Sommaire

Calculs algébriques

I. Fractions

• Dans un calcul littéral, l'écriture $\frac{a}{b}$ n'a de sens que si $b \neq 0$.

• Le signe « moins » dans un quotient : $-\frac{a}{b} = \frac{-a}{b} = \frac{a}{-b}$.

• Égalité :

- $\frac{ac}{bc} = \frac{a}{b}$
- $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ équivaut à $ad = bc$
- $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$

• Addition, soustraction avec dénominateur commun : $\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}$ et $\frac{a}{b} - \frac{c}{b} = \frac{a-c}{b}$.

• Addition, soustraction avec dénominateur différent : $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} + \frac{cb}{bd} = \frac{ad+cb}{bd}$.

II. Puissances

• $a^0 = 1$ • $a^m \times a^n = a^{m+n}$ • si $a \neq 0$, $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ • $(a^m)^n = a^{m \times n}$

• si $a \neq 0$, $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ • $a^n \times b^n = (ab)^n$ • si $b \neq 0$, $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$

III. Écriture scientifique

L'écriture scientifique d'un nombre décimal a est $b \times 10^n$ où b est un nombre décimal compris entre 1 et 10 (10 exclu) et n un entier relatif.

IV. Carré

• Deux nombres réels opposés ont le même carré : Pour tout nombre a, on a $(-a)^2 = a^2$.

• Pour tous nombres réels a et b, on a $a^2 b^2 = (ab)^2$ et si $b \neq 0$, $\frac{a^2}{b^2} = \left(\frac{a}{b}\right)^2$.

V. Racine carrée

Soit a un nombre réel positif. La racine carrée de a est l'unique nombre réel positif dont le carré est égal à a. Pour tout $a \geqslant 0$, $(\sqrt{a})^2 = a$.

Un carré parfait est le carré d'un nombre entier.

Soit a un nombre réel. Alors :
- Si $a \geqslant 0$, alors $\sqrt{a^2}=a$.
- Si $a \leqslant 0$, alors $\sqrt{a^2}=-a$.

Soit a et b deux nombres réels positifs. On a alors :
- $\sqrt{ab}=\sqrt{a}\sqrt{b}$.
- Si $b \neq 0$, $\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$.

Remarque
Par convention, on ne laisse jamais de radical, c'est-à-dire de racine carrée au dénominateur. Pour « supprimer » ce radical, il suffit de multiplier le numérateur et le dénominateur par ce même radical.

VI. Développement et factorisation

Développer un produit de facteurs, c'est l'écrire sous la forme d'une somme.
Pour tous nombres a, b, c, d et k, on a :
- $k(a+b)=ka+kb$
- $k(a-b)=ka-kb$
- $(a+b)(c-d)=ac-ad+bc-bd$

VII. Identités remarquables

Pour tous nombres réels a et b, on a :
- $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$
- $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$
- $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$

VIII. Équations, inégalités et inéquations

- Une équation (respectivement une inéquation) est une égalité (respectivement une inégalité) dans laquelle est **présente une inconnue (ou des inconnues)**.
- Un nombre est **solution d'une équation** (respectivement **d'une inéquation**) si, en substituant ce nombre à l'inconnue, on obtient **une égalité** (respectivement **une inégalité**) **vraie**.

- Résoudre une équation (respectivement une inéquation), c'est déterminer **toutes les solutions de l'équation** (respectivement de l'**inéquation**).
- Deux équations (respectivement deux inéquations) sont **équivalentes si elles ont les mêmes solutions**.

• **La multiplication et la division** des deux membres d'une inégalité **par un même nombre strictement négatif change l'ordre de comparaison**.
• Les autres opérations ne modifient pas l'ordre.

Modéliser un problème par une inéquation, c'est **écrire une inéquation en lien avec les contraintes exposées par le problème**.

IX. Quelques résolutions d'équations

Équation produit nul
Un produit est nul si et seulement si au moins l'un de ses facteurs est nul :
$$\mathrm{A}\times\mathrm{B}=0 \Leftrightarrow \mathrm{A}=0 \text{ ou } \mathrm{B}=0$$

Équation quotient nul
Un quotient est nul si et seulement si son numérateur est nul et son dénominateur non nul :
$$\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}}=0 \Leftrightarrow \mathrm{A}=0 \text{ et } \mathrm{B}\neq 0$$

Équation carrée
Soit a un nombre réel. On considère l'équation $x^2=a$ dans $\mathbb{R}$. Alors :
• Si $a<0$, l'équation n'admet aucune solution.
• Si $a=0$, l'équation admet $x=0$ comme unique solution.
• Si $a>0$, l'équation admet deux solutions $x=\sqrt{a}$ et $x=-\sqrt{a}$.

