

Sommaire

I. Fonctions.....	2
• Équations du second degré.....	2
• Étude des fonctions polynomiales.....	5
• Dérivation.....	7
• Fonctions dérivées et applications.....	11
• Fonction exponentielle.....	13
II. Suites.....	15
• Suites numériques.....	15
• Suites arithmétiques.....	17
• Suites géométriques.....	19
• Limites de suites.....	23
III. Trigonométrie.....	25
IV. Géométrie plane.....	31
• Préambule sur la géométrie analytique.....	31
• Produit scalaire.....	35
• Application du produit scalaire.....	39
V. Probabilités.....	41
• Probabilités conditionnelles et indépendance.....	41
• Variables aléatoires.....	45

Équations du second degré

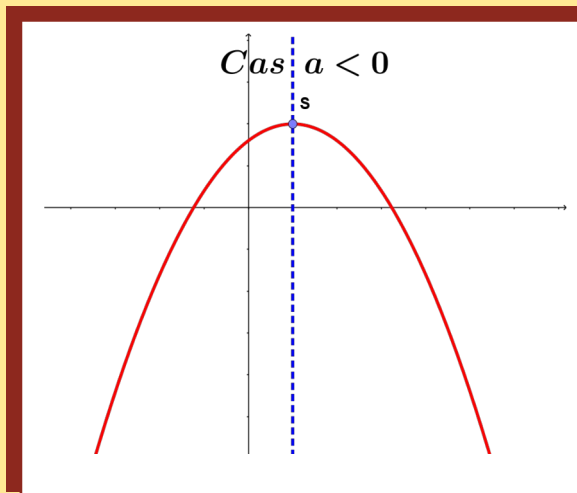
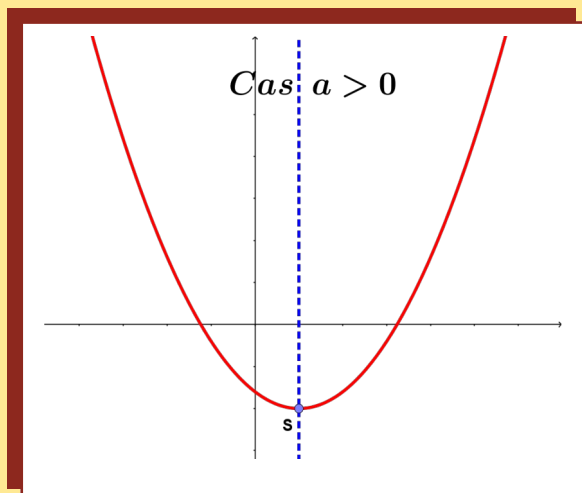
I. Fonction polynôme du second degré

On appelle **fonction polynôme du second degré** (ou **trinôme**) toute fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$ où a , b et c sont des nombres réels et $a \neq 0$. Cette expression est appelée **forme développée** de f .

Soit f une fonction polynôme du second degré définie par $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$.

On dit que la courbe représentative de cette fonction est une **parabole** telle que :

- Elle a une forme de « U » (« tournée vers le haut ») lorsque a est positif.
- Elle a une forme de « pont » (« tournée vers le bas ») lorsque a est négatif.
- Le point $S(\alpha; \beta)$ est son **sommet** où $\alpha = -\frac{b}{2a}$ et $\beta = f(\alpha)$.
- Elle possède comme **axe de symétrie** la droite d'équation $x = \alpha$.



Soit f une fonction polynôme du second degré définie par $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$.

La parabole qui représente la fonction f :

- coupe l'axe des ordonnées au point $C(0; c)$.
- peut, selon les cas, couper l'axe des abscisses en deux points, un seul ou aucun.

Pour toute fonction polynôme du second degré de la forme $f(x) = ax^2 + bx + c$, avec $a \neq 0$, on peut trouver deux nombres réels α et β tels que pour tout nombre x , on a :

$$f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta \quad \text{avec} \quad \alpha = -\frac{b}{2a} \quad \text{et} \quad \beta = f(\alpha)$$

Le sommet de la parabole est alors de coordonnées $(\alpha; \beta)$.

Cette expression est appelée **forme canonique** de f .

Méthode : Démontrer qu'une fonction polynôme de degré 2 admet un extremum

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2 - 12x + 23$.

a. Démontrer que pour tout x réel, $f(x) = 2(x-3)^2 + 5$.

b. En déduire que f admet un minimum dont on précisera la valeur.

a. En développant la 2^e expression, on obtient :

$$2(x-3)^2 + 5 = 2(x^2 - 6x + 9) + 5 = 2x^2 - 12x + 18 + 5 = 2x^2 - 12x + 23 = f(x).$$

$$\begin{aligned} \text{Autre méthode : } 2x^2 - 12x + 23 &= 2\left(x^2 - 6x + \frac{23}{2}\right) \\ &= 2\left(x^2 - 2 \times 3x + 3^2 - 3^2 + \frac{23}{2}\right) \\ &= 2\left((x-3)^2 + \frac{5}{2}\right) \\ &= 2(x-3)^2 + 5 \\ &= f(x) \end{aligned}$$

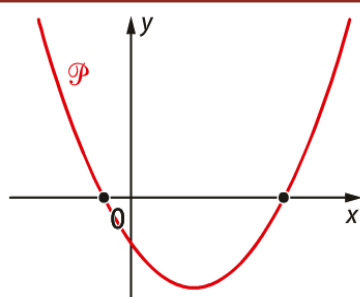
b. On regarde le signe de a : $a = 2 > 0$.

La parabole est « tournée vers le haut », donc f admet un minimum.

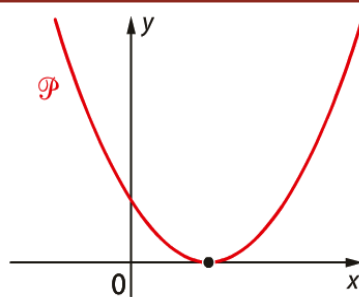
Or la deuxième expression correspond à la forme canonique, d'où on peut lire la valeur du minimum qui est 5, atteint pour $x = 3$.

II. Équation du second degré**II.1 Approche graphique**

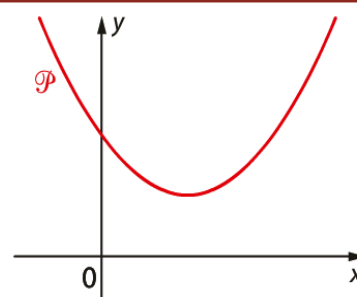
Résoudre l'équation $ax^2 + bx + c = 0$, où $a \neq 0$, c'est trouver, s'il en existe, tous les nombres x qui vérifient cette égalité. De tels nombres sont appelés **solutions de l'équation** ou **racines** du trinôme. Pour trouver le nombre de solutions de cette équation, on peut s'aider de la représentation graphique de la fonction f définie par $f(x) = ax^2 + bx + c$. Dans les trois exemples ci-dessous, on peut conjecturer que l'équation admet respectivement deux solutions, une solution et aucune solution.



$\mathcal{P}$ coupe deux fois
l'axe des abscisses.



$\mathcal{P}$ coupe une fois
l'axe des abscisses.



$\mathcal{P}$ ne coupe pas
l'axe des abscisses.

II.2 Vocabulaire

Une **équation du second degré**, d'inconnue x , est une équation qui peut s'écrire sous la forme $ax^2 + bx + c = 0$ où a , b et c sont des nombres réels, avec $a \neq 0$.

Une solution de cette équation est appelée **racine** du trinôme $ax^2 + bx + c$.

Le nombre réel $b^2 - 4ac$ est appelé **discriminant** du trinôme $ax^2 + bx + c$. Il est noté Δ (se lit « delta »).

II.3 Résolution

Soit $ax^2 + bx + c = 0$ avec $a \neq 0$ une équation du second degré et $\Delta = b^2 - 4ac$ son discriminant. L'existence de racine pour l'équation $ax^2 + bx + c$ dépend du signe de Δ .

- Si $\Delta > 0$, l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ a **deux racines réelles distinctes** :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

- Si $\Delta = 0$, l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ a **une unique racine réelle** (appelée **racine double**) :

$$x_0 = -\frac{b}{2a}$$

- Si $\Delta < 0$, l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ **n'admet aucune racine réelle**.

II.4 Propriétés des racines

Soit $ax^2 + bx + c$ un trinôme du second degré avec $a \neq 0$. Si ce trinôme admet deux racines distinctes ou confondues, alors leur somme S et leur produit P vérifient les relations suivantes :

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \text{ et } P = x_1 \times x_2 = \frac{c}{a}$$

Deux réels ont pour somme S et pour produit P si et seulement s'ils sont solutions de l'équation $x^2 - Sx + P = 0$.

Méthode : Déterminer les racines d'un polynôme à l'aide de leur somme et de leur produit

Trouvons, s'ils existent, deux nombres réels dont la somme est 4 et le produit 1.

S'ils existent, ces deux nombres vérifient $S = 4$ et $P = 1$ et sont solutions de l'équation

$$x^2 - 4x + 1 = 0.$$

On a $\Delta = (-4)^2 - 4 \times 1 \times 1 = 16 - 4 = 12$.

Comme $\Delta > 0$, l'équation possède deux racines réelles distinctes :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-4) - \sqrt{12}}{2 \times 1} = \frac{4 - \sqrt{4 \times 3}}{2} = \frac{4 - 2\sqrt{3}}{2} = 2 - \sqrt{3}$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-4) + \sqrt{12}}{2 \times 1} = \frac{4 + \sqrt{4 \times 3}}{2} = \frac{4 + 2\sqrt{3}}{2} = 2 + \sqrt{3}$$

Les nombres recherchés sont $2 - \sqrt{3}$ et $2 + \sqrt{3}$.

Étude des fonctions polynomiales

I. Fonction polynôme du second degré

I.1 Rappels

On appelle **fonction polynôme du second degré** (ou **trinôme**) toute fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$ où a , b et c sont des nombres réels et $a \neq 0$. Cette expression est appelée **forme développée** de f .

Soit f une fonction polynôme du second degré définie par $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$. On dit que la courbe représentative de cette fonction est une **parabole** telle que :

- Elle a une forme de « U » (« tournée vers le haut ») lorsque a est positif.
- Elle a une forme de « pont » (« tournée vers le bas ») lorsque a est négatif.
- Le point $S(\alpha; \beta)$ est son **sommet** où $\alpha = -\frac{b}{2a}$ et $\beta = f(\alpha)$.
- Elle possède comme **axe de symétrie** la droite d'équation $x = \alpha$.

Soit f une fonction polynôme du second degré définie par $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$. La parabole qui représente la fonction f :

- coupe l'axe des ordonnées au point $C(0; c)$.
- peut, selon les cas, couper l'axe des abscisses en deux points, un seul ou aucun.

Pour toute fonction polynôme du second degré de la forme $f(x) = ax^2 + bx + c$, avec $a \neq 0$, on peut trouver deux nombres réels α et β tels que pour tout nombre x , on a :

$$f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta \text{ avec } \alpha = -\frac{b}{2a} \text{ et } \beta = f(\alpha)$$

Le sommet de la parabole est alors de coordonnées $(\alpha; \beta)$.

Cette expression est appelée **forme canonique** de f .

I.2 Sens de variations

Soit f une fonction polynôme du second degré définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=ax^2+bx+c$ avec $a \neq 0$.

- Si $a > 0$, f est strictement décroissante sur $]-\infty; \alpha]$ et strictement croissante sur $[\alpha; +\infty[$.

Elle admet comme minimum β en $x=\alpha$.

- Si $a < 0$, f est strictement croissante sur $]-\infty; \alpha]$ et strictement décroissante sur $[\alpha; +\infty[$.

Elle admet comme maximum β en $x=\alpha$.

Cas $a > 0$

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f(x)$			

Cas $a < 0$

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f(x)$			

II. Signe d'un trinôme

Soit f la fonction polynôme du second degré définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=ax^2+bx+c$ avec $a \neq 0$.

On a la factorisation suivante :

- Si $\Delta > 0$, alors on a pour tout réel x , $f(x)=a(x-x_1)(x-x_2)$.
- Si $\Delta = 0$, alors on a pour tout réel x , $f(x)=a(x-x_0)^2$.
- Si $\Delta < 0$, alors f ne se factorise pas.

Soit f la fonction polynôme du second degré définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=ax^2+bx+c$ avec $a \neq 0$.

- Si $\Delta > 0$, $f(x)$ s'annule pour $x=x_1$ et $x=x_2$ (on suppose que $x_1 < x_2$) et alors :
 - le signe de $f(x)$ est **du signe de a** pour x extérieur à l'intervalle des racines ;
 - le signe de $f(x)$ est **du signe contraire de celui de a** si x est compris entre les racines.

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$	
$f(x)$	signe de a	0	signe de $-a$	0	signe de a

- Si $\Delta = 0$, $f(x)$ s'annule pour $x=x_0$: **son signe est celui de a** pour tous les réels $x \neq x_0$.

x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
$f(x)$	signe de a	0	signe de a

- Si $\Delta < 0$, $f(x)$ a le **même signe que a** pour tout réel x .

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$	signe de a	

Dérivation

I. Nombre dérivé

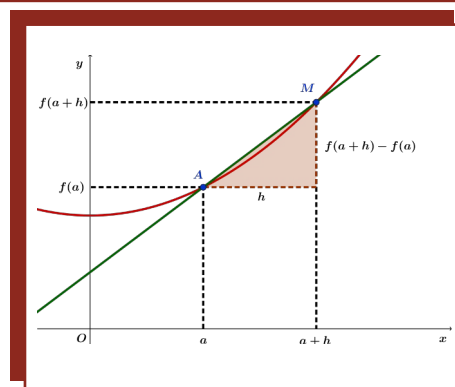
I.1 Taux d'accroissement

Soit f une fonction définie sur un intervalle contenant les réels a et b . Le **taux de variation** de la fonction f entre a et b est le réel défini par le quotient $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Le **taux d'accroissement** de f entre a et $a+h$ est $\tau(h) = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$.

