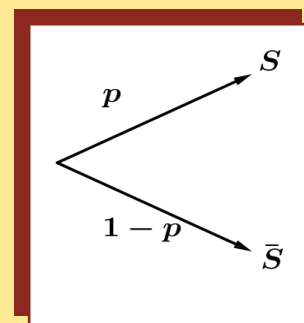
II.1 Épreuve de Bernoulli

Une **épreuve de Bernoulli** de paramètre p

(compris entre 0 et 1) est une expérience

aléatoire comportant deux issues :

- l'une appelée succès, noté S , de probabilité p .
- l'autre appelée échec, noté $\bar{S}$ ou E , de probabilité $q = 1 - p$.



II.2 Loi de Bernoulli

Notons X la variable aléatoire prenant la valeur 1 en cas de succès et la valeur 0 en cas d'échec.

On dit que X suit la **loi de Bernoulli** de paramètre p .

Autrement dit, on a $P(X=1) = p$ et $P(X=0) = 1 - p$.

On peut résumer la loi de Bernoulli par le tableau suivant :

x_i	1	0
$P(X=x_i)$	p	$1-p$

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi de Bernoulli de paramètre p .

- L'espérance de X est $E(X) = p$.
- La variance de X est $V(X) = p(1-p)$.
- L'écart-type de X est $\sigma(X) = \sqrt{p(1-p)}$.

II.3 Schéma de Bernoulli

Soit n un entier naturel et p un réel compris entre 0 et 1.

Un **schéma de Bernoulli** de paramètres n et p est une expérience aléatoire consistant à répéter n fois, de façon **identique et indépendante**, une épreuve de Bernoulli de paramètre p .

III. Coefficients binomiaux et triangle de Pascal

On considère l'arbre associé à un schéma de Bernoulli de paramètres n et p .

Le nombre de chemins dans l'arbre permettant de réaliser k succès est noté $\binom{n}{k}$.

Les nombres $\binom{n}{k}$ sont appelés les **coefficients binomiaux**.

Méthode pour déterminer les coefficients binomiaux avec la calculatrice :

- Casio 35+ et supérieur : Pour calculer $\binom{5}{2}$, dans le menu RUN (calcul), appuyer sur la touche OPTN, puis choisir PROB. Tapez 5, puis choisir nCr, puis taper 2 et EXE.
- TI 82 et supérieur : Pour calculer $\binom{5}{2}$, taper 5, puis appuyer sur la touche MATH, choisir le menu PROB, puis choisir nCr ou Combinaison (version fr), puis taper 2 et ENTER.

- Pour tous n et k entiers naturels tels que $1 \leq k \leq n$, on a :

$$\begin{aligned} \triangleright \binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1 & \qquad \triangleright \binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n & \qquad \triangleright \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k} \end{aligned}$$

- **Propriété de symétrie** : pour tous n et k entiers naturels tels que $0 \leq k \leq n$, on a $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

IV. Loi binomiale

Soit un schéma de Bernoulli de paramètres n et p , correspondant à la répétition de n épreuves identiques et indépendantes et dont la probabilité du succès d'une épreuve est p .

Soit X la variable aléatoire égale au nombre de succès obtenus lors de ces n épreuves.

On dit que X suit la **loi binomiale** de paramètres n et p . On note $X \sim B(n; p)$.

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi binomiale $B(n; p)$.

Pour tout entier $k \in [0; n]$, on a $P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$.

Méthode pour déterminer les probabilités d'une loi binomiale avec la calculatrice :

- Casio 35+ et supérieur : Pour calculer $P(X=20)$ avec X qui suit la loi $B\left(100; \frac{1}{6}\right)$: Choisir le menu STAT, puis DIST, puis BINM, puis Bpd. Rentrez les paramètres (" x " vaut ici 20, "NumTrial" vaut ici 100, et " p " vaut $\frac{1}{6}$). Enfin, sélectionner CALC.
- TI 82 et supérieur : Pour calculer $P(X=20)$ avec X qui suit la loi $B\left(100; \frac{1}{6}\right)$: Appuyer sur 2nd+DISTR (au-dessus de la touche var), puis choisissez binompdf ou binomFdp (version Fr.). Complétez ensuite les paramètres (ici nombre d'essais, probabilité de succès et valeur de x). L'ordre des paramètres est donc n , puis p et enfin k .

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi binomiale $B(n; p)$.

- L'espérance de X est $E(X)=np$.
- La variance de X est $V(X)=np(1-p)$.
- L'écart-type de X est $\sigma(X)=\sqrt{np(1-p)}$.