Équation racine carrée
Soit a un nombre réel. On considère l'équation $\sqrt{x}=a$ dans $\mathbb{R}$. Alors :
• Si $a<0$, l'équation n'admet aucune solution.
• Si $a\geqslant 0$, l'équation admet une unique solution $x=a^2$.

Équation inverse
Soit a un nombre réel. On considère l'équation $\frac{1}{x}=a$ dans $\mathbb{R}$. Alors :
• Si $a=0$, l'équation n'admet aucune solution.
• Si $a\neq 0$, l'équation admet une unique solution $x=\frac{1}{a}$.

Méthodes : résolution d'équation et d'inéquation

• 1er exemple : $x+3=-x+7$

On regroupe tous les x à gauche de l'inégalité. On doit donc ajouter x de chaque côté.

$$x+3+x=-x+7+x$$

On obtient alors : $2x+3=7$.

On regroupe tous les autres nombres (sans x) à droite. On doit donc soustraire 3 de chaque côté.

$$2x+3-3=7-3$$

On obtient alors : $2x=4$.

On isole l'inconnue x . On doit donc diviser par 2 .

$$\frac{2x}{2}=\frac{4}{2}$$

On obtient alors : $x=2$. L'ensemble solution est alors $S=\{2\}$.

En version condensée : $x+3=-x+7 \Leftrightarrow x+3+x-3=-x+7+x-3 \Leftrightarrow 2x=4 \Leftrightarrow x=2$.

• 2e exemple : $\frac{x}{3}+2=3$

On regroupe tous les autres nombres (sans x) à droite. On doit donc soustraire 2 de chaque côté.

$$\frac{x}{3}+2-2=3-2$$

On obtient alors : $\frac{x}{3}=1$.

On isole l'inconnue x . On doit donc multiplier par 3.

$$\frac{x}{3}\times 3=1\times 3$$

On obtient alors : $x=3$. L'ensemble solution est alors $S=\{3\}$.

En version condensée : $\frac{x}{3}+2=3 \Leftrightarrow \frac{x}{3}+2-2=3-2 \Leftrightarrow \frac{x}{3}=1 \Leftrightarrow \frac{x}{3}\times 3=1\times 3 \Leftrightarrow x=3$.

• 3e exemple : $4x+2\leqslant 7x+6$

On regroupe tous les x à gauche de l'inégalité. On doit donc soustraire $7x$ de chaque côté.

$$4x+2-7x\leqslant 7x+6-7x$$

On obtient alors : $-3x+2\leqslant 6$.

On regroupe tous les autres nombres (sans x) à droite. On doit donc soustraire 2 de chaque côté.

$$-3x+2-2\leqslant 6-2$$

On obtient alors : $-3x\leqslant 4$.

On isole l'inconnue x . On doit donc diviser par -3 . Comme -3 est négatif, on change l'ordre de comparaison.

$$-\frac{3x}{-3}\geqslant \frac{4}{-3}$$

On obtient alors $x\geqslant -\frac{4}{3}$. L'ensemble des solutions est alors $S=\left[-\frac{4}{3};+\infty\right[$.

En version condensée : $4x+2\leqslant 7x+6 \Leftrightarrow 4x+2-7x-2\leqslant 7x+6-7x-2 \Leftrightarrow -3x\leqslant 4 \Leftrightarrow x\geqslant -\frac{4}{3}$.

Généralités sur les fonctions

I. Définitions

• Définir une fonction f sur l'ensemble D consiste à associer, à chaque réel x de D, un unique nombre réel y.
• D s'appelle l'**ensemble de définition** de la fonction f.
• y s'appelle l'**image** de x par la fonction f et se note $f(x)$.
• x est un **antécédent** de y par la fonction f.

II. Différentes façons de définir une fonction

Soit f une fonction, D son ensemble de définition et $x \in D$.
L'**expression algébrique** de la fonction f donne directement $f(x)$ en fonction de la variable x.

Soit f une fonction, D son ensemble de définition et $x \in D$.
Un **tableau de valeurs** de la fonction f donne, sur la première ligne (ou colonne), différentes valeurs de la variable x et, en vis-à-vis sur la deuxième ligne (ou colonne), les images $f(x)$ qui leur sont associées.