Remarques

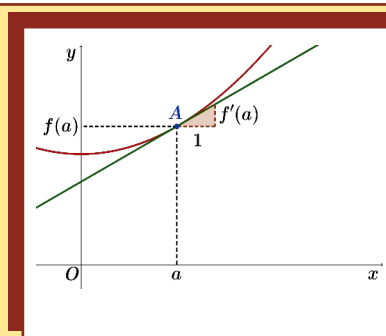
- $\tau(0)$ n'existe pas, mais on va s'intéresser aux valeurs de $\tau(h)$ lorsque h se rapproche de plus en plus de 0.
 - Le taux d'accroissement de f entre a et $a+h$ est le **coefficient directeur** de la droite (AM) avec $A(a; f(a))$ et $M(a+h; f(a+h))$.
- On appelle cette droite une sécante à la courbe.



I.2 Nombre dérivé

Si, lorsque h se rapproche le plus possible de 0, $\tau(h)$ semble valoir une valeur réelle, on dit que f est dérivable en a . Cette valeur réelle est appelée **nombre dérivé** de f en a , et est notée $f'(a)$. On écrit alors : $f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \tau(h)$, soit $f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$.

On constate que, lorsque h tend vers 0, les sécantes en A tendent vers une droite particulière, nommée **tangente** à C_f en A : aux alentours du point $A(a, f(a))$, elle est semblable à la courbe.



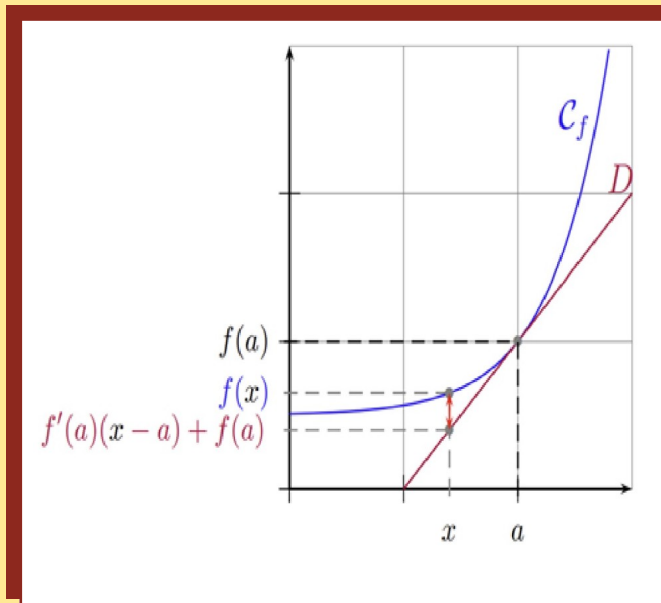
Lorsque f est dérivable en a , on appelle **tangente** à la courbe C_f au point d'abscisse a la droite T passant par $A(a, f(a))$ dont le **coefficient directeur est le nombre dérivé** $f'(a)$.

Soit f une fonction dérivable en a . L'**équation** de la tangente T à la courbe C_f au point d'abscisse a est : $T: y = f'(a)(x-a) + f(a)$.

I.3 Approximation linéaire

Soit f une fonction dérivable en a .
 On appelle fonction **affine tangente de f en a** la fonction $x \rightarrow f'(a)(x-a) + f(a)$.
 Pour tout x proche de a , on a :

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x-a)$$



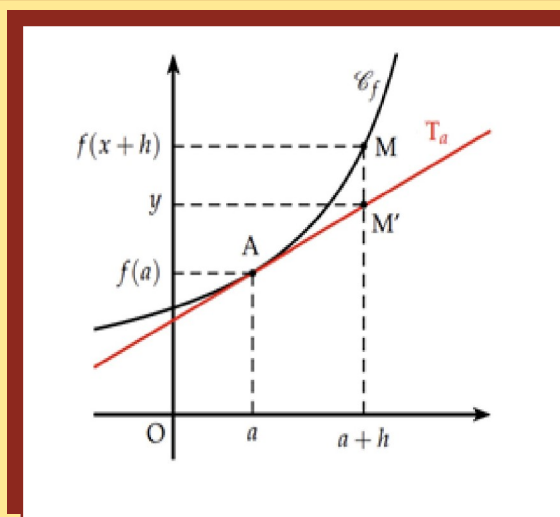
Remarques

- Il s'agit de l'**approximation affine (ou linéaire) de f en a** ou l'**approximation polynomiale à l'ordre 1 de f en a** .
- Si f est deux fois dérivable, alors pour tout $x \in I$ proche de a , on a :

$$f(x) \approx f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2} f''(a)$$

Il s'agit de l'**approximation polynomiale à l'ordre 2 de f en a** , où f'' est la dérivée seconde de f (soit la dérivée de la fonction f').

Soit f une fonction dérivable en a .
 On pose $x = a+h$ avec h proche de 0.
 Si on confond le point M avec le point M' ,
 on a $y \approx f(a+h)$. Alors $f(a+h) \approx f(a) + f'(a)h$.
 $f(a) + f'(a)h$ est donc une **approximation linéaire de $f(a+h)$** .



II. Fonction dérivée

Soit une fonction f définie sur un intervalle I .

On dit que f est dérivable sur I si elle est dérivable en tout point x de I .

On appelle fonction dérivée de f et on note f' la fonction qui à chaque x associe $f'(x)$.

Remarques

Toutes les fonctions usuelles vues en première sont dérivables sur leur domaine de définition, à l'exception des fonctions racine carrée et valeur absolue en 0.

- La tangente à la courbe représentative de la fonction racine carrée au point de coordonnées $(0; 0)$ est verticale (c'est l'axe des ordonnées), d'équation $x=0$. Elle n'a donc pas de coefficient directeur. $f'(0)$ n'existe pas. La fonction racine carrée n'est donc dérivable que sur $]0; +\infty[$.
- La fonction valeur absolue n'est également pas dérivable en 0 : en effet, elle n'admet pas de tangente en ce point, du fait de l'angle droit qu'elle y fait. Ainsi, une courbe n'admet pas toujours une tangente en chacun de ses points.

III. Dérivées des fonctions usuelles

Fonction	D_f	Fonction dérivée	$D_{f'}$
$f(x)=k, k \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x)=0$	$\mathbb{R}$
$f(x)=mx+p$	$\mathbb{R}$	$f'(x)=m$	$\mathbb{R}$
$f(x)=x^2$	$\mathbb{R}$	$f'(x)=2x$	$\mathbb{R}$
$f(x)=\frac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$	$f'(x)=-\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$
$f(x)=\sqrt{x}$	$]0; +\infty[$	$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0; +\infty[$
$f(x)=x^n, n \geq 1$	$\mathbb{R}$	$f'(x)=nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$f(x)=\frac{1}{x^n}, n \geq 1$	$\mathbb{R}^*$	$f'(x)=-\frac{n}{x^{n+1}}$	$\mathbb{R}^*$
$f(x)=\cos(x)$	$\mathbb{R}$	$f'(x)=-\sin(x)$	$\mathbb{R}$
$f(x)=\sin(x)$	$\mathbb{R}$	$f'(x)=\cos(x)$	$\mathbb{R}$
$f(x)=e^x$	$\mathbb{R}$	$f'(x)=e^x$	$\mathbb{R}$

IV. Premières opérations sur les dérivées

Soit f une **fonction polynomiale** de la forme $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ définie sur $\mathbb{R}$ avec $n \in \mathbb{N}$ et $a_n \neq 0$.

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = n a_n x^{n-1} + (n-1) a_{n-1} x^{n-2} + \dots + a_1$.

Fonction	Fonction dérivée
$u + v$	$u' + v'$
$u - v$	$u' - v'$
$\lambda u, \lambda \in \mathbb{R}$	$\lambda u'$

Fonctions dérivées et applications

I. Opérations sur les fonctions dérivées

Soit f une **fonction polynomiale** de la forme $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ définie sur $\mathbb{R}$ avec $n \in \mathbb{N}$ et $a_n \neq 0$.

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = n a_n x^{n-1} + (n-1) a_{n-1} x^{n-2} + \dots + a_1$.

Soit f une fonction définie sur un intervalle J et g une fonction définie sur un intervalle I tel que $g(x) \in J$ pour tout $x \in I$.

On définit la **composée** de f et g comme la fonction définie sur I par : $(f \circ g)(x) = f(g(x))$.

On a le schéma suivant :

$$\begin{array}{ccccc} f \circ g : & I & \rightarrow & J & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \xrightarrow{g} & g(x) & \xrightarrow{f} & f(g(x)) \end{array}$$

Soit f une fonction définie sur un intervalle J et g une fonction définie sur un intervalle I par $g(x) = ax + b$, où a et b sont des réels tels que $g(x) \in J$ pour tout $x \in I$.

Alors la fonction $f \circ g$ est dérivable sur I , et on a pour tout réel $x \in I$, $(f \circ g)'(x) = a f'(ax + b)$.

Soit u , v et g trois fonctions dérivables sur I et f une fonction dérivable sur J .

Fonction	Fonction dérivée
$u + v$	$u' + v'$
$u - v$	$u' - v'$
λu , $\lambda \in \mathbb{R}$	$\lambda u'$
uv	$u'v + uv'$
u^2	$2u'u$
$\frac{1}{v}$, $v(x) \neq 0$ pour tout $x \in I$	$-\frac{v'}{v^2}$
$\frac{u}{v}$, $v(x) \neq 0$ pour tout $x \in I$	$\frac{u'v - uv'}{v^2}$
$\sqrt{u}$, $u(x) \geq 0$ pour tout $x \in I$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$
u^n , $n \geq 1$	$nu' u^{n-1}$
e^u	$u' e^u$
$(f \circ g)(x)$, a et b réels et $g(x) = ax + b$	$(f \circ g)'(x) = a f'(ax + b)$

II. Sens de variation d'une fonction

II.1 Du sens de variation d'une fonction au signe de la dérivée

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I .

- Si f est **croissante** sur I , alors pour tout réel x de I , $f'(x) \geq 0$.
- Si f est **décroissante** sur I , alors pour tout réel x de I , $f'(x) \leq 0$.
- Si f est **constante** sur I , alors pour tout réel x de I , $f'(x) = 0$.

Remarque

Dans de nombreux cas il sera nécessaire de dériver pour étudier les variations d'une fonction, car l'étude du signe de la dérivée sera plus simple que l'étude des variations de la fonction initiale.

II.2 Du signe de la dérivée au sens de variation de la fonction

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I .

- Si pour tout réel x de I , $f'(x) \geq 0$, alors la fonction f est **croissante** sur I .
- Si pour tout réel x de I , $f'(x) \leq 0$, alors la fonction f est **décroissante** sur I .
- Si pour tout réel x de I , $f'(x) = 0$, alors la fonction f est **constante** sur I .
- Si f' est **strictement positive** (respectivement **strictement négative**) sur I , sauf éventuellement pour un nombre fini de valeurs de x où f' s'annule, alors f est **strictement croissante** (respectivement **strictement décroissante**) sur I .

Remarque

Une flèche dans le tableau de variation d'une fonction f indiquera dorénavant la stricte croissance ou décroissance de f sur l'intervalle correspondant.

III. Extremum d'une fonction

Soit une fonction f définie sur un intervalle I et a un réel de I .

- On dit que le réel M est le **maximum** de f sur I , **atteint** en a , si $f(a) = M$ et si pour tout réel x de I , on a $f(x) \leq M$.
- On dit que le réel m est le **minimum** de f sur I , **atteint** en a , si $f(a) = m$ et si pour tout réel x de I , on a $f(x) \geq m$.
- Un **extremum** de f sur I est un **maximum** ou un **minimum** de f sur I .
- On dit que le réel L est un **maximum** (respectivement **minimum**) **local** de f sur I s'il existe un intervalle ouvert J contenu dans I , tel que L est le maximum (respectivement minimum) de f sur J .

Soit une fonction f définie et dérivable sur un intervalle I **ouvert** et a un réel de I .

Si f admet un extremum (local) sur I , atteint en a , alors $f'(a) = 0$.

Soit une fonction f définie et dérivable sur un intervalle I **ouvert**, et a un réel de I .

Si la dérivée f' s'annule en changeant de signe en a , alors $f'(a)$ est un extremum (local) de f sur I .

Fonction exponentielle

I. Généralités sur la fonction exponentielle

La **fonction exponentielle** est l'unique fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$.
On note $\exp(x) = e^x$.

II. Propriétés algébriques

Pour tous réels x et y et tout entier relatif n , on a :

- $e \approx 2,718$
- $e^0 = 1$
- $e^1 = e$
- $e^x \times e^{-x} = 1$
- $e^x \neq 0$
- $e^{x+y} = e^x + e^y$
- $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$
- $e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}$
- $(e^x)^n = e^{nx}$

III. Étude de la fonction exponentielle

III.1 Signe

La fonction exponentielle est **strictement positive** sur $\mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x > 0$.

III.2 Variation

La fonction exponentielle est **strictement croissante** sur $\mathbb{R}$.

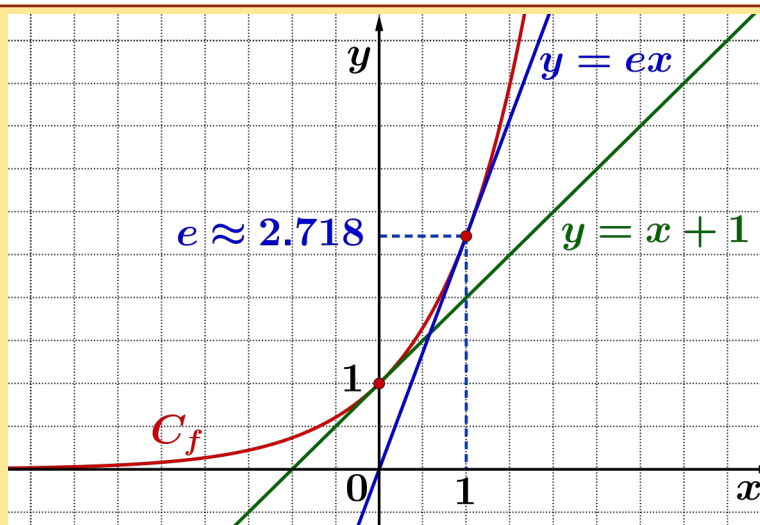
III.3 Limites (hors programme)

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$

III.4 Tableau

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	+			
$f(x)$				

III.5 Représentation graphique



Équations de tangente :

- L'équation de la tangente au point d'abscisse 0 est $T_0 : y = x + 1$.
- L'équation de la tangente au point d'abscisse 1 est $T_1 : y = ex$.