Représentation graphique

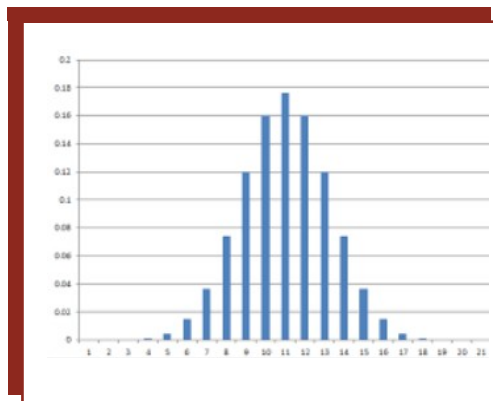
On peut représenter graphiquement une loi binomiale par un diagramme en bâtons en mettant en abscisse les valeurs prises par la variable aléatoire et en ordonnée les probabilités correspondantes. Le diagramme en bâtons est en forme de cloche et est approximativement centré sur son espérance.

Exemple

Le diagramme en bâtons associé à la loi $B(40; 0,5)$, sur lequel k varie de 0 à 40 en abscisses, montre, pour chaque valeur de k , la hauteur de la barre correspondant à $P(X=k)$.

Par exemple, pour $k=10$, la hauteur de la barre est $P(X=10)=0,16$.

Le diagramme est en forme de cloche et est centré en 11. Or l'espérance vaut $E(X)=40 \times 0,5=20$, ce qui signifie que cette loi binomiale n'est pas centrée sur son espérance.

**Remarque**

Pour des variables aléatoires suivant des lois binomiales de même paramètre n , plus p est éloigné de 0,5 et plus l'écart-type est petit. En conséquence, plus la cloche est « étroite » et « haute ».

V. Échantillonnage**V.1 Intervalle de fluctuation**

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi binomiale $B(n; p)$.

Soit α un réel tel que $0 < \alpha < 1$ et a et b deux réels.

$[a; b]$ est un **intervalle de fluctuation au seuil de $1-\alpha$** si et seulement si $P(a \leq X \leq b) \geq 1-\alpha$.

Remarques

- On parle aussi de seuil de confiance, de niveau de confiance ou encore de coefficient de confiance.
- Dans la pratique, on cherchera souvent un intervalle dont l'amplitude est la plus petite possible.
- Selon le contexte, l'intervalle est généralement de la forme $[0; k]$, $[k; n]$ ou $[k; k']$.

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi binomiale $B(n; p)$.

Soit α un réel tel que $0 < \alpha < 1$ et a et b deux réels.

L'intervalle $[a; b]$ tel que a et b soient les plus petits entiers vérifiant $P(X \leq a) > \frac{\alpha}{2}$ et

$P(X \leq b) \geq 1 - \frac{\alpha}{2}$ est un **intervalle de fluctuation centré au seuil de $1 - \alpha$** associé à X .

V.2 Intervalle de fluctuation au seuil de 95%

Au sein d'une population, on suppose que la proportion d'un certain caractère est p .

On souhaite juger cette hypothèse. Pour cela, on prélève dans la population au hasard et avec remise (ou sans remise si la population étudiée est très grande), un échantillon de taille n sur lequel on observe une fréquence f de ce caractère.

Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres n et p .

L'intervalle de fluctuation au seuil de 95% d'une fréquence, sur un échantillon de taille n est :

$I = \left[\frac{a}{n}; \frac{b}{n} \right]$ avec a : le plus petit entier tel que $P(X \leq a) > 0,025$.

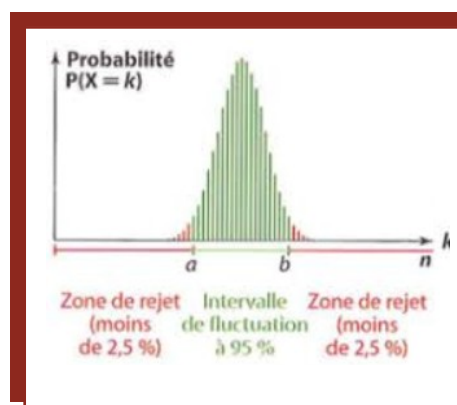
b : le plus petit entier tel que $P(X \leq b) \geq 0,975$.

Exemple

Dans le graphique ci-contre, 95% des valeurs se situent entre les réels a et b .

Nécessairement, 5% des valeurs sont « à l'extérieur ».