Antécédent $\boldsymbol{x}$						
Image $\boldsymbol{f(x)}$						

La **courbe représentative** de la fonction f dans un repère est l'ensemble des points de coordonnées $(x; f(x))$ (ou $(x; y)$) où x parcourt le domaine de définition D de la fonction f.
Elle est souvent notée C_f.
L'**équation de cette courbe représentative** est $y=f(x)$.

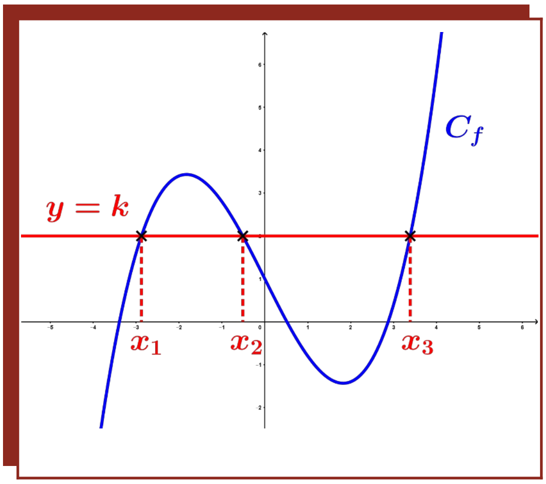
Un point M de coordonnées $(x; f(x))$ appartient à la courbe représentative C_f d'une fonction si et seulement si x appartient à D et $y=f(x)$.

Méthode algébrique
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=3x-5$.
• Déterminer une image
L'image de 7 par la fonction f est $f(7)=3\times 7-5=21-5=16$.
• Déterminer un antécédent
L'antécédent de 4 par la fonction f est tel que $f(x)=4$.
On a $f(x)=4 \Leftrightarrow 3x-5=4 \Leftrightarrow 3x=9 \Leftrightarrow x=3$. Ainsi l'antécédent de 4 par la fonction f est 3.
• Déterminer si un point appartient à une courbe
Le point $A(1;-2)$ appartient à la courbe C_f représentative de f si et seulement si $f(1)=-2$.
On a $f(1)=3\times 1-5=3-5=-2$. Ainsi $A \in C_f$.

III. Résolution graphique d'équation et d'inéquation

III.1 Résolution d'équation du type $f(x)=k$

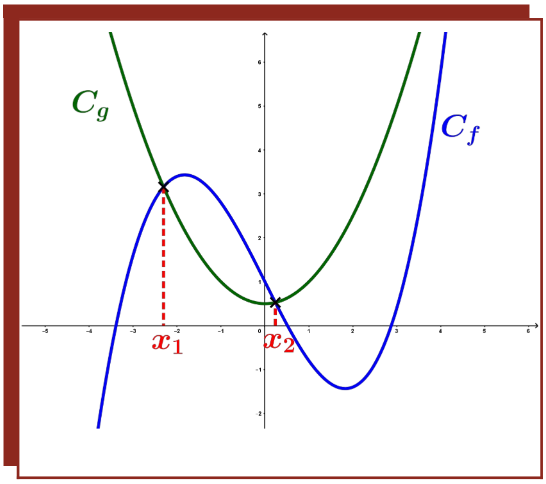
Soit f une fonction définie sur un ensemble D et k un réel fixé.
Résoudre l'équation $f(x)=k$ consiste à trouver **tous les réels x de D qui ont pour image k par la fonction f**. Ceci revient à déterminer l'**ensemble des antécédents de k par f**.



Graphiquement, les solutions de $f(x)=k$ sont les **abscisses de tous les points de C_f ayant pour ordonnées k**. On détermine en fait l'ensemble des abscisses des points d'intersection de la courbe C_f avec la droite d'équation $y=k$.

III.2 Résolution d'équation du type $f(x)=g(x)$

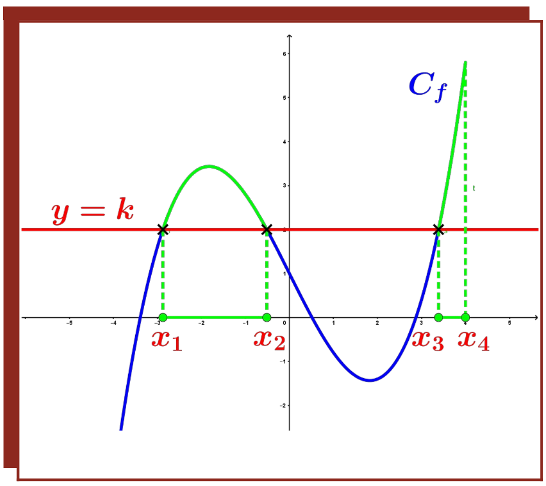
Soit f et g deux fonctions définies sur un ensemble D.
Résoudre $f(x)=g(x)$ consiste à déterminer **tous les réels x de D qui ont la même image par f et g**.