IV. Lien avec les suites géométriques

Soit $a \in \mathbb{R}$. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier n par $u_n = e^{na}$.

La suite (u_n) est une suite géométrique de raison e^a . Alors :

- Si $a > 0$, la suite (u_n) est strictement croissante et $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{na} = +\infty$.
- Si $a < 0$, la suite (u_n) est strictement décroissante et $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{na} = 0$.

V. Équations de inéquations

Pour tous réels x et y , on a :

- Si $x \leq 0$, alors $0 < e^x \leq 1$
- Si $x \geq 0$, alors $1 \leq e^x$
- $e^x = e^y \Leftrightarrow x = y$
- $e^x < e^y \Leftrightarrow x < y$

VI. Les fonctions exponentielles de la forme e^u

Soit u une fonction définie et dérivable sur un intervalle I .

- La fonction e^u définie par $x \rightarrow e^{u(x)}$ est appelé exponentielle de u .
- La fonction $x \rightarrow e^{u(x)}$ est **strictement positive** sur son ensemble de définition.

Soit f une fonction définie par $f(x) = e^{u(x)}$ où u est une fonction dérivable sur un intervalle I .

- La fonction f est dérivable sur I et on a pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = u'(x)e^{u(x)}$.
- La fonction f a le même sens de variation que la fonction u .

Suites numériques

I. Généralités sur les suites

Une suite numérique est une **succession infinie de réels**. Une suite numérique est donc une fonction définie sur l'ensemble des **entiers naturels** $\mathbb{N}$.

Une suite numérique (u_n) définie à partir du rang p est une fonction qui à chaque entier $n \geq p$ associe un réel, noté u_n . Cette suite est aussi notée $(u_n)_{n \geq p}$ ou simplement u .

u_n est appelé le **terme général** de la suite ou le **terme d'indice** n .

u_p est le **terme initial** ou le **premier terme** de la suite.

Attention !

- u_{n+1} est le terme d'indice $n+1$. C'est le terme qui suit le terme d'indice n , c'est-à-dire u_n . On ne doit pas le confondre avec $u_n + 1$ qui est la somme de u_n , le terme d'indice n , et de 1.
- u_{n-1} est le terme d'indice $n-1$. Il précède le terme u_n .

Une suite numérique (u_n) peut être représentée par un **nuage de points** de coordonnées $(n; u_n)$.

II. Mode de génération d'une suite numérique

II.1 Suite définie par une formule explicite

Soit a un nombre réel et f une fonction définie sur l'intervalle $[a; +\infty[$.

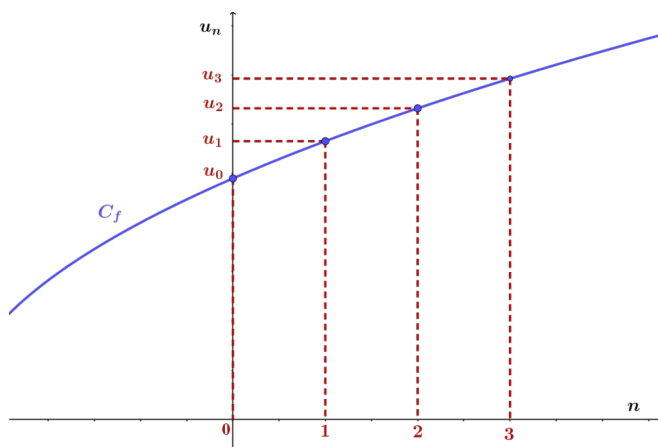
On peut définir une suite (u_n) en posant pour tout entier $n \geq a$, $u_n = f(n)$.

Une suite (u_n) est définie de **façon explicite** quand le terme u_n est exprimé en fonction de n .

Avec cette définition, on peut donc calculer n'importe quel terme de la suite à partir de son indice.

Représentation graphique

Graphiquement, les termes de la suite (u_n) sont les ordonnées des points $A_n(n; u_n)$ d'abscisses entières de la courbe C_f .



II.2 Suite définie par une formule de récurrence

Soit f une fonction définie sur un ensemble I . On suppose que si $x \in I$, alors $f(x) \in I$.

Soit a un nombre réel de I et p un entier.

On peut alors définir une suite (u_n) en posant $u_p = a$ et pour tout entier $n \geq p$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

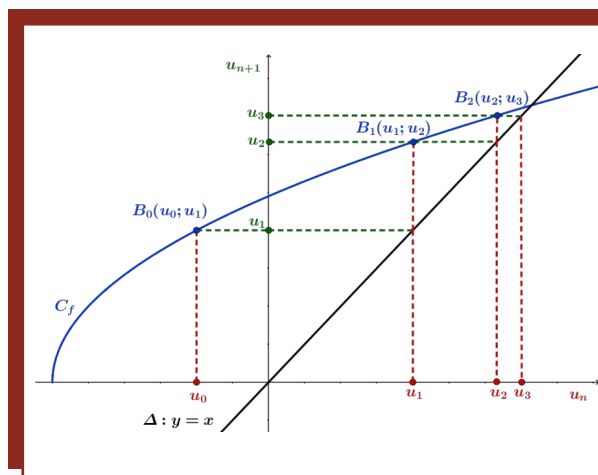
Représentation graphique

Graphiquement, $B_0(u_0; u_1)$ appartient à la courbe C_f .

Pour déterminer $B_1(u_1; u_2)$, il faut placer u_1 , l'ordonnée de B_0 , en abscisse.

On « reporte » donc u_1 sur l'axe des abscisses en utilisant la droite $\Delta : y = x$.

On poursuit de même pour construire $B_2(u_2; u_3)$, $B_3(u_3; u_4)$, ...



III. Sens de variations

- Une suite (u_n) est **croissante** à partir du rang p si pour tout $n \geq p$, $u_{n+1} \geq u_n$.
- Une suite (u_n) est **décroissante** à partir du rang p si pour tout $n \geq p$, $u_{n+1} \leq u_n$.
- Une suite (u_n) est **monotone** si elle est soit croissante, soit décroissante à partir du rang p .
- Une suite (u_n) est **stationnaire** à partir du rang p si pour tout n , $u_{n+1} = u_n$.
- Une suite (u_n) est **constante** lorsque pour tout n , $u_{n+1} = u_n$.

Méthodes d'étude de variation d'une suite

- Étude du signe de la différence : Soit (u_n) une suite.

- Si à partir du rang p , pour tout entier $n \geq p$, $u_{n+1} - u_n \geq 0$, alors (u_n) est une suite croissante.
- Si à partir du rang p , pour tout entier $n \geq p$, $u_{n+1} - u_n \leq 0$, alors (u_n) est une suite

décroissante.

- Étude du quotient : Soit (u_n) une suite dont **tous les termes sont strictement positifs**.

- Si à partir du rang p , pour tout entier $n \geq p$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$, alors $u_{n+1} \geq u_n$ et donc (u_n) est une suite croissante.

- Si à partir du rang p , pour tout entier $n \geq p$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1$, alors $u_{n+1} \leq u_n$ et donc (u_n) est une suite décroissante.

- Étude de la fonction f associée pour une suite explicite :

Soit a un nombre réel et f une fonction définie sur l'intervalle $[a; +\infty[$.

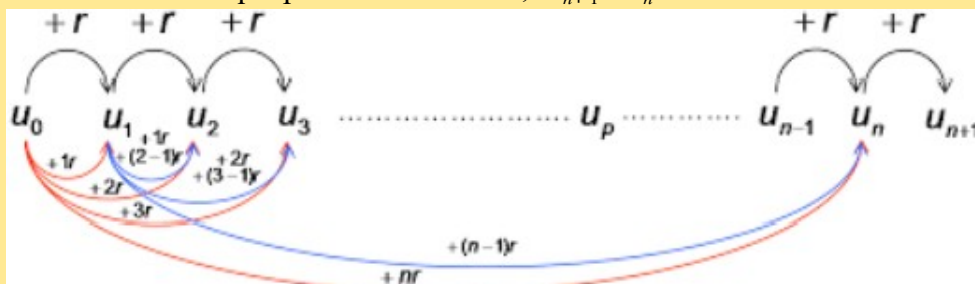
Soit un entier $p \geq a$ et la suite (u_n) définie pour tout entier $n \geq p$ par $u_n = f(n)$.

- Si la fonction f est (strictement) **croissante** sur $[p; +\infty[$, alors la suite (u_n) est (strictement) **croissante** à partir du rang p .
- Si la fonction f est (strictement) **décroissante** sur $[p; +\infty[$, alors la suite (u_n) est (strictement) **décroissante** à partir du rang p .

Suites arithmétiques

On dit qu'une suite (u_n) est **arithmétique** si, à partir de son premier terme, **chaque terme est obtenu en ajoutant au précédent un même nombre**.

Ainsi, il existe un réel r tel que pour tout entier n , $u_{n+1} = u_n + r$.



Le nombre r est appelé **raison** de la suite arithmétique (u_n) . Il est égal à la différence entre deux termes consécutifs quelconques : pour tout entier n , $r = u_{n+1} - u_n$.

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r .

Pour tous entiers n et p tels que $n \geq p$, on a $u_n = u_p + (n - p)r$.

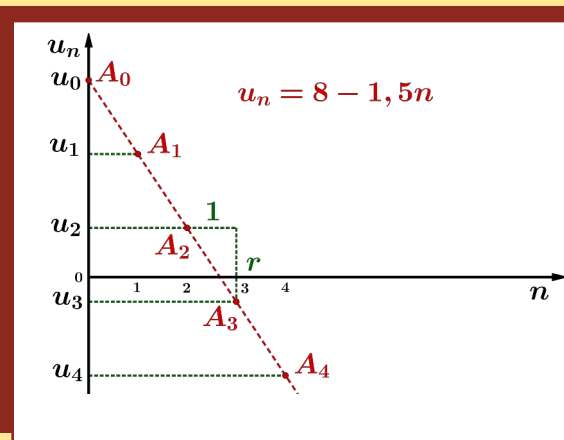
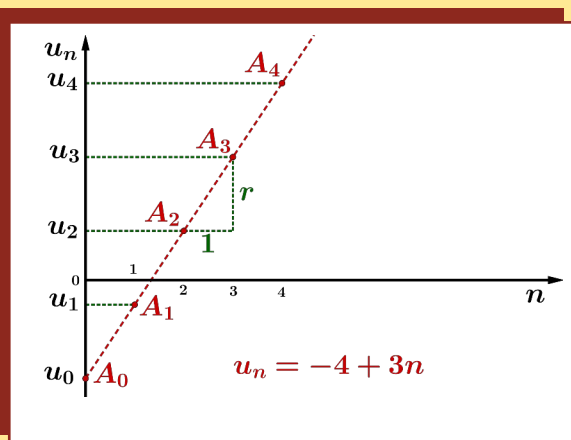
En particulier, pour tout entier n , $u_n = u_0 + nr$.

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_p .

- Si $r > 0$, alors la suite (u_n) est (strictement) **croissante**.
- Si $r < 0$, alors la suite (u_n) est (strictement) **décroissante**.
- Si $r = 0$, alors la suite (u_n) est **constante**, égale à u_p .

La représentation graphique d'une suite arithmétique (u_n) est un **ensemble de points isolés alignés de coordonnées $(n; u_n)$** .

Ces points sont situés sur une **droite** d'équation $y = rx + u_0$ (le coefficient directeur de la droite est la raison r).



Soit n un entier naturel non nul. La somme des n premiers entiers est :

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

Soit (u_n) une suite arithmétique. La formule suivante donne la somme des termes consécutifs :

$$\text{Somme des termes consécutifs} = \text{nombre de termes} \times \frac{\text{premier terme} + \text{dernier terme}}{2}$$

En particulier, pour une suite arithmétique de premier terme u_0 :

$$S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n = \sum_{k=0}^n u_k = (n+1) \times \frac{u_0 + u_n}{2}$$

De manière plus générale, si n et p sont deux entiers naturels tels que $n > p$, alors :

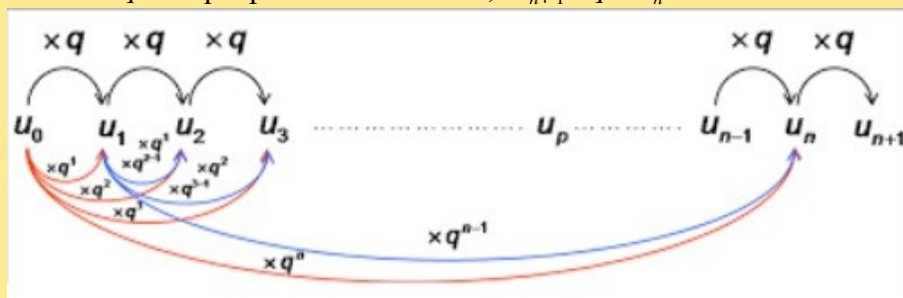
$$S_n = u_p + u_{p+1} + \dots + u_n = \sum_{k=p}^n u_k = (n-p+1) \times \frac{u_p + u_n}{2}$$

Suites géométriques

I. Suites géométriques

On dit qu'une suite (u_n) est **géométrique** si, à partir de son premier terme, **chaque terme est obtenu en multipliant le précédent par un même nombre**.

Ainsi, il existe un réel q tel que pour tout entier n , $u_{n+1} = q \times u_n$.



Le nombre q est appelé **raison** de la suite géométrique (u_n) .

Dans le cas où la suite (u_n) ne s'annule pas, q est égal au quotient de deux termes consécutifs

quelconques : pour tout entier n , $q = \frac{u_{n+1}}{u_n}$.

Soit (u_n) une suite géométrique de raison q .

Pour tous entiers n et p tels que $n \geq p$, on a $u_n = u_p \times q^{n-p}$.

En particulier, pour tout entier n , $u_n = u_0 \times q^n$.