Par symétrie, 2,5 % de ces valeurs se situent à gauche de a et 2,5 % à droite de b .

**V.3 Prise de décision**

On fait l'hypothèse que la proportion d'un caractère dans une population est p .

On veut savoir si l'hypothèse est compatible avec l'échantillon étudié.

Prise de décision

Soit I l'intervalle de fluctuation au seuil de 95% selon la loi binomiale de paramètres n et p et f la fréquence observée du caractère étudié.

- Si $f \notin I$ alors on rejette l'échantillon avec une erreur au seuil de 5%. L'échantillon n'est pas représentatif.
- Si $f \in I$ alors on accepte l'hypothèse au seuil de 95%.

Variables aléatoires

I. Variables aléatoires

I.1 Variable aléatoire discrète

Soit une expérience aléatoire dont l'univers est l'ensemble Ω .

Une **variable aléatoire** est une fonction définie sur Ω et à valeurs dans $\mathbb{R}$. On la note X .

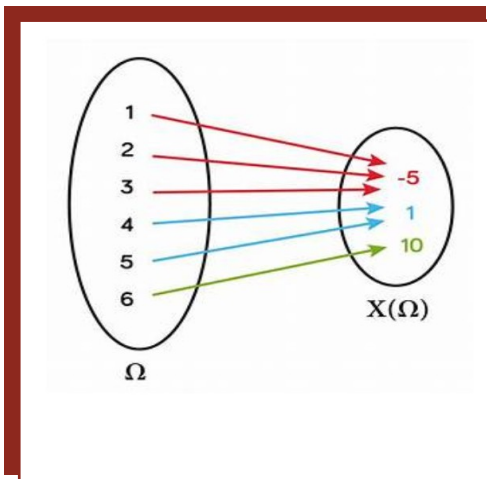
Exemple

On lance un dé équilibré à six faces et on observe le résultat affiché sur la face supérieure.

- « Si le résultat obtenu est 1, 2 ou 3, je perds 5 jetons »
- « Si le résultat obtenu est 4 ou 5, je gagne 1 jeton »
- « Sinon, je gagne 10 jetons »

On peut définir une variable aléatoire X qui décrit les gains de ce jeu. On a donc $X(1)=-5$, $X(2)=-5$, $X(3)=-5$, $X(4)=1$, $X(5)=1$, $X(6)=10$.

On peut représenter la situation par le schéma ci-contre.



I.2 Loi de probabilité d'une variable aléatoire discrète

Soit X une variable aléatoire définie sur l'univers Ω . L'ensemble des valeurs prises par X est $\{x_1; x_2; \dots; x_k\}$, où les valeurs sont rangées par ordre croissant. Le nombre x_i est associé à une ou plusieurs issues de Ω , avec $1 \leq i \leq k$.

- L'événement « $X=x_i$ » est l'ensemble des issues de Ω auxquelles on a associé la valeur x_i .
- L'événement « $X \geq x_i$ » est l'ensemble des issues de Ω auxquelles on a associé une valeur supérieure ou égale à x_i . On définit de même « $X > x_i$ », « $X < x_i$ », et « $X \leq x_i$ ».
- La probabilité de l'événement « $X=x_i$ » est la probabilité de l'événement formé de toutes les issues associées au nombre x_i . On la note $P(X=x_i)$ ou p_i .
- La probabilité de l'événement « $X \geq x_i$ » est la probabilité de l'événement formé de toutes les issues associées au nombre supérieurs ou égaux à x_i . On la note $P(X \geq x_i)$.

Une variable aléatoire X est définie sur l'univers Ω d'une expérience aléatoire.

Notons $\{x_1; x_2; \dots; x_k\}$ l'ensemble des valeurs prises par X .

La loi de probabilité de X est la fonction qui à chaque valeur x_i lui associe sa probabilité notée $P(X=x_i)$. On la représente sous forme d'un tableau de valeurs :

x_i	x_1	x_2	...	x_n
$P(X=x_i)$	$P(X=x_1)$	$P(X=x_2)$	...	$P(X=x_n)$

On a $p_1 + p_2 + \dots + p_n = \sum_{i=1}^k p_i = 1$ ou $P(X=x_1) + P(X=x_2) + \dots + P(X=x_n) = \sum_{i=1}^n P(X=x_i) = 1$.

II. Espérance, variance et écart-type

- L'**espérance** mathématique de la variable aléatoire X est le réel noté $E(X)$ défini par :

$$E(X) = \sum_{i=1}^n p_i x_i = p_1 x_1 + p_2 x_2 + \dots + p_n x_n$$

L'espérance représente la valeur moyenne que prend X si on répète un grand nombre de fois l'expérience aléatoire.