Graphiquement, les solutions de $f(x)=g(x)$ sont les **abscisses des points d'intersection des courbes représentatives de f et g**.

III.3 Résolution d'inéquation

Soit f une fonction définie sur un ensemble D et k un réel fixé.
Résoudre l'équation $f(x)\geqslant k$ consiste à trouver **tous les réels x de D qui ont une image supérieure ou égale à k par la fonction f**.



Graphiquement, les solutions de $f(x)\geqslant k$ sont les **abscisses de tous les points de C_f ayant une ordonnée supérieure ou égale à k**. On détermine en fait l'ensemble des abscisses des points de la courbe C_f situés au dessus de la droite d'équation $y=k$.

IV. Variations d'une fonction

IV.1 Sens de variation

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.
• Dire que f est **croissante** sur I (respectivement **strictement croissante** sur I) signifie que, pour tous réels a et b de I, si $a < b$, alors $f(a) \leqslant f(b)$ (respectivement si $a < b$, alors $f(a) < f(b)$).
• Dire que f est **décroissante** sur I (respectivement **strictement décroissante** sur I) signifie que, pour tous réels a et b de I, si $a < b$, alors $f(a) \geqslant f(b)$ (respectivement si $a < b$, alors $f(a) > f(b)$).
• Dire que f est **constante** sur I signifie que, pour tous réels a et b de I, $f(a) = f(b)$.
• Dire que f est **monotone** sur I signifie que f est croissante sur I ou décroissante sur I.

IV.2 Tableau de variations

Pour représenter les variations d'une fonction f, on utilise un tableau avec des flèches représentant la monotonie sur des intervalles les plus grands possibles.
Il fait apparaître les intervalles sur lesquels la fonction est **croissante par une flèche montante** et ceux sur lesquels la fonction est **décroissante par une flèche descendante**. De plus, si on les connaît, on écrit les **images au bout des flèches**.
L'ensemble forme le **tableau de variations** de la fonction f.

IV.3 Extremum d'une fonction

Soit une fonction f définie sur un intervalle I et a un réel de I.
• On dit que le réel M est le **maximum** de f sur I, **atteint** en a, si $f(a) = \mathrm{M}$ et si pour tout réel x de I, on a $f(x) \leqslant \mathrm{M}$.
• On dit que le réel m est le **minimum** de f sur I, **atteint** en a, si $f(a) = m$ et si pour tout réel x de I, on a $f(x) \geqslant m$.
• Un **extremum** de f sur I est **un maximum ou un minimum** de f sur I.
• On dit que le réel L est un **maximum** (respectivement **minimum**) **local** de f sur I s'il existe un intervalle ouvert J contenu dans I, tel que L est le **maximum** (respectivement **minimum**) de f sur J.

V. Étude du signe d'une fonction

Étudier le signe d'une fonction ou d'une expression $f(x)$ revient à déterminer les valeurs de x pour lesquelles $f(x)$ est positif, nul ou négatif. Le signe est souvent présenté sous la forme d'un **tableau de signes**.

VI. Quelques fonctions de référence

Une **fonction de référence** est une fonction simple qui permet l'étude d'une famille plus large de fonctions.

VI.1 Fonctions affines

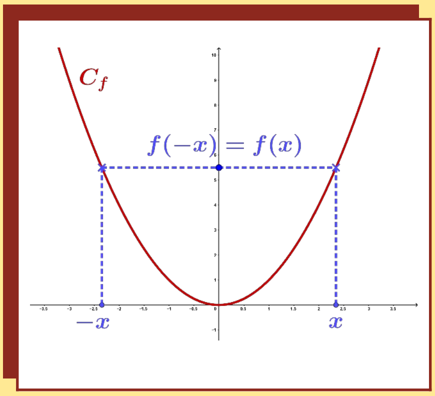
Une **fonction affine** est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=ax+b$, où a et b sont deux nombres réels.
La représentation graphique d'une fonction affine f est une droite. Le réel a s'appelle **coefficient directeur** de la droite et b l'**ordonnée à l'origine**.