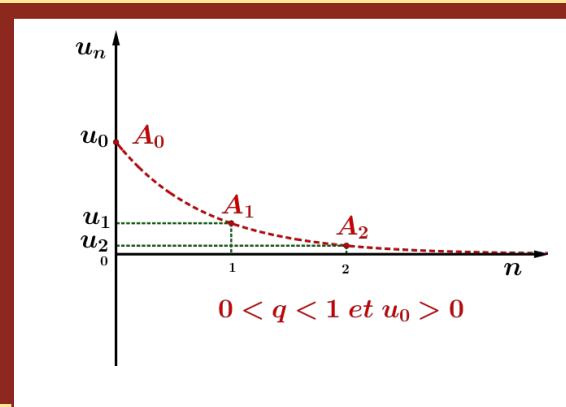
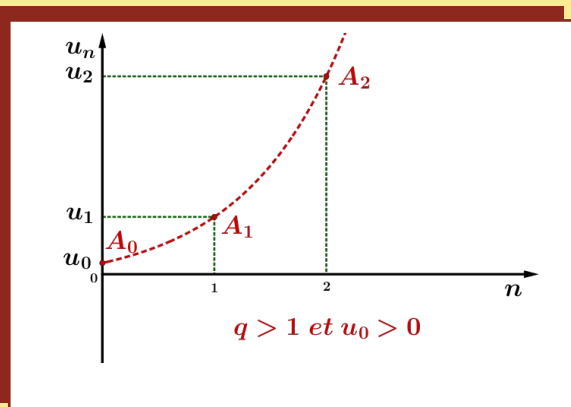
Soit (u_n) une suite géométrique de raison q et de premier terme $u_p > 0$.

- Si $q > 1$, alors la suite (u_n) est (strictement) **croissante**.
- Si $0 < q < 1$, alors la suite (u_n) est (strictement) **décroissante**.
- Si $q = 1$, alors la suite (u_n) est **constante**, égale à u_p .
- Si $q < 0$, alors la suite (u_n) **n'est pas monotone**.

Remarque

Si $u_p < 0$, ces sens de variations sont **inversés**.

La représentation graphique d'une suite géométrique (u_n) est un ensemble de points isolés $(n; u_n)$, situés sur une courbe dite **exponentielle**.



Soit n un entier naturel non nul et q un réel différent de 1. La somme des n premières puissances successives d'un nombre q est : $1 + q + q^2 + \dots + q^n = \sum_{k=0}^n q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$.

Soit (u_n) une suite géométrique de raison $q \neq 1$. La formule suivante donne la somme des termes consécutifs :

$$\text{Somme des termes consécutifs} = \text{premier terme} \times \frac{1 - q^{\text{nombre de termes}}}{1 - q}$$

En particulier, pour une suite géométrique de premier terme u_0 :

$$S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n = \sum_{k=0}^n u_k = u_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

De manière plus générale, si n et p sont deux entiers naturels tels que $n > p$, alors :

$$S_n = u_p + u_{p+1} + \dots + u_n = \sum_{k=p}^n u_k = u_p \times \frac{1 - q^{n-p+1}}{1 - q}$$

II. Suites arithmético-géométriques

Une suite (u_n) est dite **arithmético-géométrique** s'il existe deux réels a et b tels que pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = au_n + b$.

Méthode générale

Dans les exercices, pour étudier une suite (u_n) arithmético-géométrique, on utilise une suite annexe (v_n) (donnée par l'énoncé et définie en fonction de (u_n)) qui est géométrique.

De manière générale, on démontre que (v_n) est une suite géométrique (en exprimant v_{n+1} en fonction de v_n) et on donne son expression générale. On en déduit alors l'expression générale de (u_n) . Enfin on conclut sur les variations et la limite de (u_n) .

Méthode : Étude d'une suite arithmético-géométrique

M. Durand dépose 5000€ sur un compte rémunéré au taux annuel de 2,5 % et choisit d'y ajouter à la fin de chaque année la somme de 2000€. On note u_n le montant, en euros, du capital acquis au bout de n années.

- On exprime u_{n+1} en fonction de u_n :

Le coefficient multiplicateur associé à un taux d'intérêt de 2,5 % est $1 + \frac{2,5}{100} = 1,025$.

De plus, 2000€ sont ajoutés chaque début d'année.

Donc pour tout entier n , $u_{n+1} = 1,025 u_n + 2000$ et $u_0 = 5000$.

- On introduit la suite géométrique (v_n) :

Soit (v_n) la suite définie pour tout n par $v_n = u_n + 80000$. On montre que (v_n) est géométrique.

Pour tout entier n , on a $v_{n+1} = u_{n+1} + 80000$

$$\begin{aligned} &= 1,025 u_n + 2000 + 80000 \\ &= 1,025 (v_n - 80000) + 82000 \\ &= 1,025 v_n - 82000 + 82000 \\ &= 1,025 v_n \end{aligned}$$

Donc (v_n) est une suite géométrique de raison $q = 1,025$ et de premier terme

$$v_0 = u_0 + 80000 = 5000 + 80000 = 85000.$$

- On exprime v_n en fonction de n :

Pour tout entier n , on a $v_n = v_0 \times q^n = 85000 \times 1,025^n$.

- On exprime u_n en fonction de n :

Pour tout entier n , on a $u_n = v_n - 80000 = 85000 \times 1,025^n - 80000$.

- On cherche un seuil :

M. Durand souhaite s'acheter une voiture à 15000€. Il se demande combien d'années seront nécessaires pour que le montant du capital disponible dépasse 15000€. La calculatrice nous donne (programme ou table de valeurs) $n = 5$. Donc il faudra 5 ans à M. Durand pour s'offrir sa voiture.

III. Algorithme de calcul

Un algorithme est une suite finie d'instructions données dans un certain ordre permettant de résoudre un problème. Ce mot vient du nom du mathématicien perse Muhammad ibn Musa al-Khwarizmi (8^e siècle après J.C.), surnommé le père de l'algèbre.

Exemple 1

On souhaite mettre en œuvre un algorithme permettant de déterminer un seuil à partir duquel les termes de la suite sont supérieurs à un réel A donné.

Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = 3n^2 + 2$. On peut démontrer que (u_n) est croissante et que sa limite est $+\infty$. On a $u_0 = 3 \times 0^2 + 2 = 2$.

En langage de programmation, on a par exemple (sur TI) :

```
PROGRAM : SEUIL
: Prompt A
: 0 → N
: 2 → U
: While U < A
: N + 1 → N
: 3 * N^2 + 2 → U
: End
: Disp N
```

Exemple 2

Étant donné une suite géométrique de raison $q \in]0; 1[$, on souhaite mettre en œuvre un algorithme permettant de déterminer un seuil à partir duquel les termes de la suite sont inférieurs à un réel a donné.

On injecte à un patient une dose de 2 cm^3 de médicament. Chaque heure le volume du médicament dans le sang diminue de 12%. Pour tout entier n , on note u_n le volume du médicament en cm^3 .

On souhaite connaître la « demi-vie » du médicament, c'est-à-dire le moment où le médicament sera absorbé à 50%.

(u_n) est une suite géométrique de raison $q = 1 - \frac{12}{100} = 0,88$. Pour tout entier n , $u_n = 2 \times 0,88^n$.

Un algorithme se construit en trois phases : l'**initialisation**, le **traitement** et la **sortie**.

- L'initialisation consiste à affecter aux différentes variables de départ leur valeur. Ici, les deux variables sont n (l'indice de la suite qui correspond au nombre d'heures) qui débute à 0 et u (le volume de médicament dans le sang) qui débute à 2.
- Le traitement consiste à effectuer les différents calculs pour atteindre l'objectif. Ici, tant que u (le volume de médicament dans le sang) est supérieur à 1, on continue à calculer les termes de la suite.
- La sortie consiste à afficher le résultat trouvé. Ici, on affichera la valeur de n , c'est-à-dire au bout de combien d'heures le médicament sera à moitié absorbé.

En langage de programmation, on a par exemple (sur TI) :

```
PROGRAM : SEUIL
: 0 → N
: 2 → U
: While U > 1
: N + 1 → N
: 2 * 0,88^N → U
: End
: Disp N
```

```
PROGRAM : SEUIL
: 0 → N
: While 2 * 0,88^N > 1
: N + 1 → N
: End
: Disp N
```

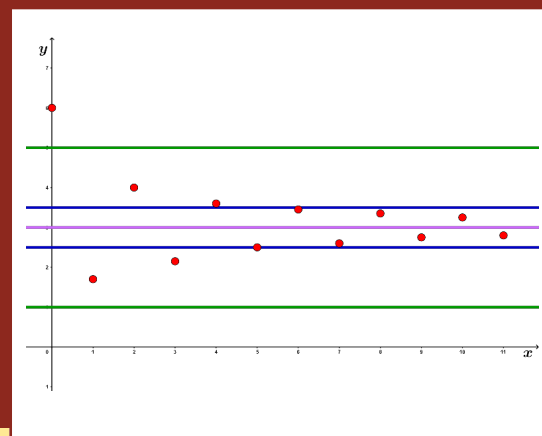
L'algorithme nous donne un seuil de 6, c'est-à-dire qu'à partir de 6 heures après l'injection du médicament, il en restera moins de la moitié dans le corps du patient.

Limites de suites

I. Limite d'une suite

Une suite (u_n) admet une **limite finie** égale à l si tout intervalle ouvert contenant l contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang. On note $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$.

On dit que (u_n) converge vers l ou tend vers l .

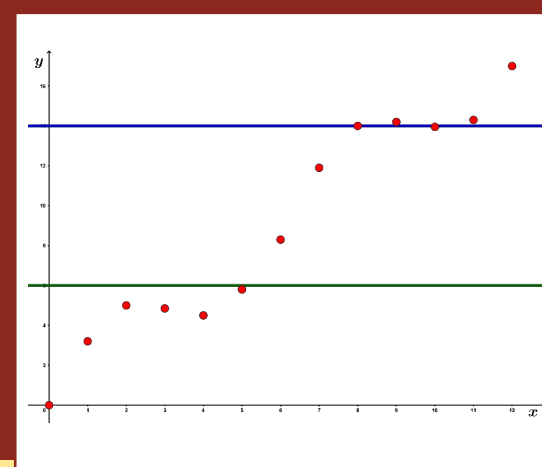


• Une suite (u_n) admet une **limite infinie** égale à $+\infty$ si pour tout nombre réel A , tous les termes de la suite sont supérieurs à A à partir d'un certain rang. On note $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

On dit que (u_n) **diverge vers $+\infty$** ou tend vers $+\infty$.

• Une suite (u_n) admet une **limite infinie** égale à $-\infty$ si pour tout nombre réel A , tous les termes de la suite sont inférieurs à A à partir d'un certain rang. On note $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$.

On dit que (u_n) **diverge vers $-\infty$** ou tend vers $-\infty$.



II. Propriétés sur les limites

Soit (u_n) une suite et l et a deux réels.

- Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n + a = l + a$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} a \times u_n = a \times l$.
- Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ et $a > 0$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n + a = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} a \times u_n = +\infty$.
- Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ et $a < 0$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n + a = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} a \times u_n = -\infty$.

Soit q un réel.

- Si $q > 1$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty$.
- Si $q = 1$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 1$.
- Si $-1 < q < 1$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$.
- Si $q \leq -1$, alors (q^n) diverge et n'admet aucune limite.

III. Limites de suites particulières

III.1 Suites arithmétiques

Soit (u_n) une suite arithmétique de premier terme u_p et de raison r .

- Si $r > 0$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.
- Si $r < 0$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$.
- Si $r = 0$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = u_p$.

III.2 Suites géométriques

Soit (u_n) une suite géométrique de premier terme $u_p > 0$ et de raison q .

- Si $q > 1$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.
- Si $q = 1$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = u_p$.
- Si $-1 < q < 1$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.
- Si $q \leq -1$, alors la suite (u_n) n'a pas de limite.

Remarques

- Si $u_p < 0$ et $q > 1$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$.
- Soit la suite (w_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $w_n = (-1)^n$.
 (w_n) est une suite géométrique de raison $q = -1 \leq -1$ donc (w_n) n'a pas de limite. En effet, cette suite est dite **alternée**. Elle alterne entre les réels -1 et 1 .

Exemple d'application

On injecte à un patient une dose de 2 cm^3 de médicament. Chaque heure le volume du médicament dans le sang diminue de 12%. Pour tout entier n , on note u_n le volume du médicament en cm^3 présent dans le corps du patient. (u_n) est une suite géométrique de raison $q = 1 - \frac{12}{100} = 0,88$. Or $0,88 < 1$, donc la dose de médicament va diminuer jusqu'à devenir nulle.

Trigonométrie

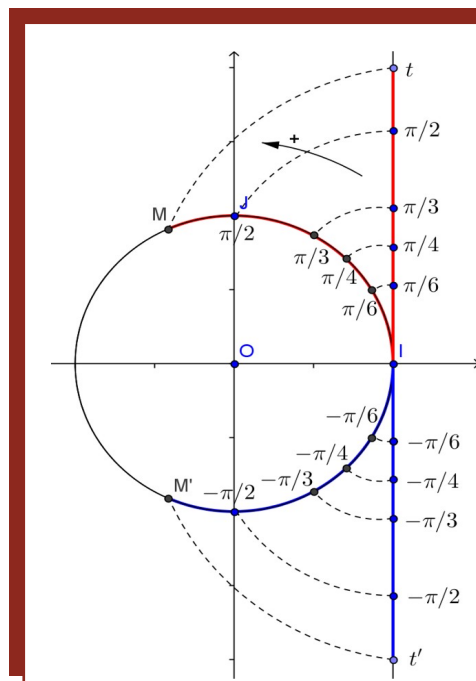
I. Cercle trigonométrique

Le **cercle trigonométrique** est un cercle de centre O et de rayon 1 sur lequel on choisit un sens de parcours, le sens direct ou indirect.

Enroulement de la droite des réels :

Soit d une droite numérique graduée dont le zéro coïncide avec le point I . Quand on enroule, sur le cercle C , la demi-droite des réels positifs dans le sens direct, et celle des réels négatifs dans le sens indirect, chaque réel t vient s'appliquer sur un point M du cercle C . On dit alors que M est l'image de t sur le cercle C .