- La **variance** de la variable aléatoire X est le réel positif noté $V(X)$ défini par :

$$V(X) = \sum_{i=1}^n p_i (x_i - E(X))^2 = p_1 (x_1 - E(X))^2 + p_2 (x_2 - E(X))^2 + \dots + p_n (x_n - E(X))^2$$

- L'**écart-type** de la variable aléatoire X est définie comme la racine carrée de la variance :

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

Remarques

- La loi des grands nombres nous permet d'interpréter l'espérance et l'écart-type de la loi de probabilité de X . Elle nous dit en effet qu'en répétant un grand nombre de fois l'expérience, les fréquences observées se rapprochent de la probabilité théorique. En conséquence, la moyenne des résultats obtenus se rapproche de l'espérance de la loi de probabilité de X . L'espérance est donc la moyenne que l'on peut espérer en répétant l'expérience un grand nombre de fois.
 De même pour l'écart-type, qui est un paramètre de dispersion pour une série statistique, il peut être interprété comme un paramètre de dispersion « espérée » pour la loi de probabilité de X .
 Pour le jeu proposé en exemple, l'espérance de $-0,5$ signifie que l'on peut « espérer » ou « craindre » perdre en moyenne $0,5$ jeton par partie (ou perdre 1 jeton toutes les 2 parties).
 Mais avec une moyenne égale à $-0,5$, l'écart-type d'environ $5,41$ exprime le fait que le risque d'obtenir un gain négatif (une perte) est important.
- Si X représente le gain d'un jeu d'argent, si on a $E(X)=0$ alors on dit que le jeu est équitable.

Formule de König-Huygens

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \sum_{i=1}^n p_i x_i^2 - [E(X)]^2 = p_1 x_1^2 + p_2 x_2^2 + \dots + p_n x_n^2 - [E(X)]^2$$

Soit a et b deux réels quelconques. La variable aléatoire Y , dont la loi de probabilité est donnée par le tableau suivant, est notée $aX + b$.

Valeur de Y	$ax_1 + b$	$ax_2 + b$	...	$ax_n + b$
Probabilité	p_1	p_2	...	p_n

On pose $Y = aX + b$.

Soit X une variable aléatoire et a et b deux nombres réels. Alors :

- $E(aX + b) = aE(X) + b$
- $V(aX) = a^2 V(X)$
- $\sigma(aX + b) = |a| \sigma(X)$

Somme de variables aléatoires et concentration

I. Variables aléatoires et opérations

Soit X et Y deux variables aléatoires définies sur l'univers Ω et w les éléments de cet univers. On peut alors définir une variable aléatoire Z sur Ω telle que, pour tout élément $w \in \Omega$, $Z(w) = X(w) + Y(w)$.
La variable aléatoire Z est appelée **somme de variables aléatoires** X et Y .
On note $Z = X + Y$.

Soit X une variable aléatoire définie sur l'univers Ω , a un nombre réel et w les éléments de l'univers Ω . On peut alors définir une variable aléatoire Y telle que, pour tout élément $w \in \Omega$, $Y(w) = a X(w)$. On note $Y = a X$ cette variable aléatoire.

II. Espérance et variance d'une somme de variables aléatoires

II.1 Espérance

Soit X et Y deux variables aléatoires définies sur le même univers Ω .
Alors on a $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$.

Remarques

- On peut déterminer l'espérance d'une addition de plus de deux variables aléatoires. Si Z est aussi une variable aléatoire, alors $E(X + Y + Z) = E(X) + E(Y) + E(Z)$.
- Si Y est constante égale à b , où b est un réel, alors $E(X + b) = E(X) + b$ car $E(b) = b$.

Soit X une variable aléatoire définie sur l'univers Ω et a un nombre réel.
Alors on a $E(a X) = a E(X)$.

Remarques

- Plus généralement, on a $E(a X + b Y) = a E(X) + b E(Y)$.
- On appelle les propriétés 12 et 13 la **linéarité de l'espérance**.

II.2 Variance

Soit $X_1, X_2, \dots, X_n$, n variables aléatoires à valeurs respectivement dans $E_1, E_2, \dots, E_n$.
On dit que $X_1, X_2, \dots, X_n$ sont indépendantes lorsque, pour tous $x_1 \in E_1, x_2 \in E_2, \dots, x_n \in E_n$, on a :

$$P(X_1 = x_1 \cap X_2 = x_2 \cap \dots \cap X_n = x_n) = P(X_1 = x_1) \times P(X_2 = x_2) \times \dots \times P(X_n = x_n)$$

Soit X et Y deux variables aléatoires **indépendantes** définies sur l'univers Ω .
Alors on a $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$.