Soit f une fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=ax+b$.
• Si $a>0$, alors la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. La droite représentative de f est tournée "vers le haut".
• Si $a<0$, alors la fonction f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$. La droite représentative de f est tournée "vers le bas".
• Si $a=0$, alors la fonction f est constante sur $\mathbb{R}$. La droite représentative de f est parallèle à l'axe des abscisses.

Soit f une fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=ax+b$. On a alors, quels que soient les nombres réels x_1 et x_2 distincts l'un de l'autre : $a=\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$.

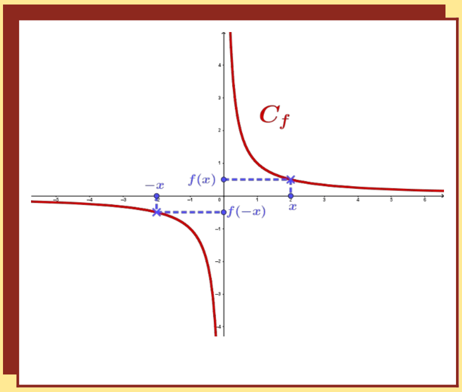
VI.2 Fonction carrée

• La **fonction carrée** est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^2$.
• Elle est strictement décroissante sur l'intervalle $]-\infty;0]$ et strictement croissante sur l'intervalle $[0;+\infty[$.
• Sa courbe représentative est **symétrique par rapport à l'axe des ordonnées**. Elle est appelée **parabole**.



VI.3 Fonction inverse

• La **fonction inverse** est la fonction définie sur $]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{1}{x}$.
• Elle est strictement décroissante sur $]-\infty;0[$ et strictement décroissante sur $]0;+\infty[$.
• Sa courbe représentative est **symétrique par rapport au centre du repère**. Elle est appelée **hyperbole**.
• La fonction inverse admet une **valeur interdite en 0**.



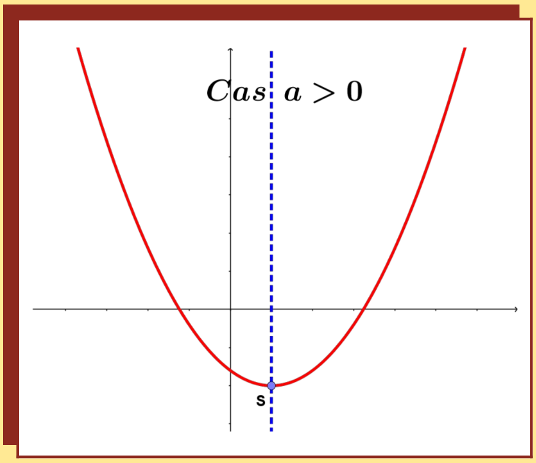
Étude des fonctions polynomiales du second degré

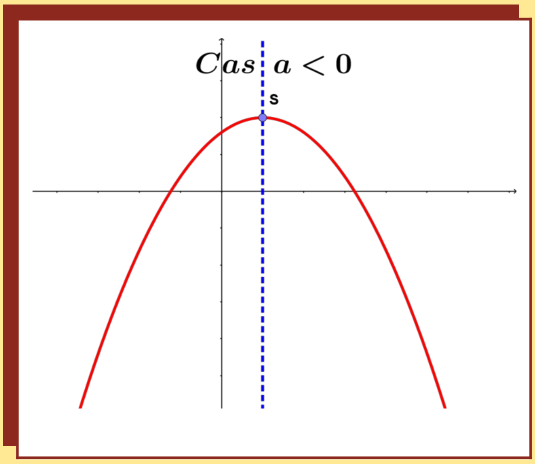
I. Fonctions polynômes du second degré

I.1 Définitions

On appelle **fonction polynôme du second degré** (ou **trinôme**) toute fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=ax^2+bx+c$ où a, b et c sont des nombres réels et $a\neq 0$.
Cette expression est appelée **forme développée** de f.

Soit f la fonction polynôme du second degré définie par $f(x)=ax^2+bx+c$ avec $a\neq 0$.
On dit que la courbe représentative de cette fonction est une **parabole**.
Une parabole a une forme de « U » (« tournée vers le haut ») lorsque a est positif.
A l'inverse, si a est négatif, la parabole a une forme de « pont » (« tournée vers le bas »).
Dans les deux cas, la parabole possède comme **axe de symétrie** la droite d'équation $x=-\dfrac{b}{2a}$.
On appelle généralement **S le sommet** d'une parabole.
S a pour coordonnées $(\alpha;\beta)$ où $\alpha=-\dfrac{b}{2a}$ et $\beta=f(\alpha)$.