La longueur (périmètre) du cercle trigonométrique étant 2π , deux réels t_1 et t_2 ont même point image sur C si et seulement si l'enroulement de la droite des réels entre t_1 et t_2 correspond à un nombre entier de tours de C .



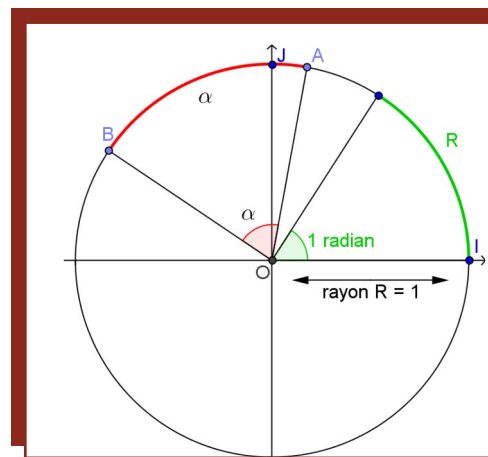
Tout point du cercle est l'image d'une infinité de réels.

Si t est l'un deux, les autres sont les réels $t + 2k\pi$, où k est un entier relatif.

II. Le radian

Le **radian** est l'unité de mesure des angles telle que la mesure en radian d'un angle est égale à la longueur de l'arc que cet angle intercepte sur un cercle de rayon R .

Les mesures en degré et en radian d'un angle sont proportionnelles : $180 \times \alpha = \pi \times d$.



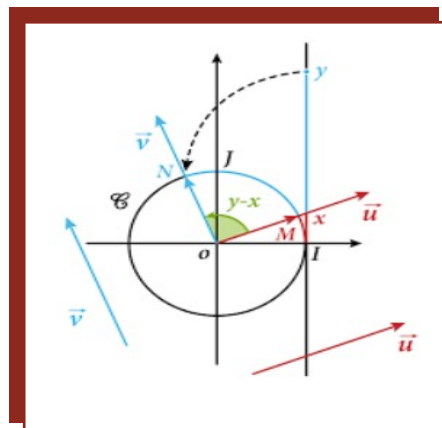
Angle d en degré	180	90	60	45	30	0
Angle α en radian	π	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	0

III. Mesure d'un angle orienté et mesure principale

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
On considère deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et on construit sur le cercle trigonométrique les points M et N tels que $\overrightarrow{OM}$ soit colinéaire et de même sens que $\vec{u}$ et $\overrightarrow{ON}$ soit colinéaire et de même sens que $\vec{v}$.

• La mesure de l'**angle orienté** $(\vec{u}, \vec{v})$ est égale à celle de l'angle orienté $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON})$.

• Pour tout réel x associé au point M et tout réel y associé au point N , $y-x$ est une mesure en radian de l'angle orienté $(\vec{u}, \vec{v})$.



• L'unique mesure en radian d'un angle orienté $(\vec{u}, \vec{v})$ appartenant à l'intervalle $]-\pi; \pi]$ est appelé la **mesure principale** de cet angle.

• La valeur absolue de la mesure principale d'un angle orienté $(\vec{u}, \vec{v})$ est égale à la mesure, en radian, de l'**angle géométrique** défini par $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Méthode : Déterminer la mesure principale d'un angle orienté

Déterminons la mesure principale de l'angle $x = \frac{273\pi}{12}$.

1^{ère} méthode : On cherche $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x = \alpha + 2k\pi$ et $-\pi < \alpha \leq \pi$.

On effectue la division euclidienne de 273 par 12. On a $273 = 12 \times 22 + 9$.

D'où $\frac{273\pi}{12} = \frac{9\pi + 22 \times 12\pi}{12} = \frac{9\pi}{12} + 22\pi = \frac{3\pi}{4} + 2 \times 11\pi = \frac{3\pi}{4} + 2\pi[11]$ (on trouve $k = 11$).

La mesure principale de l'angle $x = \frac{273\pi}{12}$ est $\frac{3\pi}{4}$.

2^e méthode : On cherche $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x = \alpha + 2k\pi$ et $-\pi < \alpha \leq \pi$.

On a alors $\alpha = x - 2k\pi = \frac{273\pi}{12} - 2k\pi$.

$$-\pi < \alpha \leq \pi \Leftrightarrow -\pi < \frac{273\pi}{12} - 2k\pi \leq \pi$$

$$\Leftrightarrow -\pi - \frac{273\pi}{12} < -2k\pi \leq \pi - \frac{273\pi}{12}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{285\pi}{12} < -2k\pi \leq -\frac{261\pi}{12}$$

$$\Leftrightarrow 10,875 \leq k < 11,875$$

Comme k est un entier relatif, on a $k = 11$.

Donc $\alpha = x - 2k\pi = \frac{273\pi}{12} - 2 \times 11\pi = \frac{273\pi}{12} - \frac{264\pi}{12} = \frac{9\pi}{12} = \frac{3\pi}{4}$.

La mesure principale de l'angle $x = \frac{273\pi}{12}$ est $\frac{3\pi}{4}$.

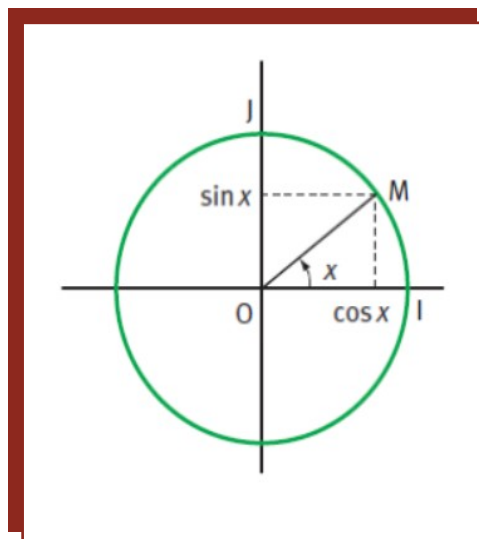
IV. Cosinus et sinus

Soit M un point image d'un réel x sur le cercle trigonométrique.

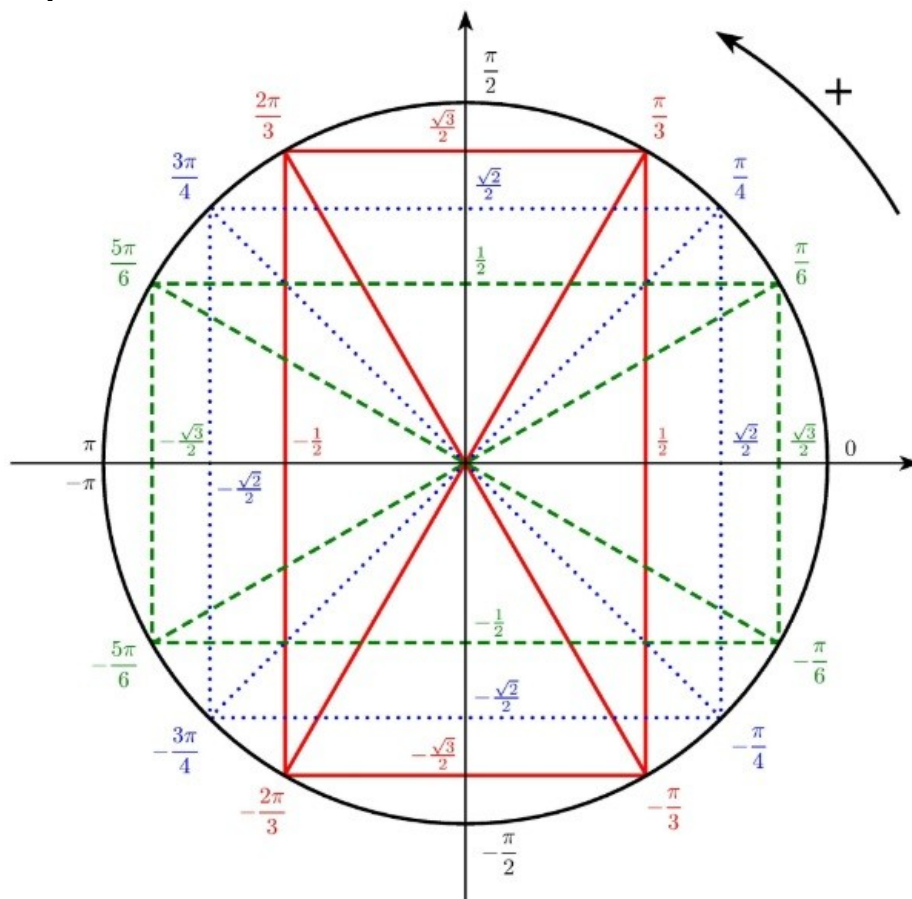
Dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$, le cosinus de x , noté $\cos x$, est l'abscisse du point M et le sinus de x , noté $\sin x$, est son ordonnée.

Soit x un réel et k un entier relatif. On a :

- $-1 \leq \cos x \leq 1$ et $-1 \leq \sin x \leq 1$
- $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$
- $\cos(x + 2k\pi) = \cos x$ et $\sin(x + 2k\pi) = \sin x$



Valeurs remarquables



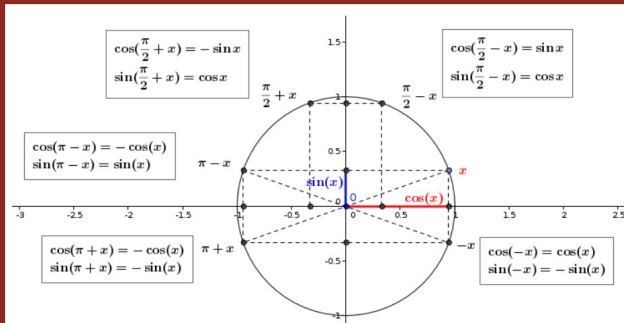
x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

V. Formules et équations

Angles associés

Pour tout réel x , on a :

- $\cos(-x) = \cos x$ et $\sin(-x) = -\sin x$
- $\cos(\pi + x) = -\cos x$ et $\sin(\pi + x) = -\sin x$
- $\cos(\pi - x) = -\cos x$ et $\sin(\pi - x) = \sin x$
- $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x$ et $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$
- $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$ et $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$



Équations trigonométriques

Soit x et a deux réels.

L'équation $\cos x = \cos a$ admet les solutions suivantes :

$$x = a + 2k\pi \text{ ou } x = -a + 2k\pi, \text{ avec } k \in \mathbb{Z}$$

L'équation $\sin x = \sin a$ admet les solutions suivantes :

$$x = a + 2k\pi \text{ ou } x = \pi - a + 2k\pi, \text{ avec } k \in \mathbb{Z}$$

VI. Fonctions cosinus et sinus

VI.1 Définitions

- La **fonction sinus** est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x \rightarrow \sin x$.
- La **fonction cosinus** est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x \rightarrow \cos x$.

VI.2 Périodicité

Les fonctions sinus et cosinus sont **périodiques** de période 2π . Elles sont dites 2π -périodiques. Pour tout réel x , $\sin(x + 2k\pi) = \sin x$ et $\cos(x + 2k\pi) = \cos x$.

VI.3 Parité

- La fonction sinus est une fonction **impaire**. Pour tout réel x , $\sin(-x) = -\sin x$. Sa courbe représentative est **symétrique par rapport à l'origine du repère**.
- La fonction cosinus est une fonction **paire**. Pour tout réel x , $\cos(-x) = \cos x$. Sa courbe représentative est **symétrique par rapport à l'axe des ordonnées**.

VI.4 Dérivées

- La fonction sinus est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sin' x = \cos x$.
- La fonction cosinus est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos' x = -\sin x$.

VI.5 Signes

Sur l'intervalle $]-\pi; \pi]$, les fonctions sinus et cosinus ont les signes suivants :

x	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π			
$\sin x$	0	−	−1	−	0	+	1	+
$\cos x$	−1	−	0	+	1	+	0	−

VI.6 Variations

Les fonctions sinus et cosinus étant périodiques de période 2π , il suffit de les étudier sur un intervalle d'amplitude 2π . On choisit l'intervalle $]-\pi; \pi]$.

• Variations de la fonction sinus

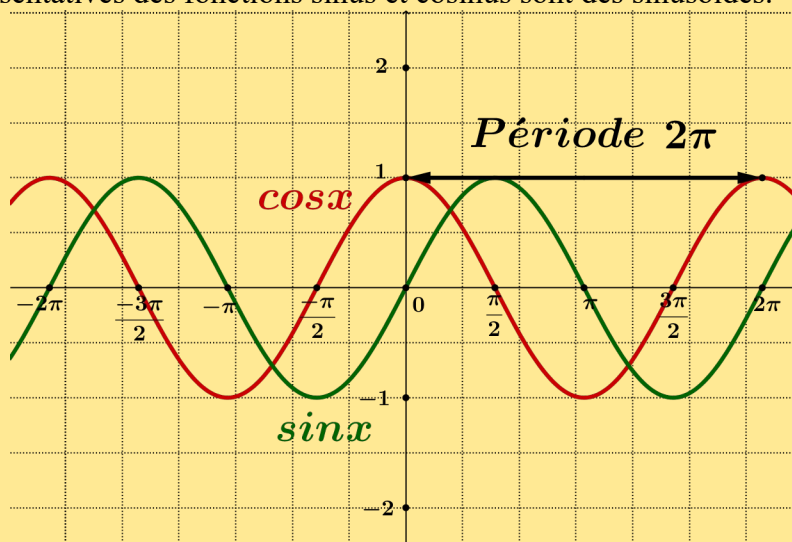
x	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	π	
$\sin' x = \cos x$	$-$	0	$+$	0	$-$
$\sin x$	0	-1	1	0	

• Variations de la fonction cosinus

x	$-\pi$	0	π
$\cos' x = -\sin x$	$+$	0	$-$
$\cos x$	-1	1	-1

VI.7 Représentations graphiques

Les courbes représentatives des fonctions sinus et cosinus sont des sinusoïdes.

VII. Fonctions composées $x \rightarrow \sin(ax+b)$ et $x \rightarrow \cos(ax+b)$

Soit a et b deux réels.

- La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin(ax+b)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = a \cos(ax+b)$.
- La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \cos(ax+b)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = -a \sin(ax+b)$.