Soit X une variable aléatoire définie sur l'univers Ω dont on note $V(X)$ sa variance.
Alors on a $V(aX) = a^2 V(X)$ et $\sigma(aX) = |a| \sigma(X)$.

Remarques

- De manière intuitive, deux variables aléatoires sont indépendantes si les résultats de l'une n'ont pas influence sur les résultats de l'autre.
- Si $X_1, X_2, \dots, X_n$ sont des variables aléatoires indépendantes, alors on a $V(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = V(X_1) + V(X_2) + \dots + V(X_n)$.

III. Applications

III.1 Loi binomiale

Deux variables aléatoires sont **identiquement distribuées** lorsqu'elles ont la même loi de probabilité.

Soit $X_1, X_2, \dots, X_n$, n variables aléatoires indépendantes suivant toutes une même loi de Bernoulli de paramètre p .
Alors la variable aléatoire $X_1 + X_2 + \dots + X_n$ suit la loi binomiale de paramètres n et p .

Soit X une variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres n et p .
Alors on a $X = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ où les variables $X_1, X_2, \dots, X_n$ sont des variables aléatoires de Bernoulli indépendantes et identiquement distribuées.

Soit X une variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres n et p .

- L'espérance de X est $E(X) = np$.
- La variance de X est $V(X) = np(1-p)$.
- L'écart-type de X est $\sigma(X) = \sqrt{np(1-p)}$.

III.2 Échantillonnage de n variables aléatoires identiques et indépendantes

Une liste $(X_1; X_2; \dots; X_n)$ de variables aléatoires indépendantes définies sur l'univers Ω suivant toutes la même loi est appelée **échantillon de taille n** associée à cette loi (ou associée à une variable aléatoire X suivant cette loi).

On considère n expériences aléatoires identiques et indépendantes. On note $X_1, X_2, \dots, X_n$ les variables aléatoires associées à ces expériences, toutes de même loi.

On appelle respectivement S_n et M_n les **variables aléatoires somme et moyenne** d'un

échantillon de taille n des X_i . On a $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ et $M_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i = \frac{S_n}{n}$.

Soit $(X_1; X_2; \dots; X_n)$ un échantillon de taille n d'une variable aléatoire X .

- Les espérances de S_n et M_n sont $E(S_n) = n E(X_i)$ et $E(M_n) = E(X_i)$.
- Les variances de S_n et M_n sont $V(S_n) = n V(X_i)$ et $V(M_n) = \frac{V(X_i)}{n}$.
- Les écarts-types de S_n et M_n sont $\sigma(S_n) = \sqrt{n} \sigma(X_i)$ et $\sigma(M_n) = \frac{\sigma(X_i)}{\sqrt{n}}$.

IV. Inégalités de concentration

IV.1 Inégalité de Markov

Une variable aléatoire est dite positive ou nulle dans un univers Ω lorsque toutes les valeurs prises par celle-ci sont des réels positifs ou nuls.

Inégalité de Markov

Soit X une variable aléatoire réelle à valeurs positives ou nulles d'espérance $E(X)$.

Pour tout réel δ strictement positif, on a $P(X \geq \delta) \leq \frac{E(X)}{\delta}$.

IV.2 Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Soit X une variable aléatoire réelle d'espérance $E(X) = \mu$ et de variance $V(X)$.

Pour tout réel δ strictement positif, on a $P(|X - \mu| \geq \delta) \leq \frac{V(X)}{\delta^2}$.

IV.3 Inégalité de concentration

Inégalité de concentration

Soit $X_1, X_2, \dots, X_n$ un échantillon de variables aléatoires d'espérance μ et de variance V et M_n la variable aléatoire moyenne de cet échantillon.

Pour tout réel δ strictement positif, on a $P(|M_n - \mu| \geq \delta) \leq \frac{V}{n \delta^2}$.

V. Loi des grands nombres

Soit $X_1, X_2, \dots, X_n$ un échantillon de variables aléatoires d'espérance μ et de variance $V(X)$ et M_n la variable aléatoire moyenne de cet échantillon.

Pour tout réel δ strictement positif, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(|M_n - \mu| \geq \delta) = 0$.

On dit que M_n **converge en probabilité** vers μ lorsque n tend vers $+\infty$.