Les fonctions $x \rightarrow \sin(ax+b)$ et $x \rightarrow \cos(ax+b)$ sont $\frac{2\pi}{a}$ périodiques.

VIII. Résolution d'inéquations trigonométriques

Méthode 1 : Résolution graphique à l'aide des courbes représentatives

Sur la courbe représentative de la fonction sinus (respectivement cosinus), on colorie les points dont l'ordonnée est strictement inférieure à k . Leurs abscisses sont les solutions de l'inéquation $\sin x < k$ (respectivement $\cos x < k$).

Méthode 2 : Résolution graphique à l'aide du cercle trigonométrique

Sur le cercle trigonométrique, on colorie les points associés à un réel dont le sinus (respectivement le cosinus) est strictement inférieur à k , c'est-à-dire qui ont une ordonnée (respectivement une abscisse) strictement inférieure à k . On repère les réels auxquels sont associés ces points.

Géométrie vectorielle dans le plan

I. Norme d'un vecteur

- Soit un vecteur $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$. La norme de $\vec{u}$ est la longueur AB . On note $\|\vec{u}\| = \|\overrightarrow{AB}\| = AB$.
- Si $\|\vec{u}\| = 1$, le vecteur $\vec{u}$ est dit **unitaire**.
- $\|\overrightarrow{AB}\| = 0 \Leftrightarrow A = B$.
- Pour tout réel k et tout vecteur $\vec{u}$, $\|k\vec{u}\| = |k| \times \|\vec{u}\|$.
- Dans un repère **orthonormé** $(O; \vec{i}, \vec{j})$, si $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, alors $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

II. Colinéarité de deux vecteurs

Deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont dits **colinéaires** s'ils ont la **même direction**, c'est-à-dire si $(AB) \parallel (CD)$.

Remarque

On dit que deux vecteurs sont colinéaires et que deux droites sont parallèles. Mais deux vecteurs ne sont jamais parallèles et deux droites ne sont jamais colinéaires !

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nul.

Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement s'il existe un réel k non nul tel que $\vec{v} = k\vec{u}$.

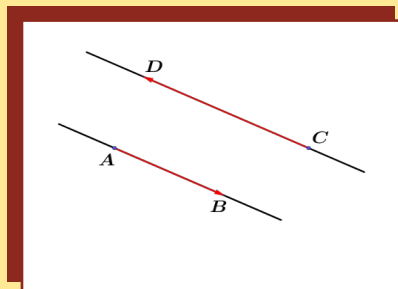
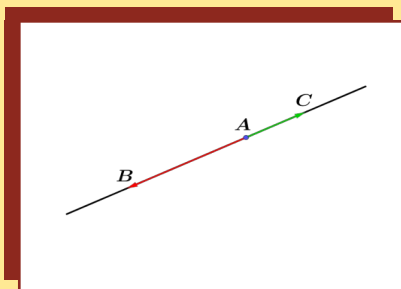
Dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$, soit les vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$.

On appelle déterminant des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ le nombre $\det(\vec{u}, \vec{v}) = xy' - x'y$.

Dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$, soit les vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$.

Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si $\det(\vec{u}, \vec{v}) = 0$.

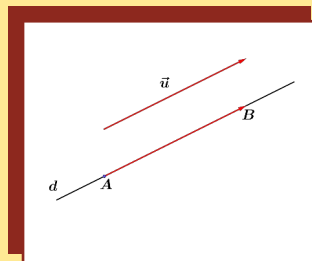
- Trois points A , B et C sont alignés si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.
- Deux droites (AB) et (CD) sont parallèles si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.



III. Caractérisation analytique d'une droite

III.1 Vecteur directeur

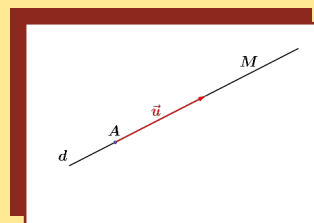
Soit d une droite du plan. Un vecteur $\vec{u}$ est un **vecteur directeur** de la droite d s'il existe deux points distincts A et B tels que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$.
Le vecteur $\vec{u}$ et la droite d ont alors même direction et on dit que $\vec{u}$ **dirige** la droite d .



Une droite d de vecteur directeur $\vec{u}$ et une droite d' de vecteur directeur $\vec{u}'$ sont parallèles si et seulement si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ sont colinéaires.

Soit $\vec{u}$ un vecteur directeur d'une droite d . Le vecteur $\vec{v}$ est un vecteur directeur de d si et seulement si $\vec{v}$ est non nul et colinéaire à $\vec{u}$.

Soit A un point du plan, $\vec{u}$ un vecteur non nul et d la droite passant par A de vecteur directeur $\vec{u}$.
Un point M appartient à la droite d si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires.



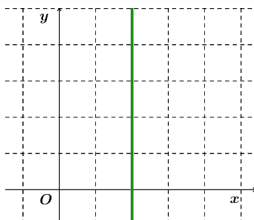
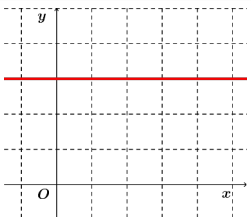
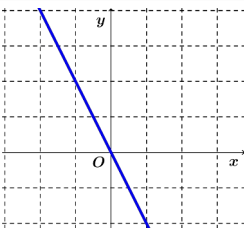
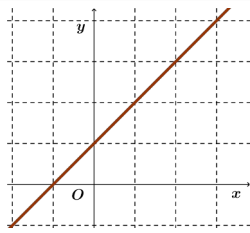
- Dans le plan muni d'un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$, le vecteur $\vec{u} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite d d'équation $x = k$, où k est un réel.
- Dans le plan muni d'un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$, le vecteur $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite d d'équation $y = mx + p$, où m et p sont des réels.

III.2 Équation cartésienne d'une droite

- Dans un repère du plan, toute droite d admet une équation de la forme $ax + by + c = 0$, où a , b et c sont des réels tels que $(a; b) \neq (0; 0)$ (c'est-à-dire $a \neq 0$ ou $b \neq 0$). Cette équation est appelée **équation cartésienne** de la droite d .
- Réciproquement, toute équation de la forme $ax + by + c = 0$ où a , b et c sont des réels tels que $(a; b) \neq (0; 0)$ est l'équation d'une droite. Cette droite a pour vecteur directeur $\vec{u} \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$.

Les droites d et d' d'équations respectives $ax + by + c = 0$ et $a'x + b'y + c' = 0$ sont parallèles si et seulement si $ab' - a'b = 0$.

III.3 Synthèse

	Cas où $b=0$ et $a \neq 0$	Cas où $a=0$ et $b \neq 0$	Cas où $c=0$, $a \neq 0$ et $b \neq 0$	Cas où $c \neq 0$, $a \neq 0$ et $b \neq 0$
Équation cartésienne	$ax + 0 + c = 0$ donc $x = -\frac{c}{a}$	$0 + by + c = 0$ donc $y = -\frac{c}{b}$	$ax + by + 0 = 0$ donc $y = -\frac{a}{b}x$	$ax + by + c = 0$ donc $y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$
Équation vue en seconde	$x = \text{constante}$	$y = \text{constante}$	$y = mx$	$y = mx + p$
Représentation graphique	 Droite parallèle à (Oy)	 Droite parallèle à (Ox)	 Droite passant par O	 Autre droite

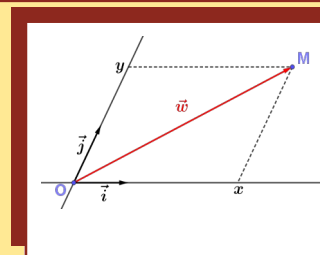
IV. Décomposition d'un vecteur

On appelle **base du plan** tout couple de deux vecteurs non colinéaires.

Remarque

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non colinéaires forment une base notée $(\vec{u}, \vec{v})$.

- Dire qu'un point M a pour coordonnées $(x; y)$ dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (ou une base $(\vec{i}, \vec{j})$) signifie que $\vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$.
- Dire qu'un vecteur $\vec{w}$ a pour coordonnées $(x; y)$ dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (ou une base $(\vec{i}, \vec{j})$) signifie que $\vec{w} = x\vec{i} + y\vec{j}$.

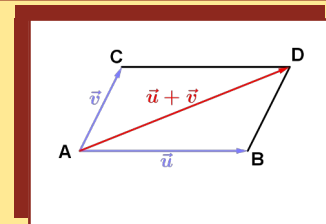


Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non colinéaires du plan.

Pour tout vecteur $\vec{w}$ du plan, il existe un unique couple de réels $(a; b)$ tels que $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$.
Le couple $(a; b)$ est appelé couple des coordonnées du vecteur $\vec{w}$ dans la base $(\vec{u}, \vec{v})$.

Soit A, B et C trois points distincts du plan.

$\vec{AB} + \vec{AC} = \vec{AD}$ si et seulement si ABDC est un **parallélogramme**.



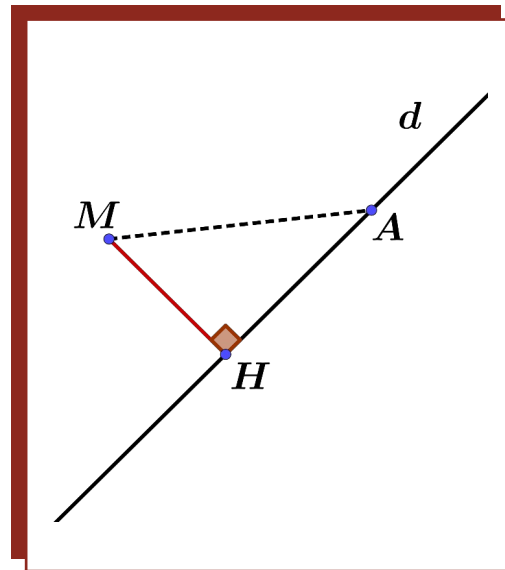
V. Projection orthogonale

Soit d une droite du plan et M un point n'appartenant pas à cette droite.
On appelle **projeté orthogonal** de M sur la droite d l'unique point H tel que $(MH) \perp d$.

Remarque

Si le point M appartient à la droite d alors il est son propre projeté orthogonal.

On appelle **distance d'un point M à une droite d** la longueur HM où H est le projeté orthogonal de M sur la droite d .



La distance d'un point M à une droite d est la plus **courte distance** entre le point M et un point de la droite.

Produit scalaire dans le plan

I. Produit scalaire

I.1 Définition

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls du plan.

On appelle **produit scalaire** de $\vec{u}$ par $\vec{v}$ le nombre réel noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$ défini par :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} (\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2)$$

I.2 Expression analytique

Soit $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ deux vecteurs dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$. Alors :

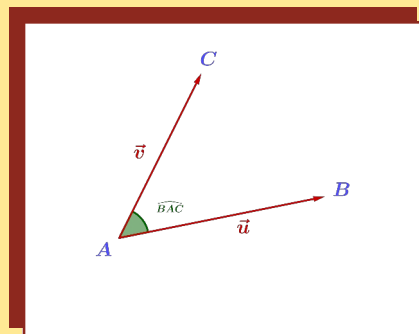
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$$

I.3 Expression du produit scalaire avec les angles

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls du plan.

On note $(\vec{u}, \vec{v})$ l'**angle géométrique** $\widehat{BAC}$

où $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$.



Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls du plan. Alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v})$.

Si on pose $\theta = (\vec{u}, \vec{v})$, alors $\cos(\theta) = \cos(\vec{u}, \vec{v})$ et $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\theta)$.

I.4 Propriétés

Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace et λ et α deux réels. Le produit scalaire est :

- Commutatif : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$.
- Distributif par rapport à l'addition : $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$.
- Distributif par rapport à la multiplication : $(\lambda \vec{u}) \cdot (\alpha \vec{v}) = \lambda \alpha (\vec{v} \cdot \vec{u})$.

Soit $\vec{u}(x; y; z)$ et $\vec{v}(x'; y'; z')$ deux vecteurs de l'espace.

- $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2$
- $\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = (\vec{u} - \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \|\vec{u}\|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2$
- $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2$

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs colinéaires non nuls de l'espace.

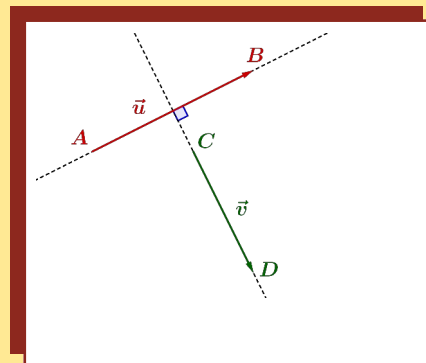
- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont de même sens, alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$.
- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont de sens contraires, alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = -\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$.

II. Produit scalaire et orthogonalité

Deux vecteurs non nuls sont dits **orthogonaux** s'ils dirigent des droites orthogonales.

En particulier, si les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{CD}$ sont orthogonaux, alors les droites (AB) et (CD) sont orthogonales. On note $\vec{u} \perp \vec{v}$.

Par convention, le vecteur nul est orthogonal à tout autre vecteur.

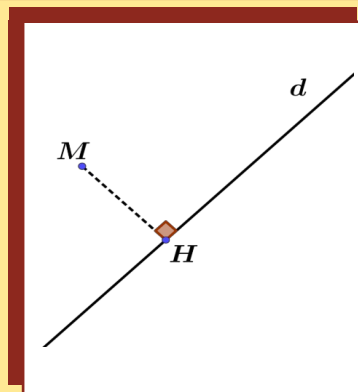


Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace. $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow xx' + yy' = 0$.

III. Projection orthogonale

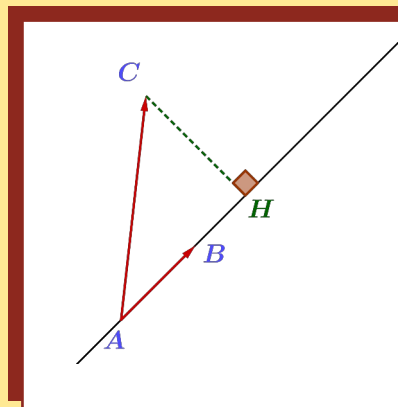
Soit d une droite du plan et M un point n'appartenant pas à cette droite.

On appelle **projeté orthogonal** de M sur la droite d l'unique point H tel que $(MH) \perp d$.



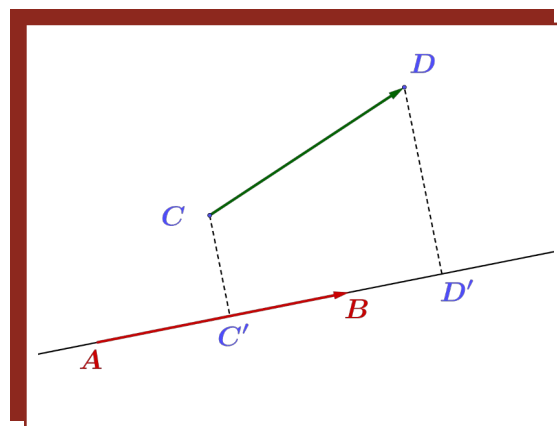
Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls tels que $\vec{u} = \vec{AB}$ et $\vec{v} = \vec{AC}$.

Le produit scalaire de $\vec{u}$ par $\vec{v}$ est $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{AB} \cdot \vec{AC} = \vec{AB} \cdot \vec{AH}$ où H est le projeté orthogonal de C sur la droite (AB) .

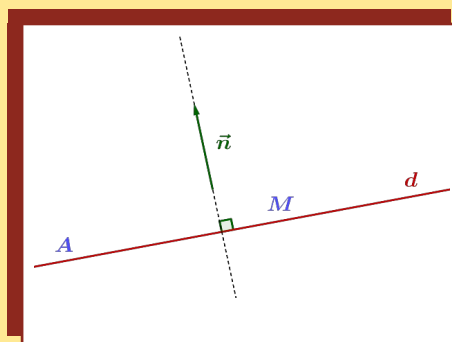


Remarques

- Le calcul d'un produit scalaire de deux vecteurs quelconques peut ainsi être ramener au calcul d'un produit scalaire de deux vecteurs colinéaires.
- Par abus de langage, on dit que $\overrightarrow{AH}$ est le projeté orthogonal de $\overrightarrow{AC}$ sur $\overrightarrow{AB}$ (en fait sur la droite (AB)).
- Soit $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ deux vecteurs non nuls. Les points C' et D' sont les projetés orthogonaux respectifs de C et D sur la droite (AB) . Alors $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{C'D'}$.

**IV. Équation cartésienne de plan****IV.1 Vecteur normal à une droite**

Soit $\vec{n}$ un vecteur non nul et A et M deux points distincts de l'espace.
Le vecteur $\vec{n}$ est dit **normal** à la droite (AM) si les vecteurs $\vec{n}$ et $\overrightarrow{AM}$ sont orthogonaux.
On note $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$.



Soit $\vec{n}$ un vecteur non nul et A un point du plan. La droite d passant par le point A et de vecteur normal $\vec{n}$ est l'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$.

Remarques

- Soit $\vec{n}$ un vecteur normal à d et $\vec{u}$ un vecteur directeur de d . Alors :
 - $\vec{n}$ est un vecteur directeur de toute droite d' perpendiculaire à d .
 - $\vec{u}$ est un vecteur normal à toute droite d' perpendiculaire à d .
- Soit d et d' deux droites ayant respectivement $\vec{n}$ et $\vec{n}'$ pour vecteurs normaux, $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ pour vecteurs directeurs. Alors $d \perp d' \Leftrightarrow \vec{n} \cdot \vec{n}' = 0 \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{u}' = 0 \Leftrightarrow \vec{n}$ et $\vec{u}$ colinéaires.

IV.2 Vecteur normal et équation cartésienne

Dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$:

- Si une droite d a une équation cartésienne de la forme $ax + by + c = 0$, avec $a \neq 0$ ou $b \neq 0$, alors $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à d .
- Réciproquement, si un vecteur $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ est normal à une droite d , alors d a une équation cartésienne de la forme $ax + by + c = 0$.

Soit d et d' deux droites d'équations cartésiennes respectives $ax + by + c = 0$ et $a'x + b'y + c' = 0$. Alors $d \perp d' \Leftrightarrow aa' + bb' = 0$.

Remarque

Soit d et d' d'équations réduites respectives $y = mx + p$ et $y = m'x + p'$.

Alors $d \perp d' \Leftrightarrow mm' = -1$. En effet, $\vec{n} \begin{pmatrix} m \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\vec{n} \begin{pmatrix} m' \\ -1 \end{pmatrix}$ sont des vecteurs normaux à d et d' .

Méthode : déterminer une équation cartésienne de droite

Dans un repère orthonormé, soit la droite d d'équation cartésienne $3x - y + 5 = 0$.

- Déterminons un vecteur directeur $\vec{u}$ et un vecteur normal $\vec{n}$ à la droite d .

On a $\vec{u} \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix} = \vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \vec{n} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$.

- Soit la droite d' passant par le point $A(1; 2)$ et perpendiculaire à la droite d . Déterminons une équation cartésienne de d' .

1^{ère} méthode :

Soit $M(x; y)$ un point de d' .

$$\begin{aligned} M(x; y) \in d' &\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \perp \vec{u} \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \vec{u} = 0 \\ &\Leftrightarrow (x-1) \times 1 + (y-2) \times 3 = 0 \\ &\Leftrightarrow x - 1 + 3y - 6 = 0 \\ &\Leftrightarrow x + 3y - 7 = 0 \end{aligned}$$

Ainsi $d' : x + 3y - 7 = 0$.

2^e méthode :

Comme d est perpendiculaire à d' , alors tout vecteur directeur de d est un vecteur normal de d' . On choisit alors $\vec{n}' \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

D'où $d' : x + 3y + c = 0$.

Or le point A appartient à d' , donc ses coordonnées vérifient l'équation de cette droite.

D'où $x_A + 3y_A + c = 0 \Leftrightarrow 1 + 3 \times 2 + c = 0 \Leftrightarrow c = -7$.

Ainsi $d' : x + 3y - 7 = 0$.

V. Distance d'un point à une droite

Soit d une droite d'équation cartésienne $ax + by + c = 0$ et $A(x_A; y_A)$ un point dans un repère orthonormal. La distance du point A à la droite d est définie par :

$$d(A; d) = \frac{|ax_A + by_A + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Remarque

On détermine en fait la distance la plus courte du point A à la droite d . Cela correspond à la distance AH où H est le projeté orthogonal de A sur d . Ainsi $d(A; d) = AH = \frac{\|\overrightarrow{AH} \cdot \vec{n}\|}{\|\vec{n}\|}$.

Applications du produit scalaire

I. Équation de cercle

I.1 Connaissant le centre et le rayon

On appelle cercle de **centre** Ω et de **rayon** $r > 0$ l'ensemble des points M du plan qui sont à la distance r du centre. On le note $C(\Omega; r)$.

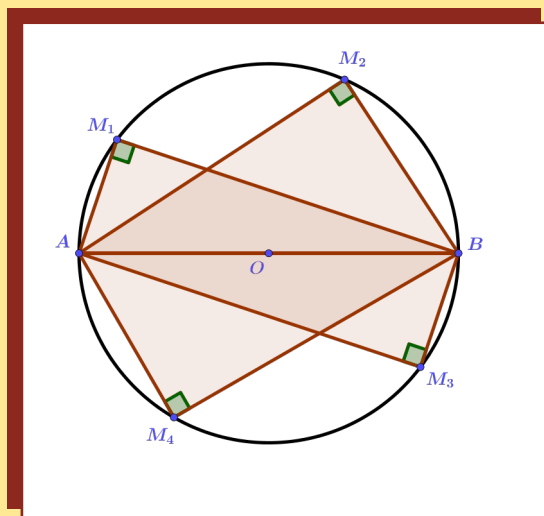
Soit a et b deux réels. Une **équation cartésienne du cercle de centre** $\Omega(a; b)$ et de **rayon** r est $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$.

Remarque

On peut également écrire $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$ avec $c = a^2 + b^2 - r^2$.

I.2 Connaissant un diamètre

Soit A et B deux points fixes. L'ensemble des points $M(x; y)$ du plan tel que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$ est le cercle de diamètre $[AB]$.



I.3 Cercle et triangle rectangle

Soit un triangle ABC . Le triangle ABC est rectangle en C si et seulement si le point C appartient au cercle de diamètre $[AB]$, avec C différent des points A et B .

I.4 Intersection d'un cercle avec une droite

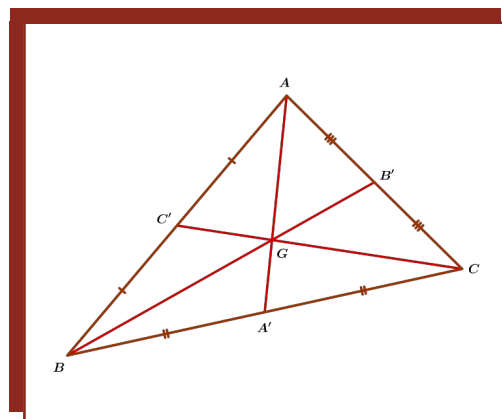
Un cercle et une droite ont 0, 1 ou 2 point(s) d'intersection.

II. Propriétés d'un triangle

II.1 Médiane et centre de gravité

Dans un triangle, la droite issue d'un sommet et qui passe par le milieu du segment opposé est appelée **médiane**.

Soit ABC un triangle. On appelle **centre de gravité** du triangle ABC l'unique point G tel que : $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}$.



Soit un triangle ABC . Alors :

- Les médianes (AA') , (BB') et (CC') sont **concurrentes**.
- leur **point d'intersection** est le **centre de gravité** noté G .
- Le centre de gravité est situé aux deux tiers d'une médiane en partant du sommet dont elle est issue. Ainsi, $\vec{AG} = \frac{2}{3} \vec{AA'}$, $\vec{BG} = \frac{2}{3} \vec{BB'}$ et $\vec{CG} = \frac{2}{3} \vec{CC'}$.

II.2 Théorème de la médiane

Soit ABC un triangle et I le milieu du segment $[BC]$. Alors :

- $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = AI^2 - \frac{BC^2}{4}$
- $AB^2 - AC^2 = 2 \vec{AI} \cdot \vec{CB}$
- $AB^2 + AC^2 = 2 AI^2 + \frac{BC^2}{2}$

II.3 Formule d'Al-Kashi

Soit un triangle ABC . D'après la **formule d'Al-Kashi**, on a :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC})$$

III. Résolution de problèmes géométriques

Un **lieu géométrique** est un ensemble de points qui satisfont une même condition.

Exemples

- L'ensemble des points M qui vérifient $MA = MB$ est la médiatrice du segment $[AB]$.
- L'ensemble des points M qui vérifient $\vec{AM} = k \vec{AB}$ est la droite (AB) ou une partie de celle-ci, suivant les valeurs de k .
- L'ensemble des points M qui vérifient $\Omega M = r$ (avec $r > 0$) est le cercle de centre Ω et de rayon r .

Optimiser une quantité, c'est trouver un point ou un lieu qui la maximise ou qui la minimise.

Probabilités conditionnelles et indépendance

I. Généralités

- Une **expérience aléatoire** est une expérience dont le résultat dépend du hasard. Chacun des résultats possibles s'appelle **éventualité** ou **issue**. L'ensemble Ω (ou E) de tous les résultats possibles d'une expérience aléatoire s'appelle l'**univers** de l'expérience.
- Un **événement** A est une partie de l'univers Ω (un événement peut donc être constitué de zéro, une ou plusieurs issues de Ω).
- Un **événement élémentaire** est une partie de Ω qui ne contient qu'une seule issue.
- L'**événement contraire** de A , noté $\bar{A}$, est la partie constituée de toutes les issues de Ω qui ne sont pas dans A .

- $P(\emptyset)=0$ et $P(\Omega)=1$.
- La probabilité d'un événement A , notée $P(A)$, est la **somme des probabilités des événements élémentaires inclus dans A** .
- Pour tout événement A , on a $0 \leq P(A) \leq 1$.
- La somme des probabilités des événements élémentaires vaut 1.
- La probabilité de l'événement contraire d'un événement A est : $P(\bar{A})=1-P(A)$.

- Si $\Omega=\{e_1; e_2; \dots; e_n\}$ et si à chaque issue e_i on associe un nombre $P(e_i)$ tel que $0 \leq P(e_i) \leq 1$ et $P(e_1)+P(e_2)+\dots+P(e_n)=1$, on dit que l'on a défini une **loi de probabilité** sur Ω .
- Lorsque tous les événements élémentaires d'une expérience aléatoire ont la même probabilité, on dit alors qu'ils sont **équiprobables**. On parle d'**expérience équiprobable** ou de **loi équirépartie**.

- L'événement « **A et B** », noté $A \cap B$, s'appelle l'**intersection** des événements A et B . Il est réalisé lorsque **les deux événements sont réalisés simultanément**.
- L'événement « **A ou B** », noté $A \cup B$, s'appelle la **réunion** des événements A et B . Il est réalisé lorsqu'**au moins l'un des deux événements est réalisé**.
- Deux événements A et B sont dits **incompatibles** si $A \cap B = \emptyset$.

Soit A un événement d'un univers Ω . Pour une loi équirépartie, on a :

$$P(A) = \frac{\text{nombre d'éléments de } A}{\text{nombre d'éléments de } \Omega} = \frac{\text{nombre de cas favorables à } A}{\text{nombre de cas possibles}}$$

Soit A et B deux événements d'un univers Ω .

- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.
- Si A et B sont **incompatibles**, $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

II. Probabilités conditionnelles

Soit A et B deux événements d'un univers Ω avec $P(A) \neq 0$.

La **probabilité conditionnelle** que l'événement B se réalise sachant que l'événement A est

réalisé est notée $P_A(B)$, et elle est définie par : $P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$.

La probabilité $P_A(B)$ vérifie bien $0 \leq P_A(B) \leq 1$ et $P_A(B) + P_A(\bar{B}) = 1$.

Soit A et B deux événements d'un univers Ω avec $P(A) \neq 0$ et $P(B) \neq 0$. Alors :

$$P(A) \times P_A(B) = P(B) \times P_B(A)$$

Utilisation de tableaux

Les tableaux à double entrées permettent une présentation claire de certaines expériences aléatoires et facilitent le calcul des probabilités conditionnelles.

	B	$\bar{B}$	Total
A	$P(A \cap B)$	$P(A \cap \bar{B})$	$P(A)$
$\bar{A}$	$P(\bar{A} \cap B)$	$P(\bar{A} \cap \bar{B})$	$P(\bar{A})$
Total	$P(B)$	$P(\bar{B})$	1

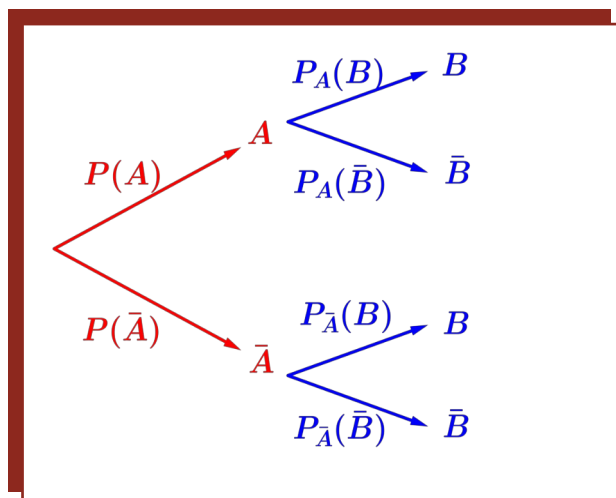
- $P(A \cap B)$ se lit à l'intersection de la ligne A et de la colonne B .
- $P(A)$ (respectivement $P(B)$) se lit sur la dernière colonne (respectivement la dernière ligne).
- $P_A(B)$ (ou $P_B(A)$) s'obtient en calculant le quotient des deux probabilités adéquates :

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \quad \text{et} \quad P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

III. Arbre pondéré et calculs de probabilité

- La probabilité de l'événement correspondant à un chemin est obtenue en multipliant les probabilités portées par ses branches.
- La somme des probabilités sur les branches partant d'un même nœud est égale à 1.
- La probabilité de l'événement correspondant à plusieurs chemins est obtenue en additionnant les probabilités de chacun de ces chemins (**formule des probabilités totales**).

Le cas le plus fréquent correspond à la partition la plus simple (A et $\bar{A}$). Si on connaît les probabilités de B et $\bar{B}$ par l'intermédiaire de A et $\bar{A}$, on a l'arbre suivant :



- Le produit des probabilités inscrites sur chaque branche d'un chemin donne la probabilité de l'intersection des événements placés sur ce chemin.

$$P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$$

- La somme des probabilités inscrites sur les branches issues d'un même nœud est égale à 1 (loi des nœuds).

$$P_A(B) + P_A(\bar{B}) = 1$$

- La probabilité d'un événement E est la somme des probabilités des chemins qui aboutissent à E .

$$\begin{aligned} P(B) &= P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B) \\ &= P(A) \times P_A(B) + P(\bar{A}) \times P_{\bar{A}}(B) \end{aligned}$$

Exemple

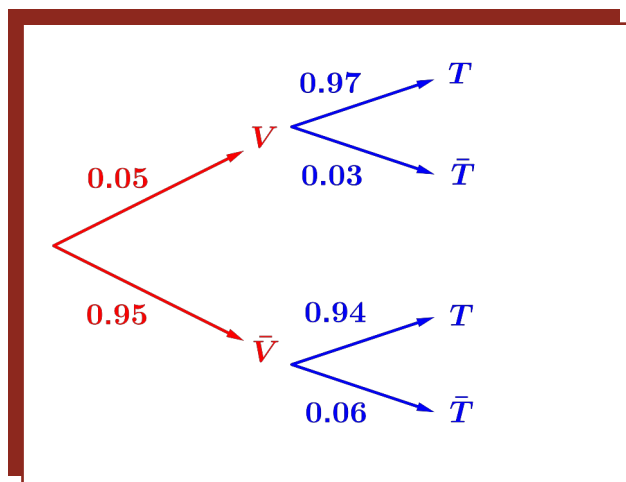
Dans un pays, il y a 5% de la population contaminée par le coronavirus. On dispose d'un test de dépistage de ce virus qui a les propriétés suivantes

- La probabilité qu'une personne contaminée ait un test positif est de 0,97 (sensibilité du test).
- La probabilité qu'une personne non contaminée ait un test négatif est de 0,94 (spécificité du test). On fait passer un test à une personne choisie au hasard dans cette population.

On note les événements suivants :

V : « la personne est contaminée par le virus »

T : « le test est positif »



- La probabilité que le test soit positif est :

$$\begin{aligned} P(T) &= P(V \cap T) + P(\bar{V} \cap T) \\ &= 0,05 \times 0,97 + 0,95 \times 0,06 \\ &= 0,09415 \end{aligned}$$

- La probabilité que la personne soit contaminée sachant que le test est positif est :

$$\begin{aligned} P_T(V) &= \frac{P(V \cap T)}{P(T)} \\ &= \frac{0,05 \times 0,97}{0,09415} \\ &= 0,051514 \end{aligned}$$

IV. Formule des probabilités totales

Soit n (où $n \geq 2$) événements de probabilités non nulles $A_1, A_2, \dots, A_n$ des sous-ensembles d'un univers Ω . Ces événements forment une **partition de l'univers Ω** (ou un **système complet d'événements**) si :

- Ils sont **disjoints** (ou **incompatibles**) deux à deux, c'est-à-dire que $A_i \cap A_j = \emptyset$ si $i \neq j$;
- $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = \Omega$.

Soit $A_1, A_2, \dots, A_n$ des événements formant une partition de Ω .

Pour tout événement B de Ω , on a :

$$P(B) = P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + \dots + P(A_n \cap B)$$

Ou, de manière équivalente :

$$P(B) = P(A_1) \times P_{A_1}(B) + P(A_2) \times P_{A_2}(B) + \dots + P(A_n) \times P_{A_n}(B)$$

On appelle cette égalité la **formule des probabilités totales**.

V. Indépendance

• Soit A et B deux événements d'un univers Ω .

On dit que A et B sont **indépendants** lorsque $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

• Soit A et B deux événements d'un univers Ω tels que $P(A) \neq 0$.

Les événements A et B sont **indépendants** si et seulement si $P_A(B) = P(B)$.

Soit A et B deux événements d'un univers Ω .

Si A et B sont indépendants, alors il en est de même pour :

• $\bar{A}$ et B

• A et $\bar{B}$

• $\bar{A}$ et $\bar{B}$

En réalisant successivement deux expériences aléatoires telles que les événements associés à la première soit indépendants des événements associés à la seconde, on dit que l'on réalise une **succession de deux épreuves indépendantes**.

• Deux expériences sont dites **indépendantes** si le résultat de l'une n'influe pas sur le résultat de l'autre.

• Deux expériences sont dites **identiques** si elles ont les mêmes issues et les mêmes probabilités pour chaque issue.

VI. Épreuve, loi et schéma de Bernoulli

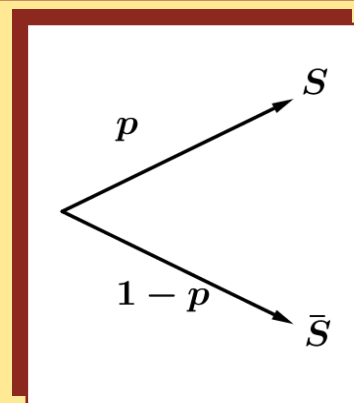
Une **épreuve de Bernoulli** de paramètre p

(compris entre 0 et 1) est une expérience

aléatoire comportant deux issues :

• l'une appelée **succès**, noté S , de probabilité p .

• l'autre appelée **échec**, noté $\bar{S}$ ou E , de probabilité $q = 1 - p$.



Soit n un entier naturel et p un réel compris entre 0 et 1.

Un **schéma de Bernoulli** de paramètres n et p est une expérience aléatoire consistant à répéter n fois, de façon **identique et indépendante**, une épreuve de Bernoulli de paramètre p .

Variables aléatoires

I. Variables aléatoires

I.1 Variable aléatoire discrète

Soit une expérience aléatoire dont l'univers est l'ensemble Ω .

Une **variable aléatoire** est une fonction définie sur Ω et à valeurs dans $\mathbb{R}$. On la note X .

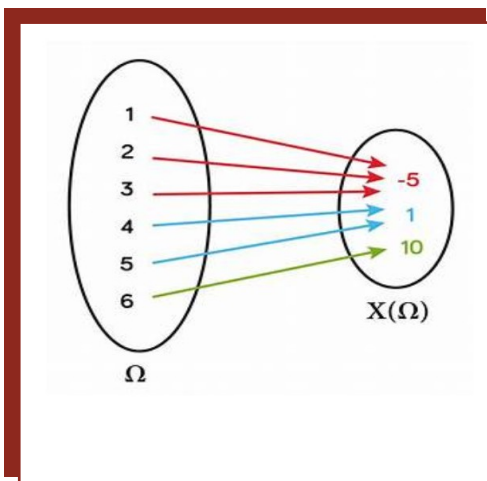
Exemple

On lance un dé équilibré à six faces et on observe le résultat affiché sur la face supérieure.

- « Si le résultat obtenu est 1, 2 ou 3, je perds 5 jetons »
- « Si le résultat obtenu est 4 ou 5, je gagne 1 jeton »
- « Sinon, je gagne 10 jetons »

On peut définir une variable aléatoire X qui décrit les gains de ce jeu. On a donc $X(1)=-5$, $X(2)=-5$, $X(3)=-5$, $X(4)=1$, $X(5)=1$, $X(6)=10$.

On peut représenter la situation par le schéma ci-contre.



I.2 Loi de probabilité d'une variable aléatoire discrète

Soit X une variable aléatoire définie sur l'univers Ω . L'ensemble des valeurs prises par X est $\{x_1; x_2; \dots; x_k\}$, où les valeurs sont rangées par ordre croissant. Le nombre x_i est associé à une ou plusieurs issues de Ω , avec $1 \leq i \leq k$.

- L'événement « $X=x_i$ » est l'ensemble des issues de Ω auxquelles on a associé la valeur x_i .
- L'événement « $X \geq x_i$ » est l'ensemble des issues de Ω auxquelles on a associé une valeur supérieure ou égale à x_i . On définit de même « $X > x_i$ », « $X < x_i$ », et « $X \leq x_i$ ».
- La probabilité de l'événement « $X=x_i$ » est la probabilité de l'événement formé de toutes les issues associées au nombre x_i . On la note $P(X=x_i)$ ou p_i .
- La probabilité de l'événement « $X \geq x_i$ » est la probabilité de l'événement formé de toutes les issues associées au nombre supérieurs ou égaux à x_i . On la note $P(X \geq x_i)$.

Une variable aléatoire X est définie sur l'univers Ω d'une expérience aléatoire.

Notons $\{x_1; x_2; \dots; x_k\}$ l'ensemble des valeurs prises par X .

La loi de probabilité de X est la fonction qui à chaque valeur x_i lui associe sa probabilité notée $P(X=x_i)$. On la représente sous forme d'un tableau de valeurs :

x_i	x_1	x_2	...	x_n
$P(X=x_i)$	$P(X=x_1)$	$P(X=x_2)$	...	$P(X=x_n)$

On a $p_1 + p_2 + \dots + p_n = \sum_{i=1}^k p_i = 1$ ou $P(X=x_1) + P(X=x_2) + \dots + P(X=x_n) = \sum_{i=1}^n P(X=x_i) = 1$.

II. Espérance, variance et écart-type

- L'**espérance** mathématique de la variable aléatoire X est le réel noté $E(X)$ défini par :

$$E(X) = \sum_{i=1}^n p_i x_i = p_1 x_1 + p_2 x_2 + \dots + p_n x_n$$

L'espérance représente la valeur moyenne que prend X si on répète un grand nombre de fois l'expérience aléatoire.

- La **variance** de la variable aléatoire X est le réel positif noté $V(X)$ défini par :

$$V(X) = \sum_{i=1}^n p_i (x_i - E(X))^2 = p_1 (x_1 - E(X))^2 + p_2 (x_2 - E(X))^2 + \dots + p_n (x_n - E(X))^2$$

- L'**écart-type** de la variable aléatoire X est définie comme la racine carrée de la variance :

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

Remarques

- La loi des grands nombres nous permet d'interpréter l'espérance et l'écart-type de la loi de probabilité de X . Elle nous dit en effet qu'en répétant un grand nombre de fois l'expérience, les fréquences observées se rapprochent de la probabilité théorique. En conséquence, la moyenne des résultats obtenus se rapproche de l'espérance de la loi de probabilité de X . L'espérance est donc la moyenne que l'on peut espérer en répétant l'expérience un grand nombre de fois.
 De même pour l'écart-type, qui est un paramètre de dispersion pour une série statistique, il peut être interprété comme un paramètre de dispersion « espérée » pour la loi de probabilité de X .
 Pour le jeu proposé en exemple, l'espérance de $-0,5$ signifie que l'on peut « espérer » ou « craindre » perdre en moyenne $0,5$ jeton par partie (ou perdre 1 jeton toutes les 2 parties).
 Mais avec une moyenne égale à $-0,5$, l'écart-type d'environ $5,41$ exprime le fait que le risque d'obtenir un gain négatif (une perte) est important.
- Si X représente le gain d'un jeu d'argent, si on a $E(X)=0$ alors on dit que le jeu est équitable.

Formule de König-Huygens

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \sum_{i=1}^n p_i x_i^2 - [E(X)]^2 = p_1 x_1^2 + p_2 x_2^2 + \dots + p_n x_n^2 - [E(X)]^2$$

Soit a et b deux réels quelconques. La variable aléatoire Y , dont la loi de probabilité est donnée par le tableau suivant, est notée $aX + b$.

Valeur de Y	$ax_1 + b$	$ax_2 + b$	...	$ax_n + b$
Probabilité	p_1	p_2	...	p_n

On pose $Y = aX + b$.

Soit X une variable aléatoire et a et b deux nombres réels. Alors :

- $E(aX + b) = aE(X) + b$
- $V(aX) = a^2 V(X)$
- $\sigma(aX + b) = |a| \sigma(X)$