Méthode : Démontrer qu'une fonction polynôme de degré 2 admet un extremum
Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=2x^2-12x+23$.
a. Démontrer que pour tout x réel, $f(x)=2(x-3)^2+5$.
b. En déduire que f admet un minimum dont on précisera la valeur.

a. En développant la 2ᵉ expression, on obtient :
$(2(x-3))^2+5=2(x^2-6x+9)+5=2x^2-12x+18+5=2x^2-12x+23=f(x)$.
b. On regarde le signe de a : $a=2>0$.
La parabole est « tournée vers le haut », donc f admet un minimum.
Or la deuxième expression correspond à la forme canonique, d'où on peut lire la valeur du minimum qui est 5, atteint pour $x=3$.

I.2 Sens de variations

Soit f une fonction polynomiale du second degré définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=ax^2+bx+c$.
• Si $a>0$, f est strictement décroissante sur $]-\infty;\alpha]$ et strictement croissante sur $[\alpha;+\infty[$.
Elle admet comme minimum β en $x=\alpha$.
• Si $a<0$, f est strictement croissante sur $]-\infty;\alpha]$ et strictement décroissante sur $[\alpha;+\infty[$.
Elle admet comme maximum β en $x=\alpha$.

Cas a>0

x	$-\infty$	$\alpha=\frac{-b}{2a}$	$+\infty$
f(x)	↘	$\beta=f(\alpha)$	↗

Cas a<0

x	$-\infty$	$\alpha=\frac{-b}{2a}$	$+\infty$
f(x)	↗	$\beta=f(\alpha)$	↘

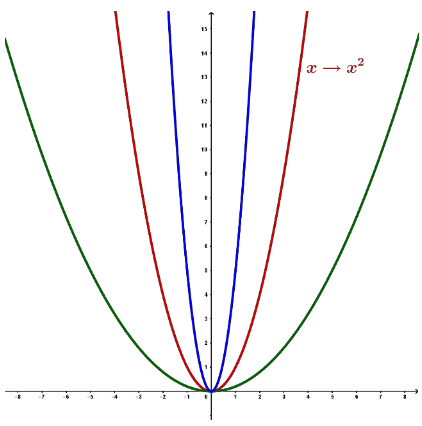
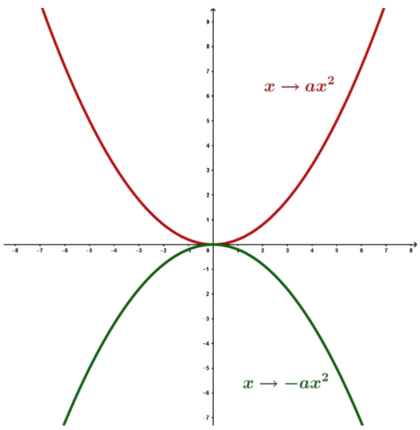
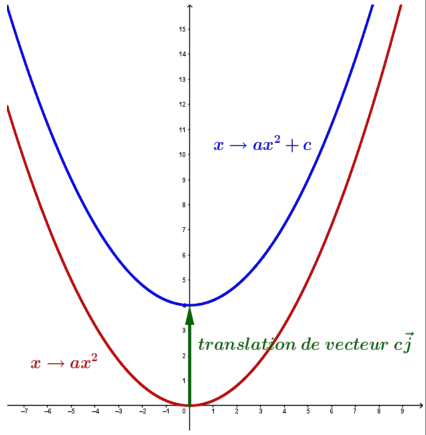
La courbe représentative de f dans un repère orthonormé admet pour axe de symétrie la droite d'équation $x=\alpha$ et pour sommet le point de coordonnées $(\alpha;\beta)$.

Méthode : Établir les variations d'une fonction du second degré
Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=-x^2+4x$.
a. Calculer les coordonnées du sommet de la parabole représentant la fonction f.
b. La fonction f admet-elle un maximum ou un minimum. Justifier.
c. Construire le tableau de variations de f, puis tracer sa courbe représentative dans un repère.

a. On calcule les coordonnées du sommet S :
On a $\alpha=-\frac{b}{2a}=-\frac{4}{2\times(-1)}=-\frac{4}{-2}=2$ et $\beta=f(\alpha)=f(2)=-2^2+4\times2=-4+8=4$.
Donc $S(2;4)$.
b. On regarde le signe de a : $a=-1<0$.
La parabole est « tournée vers le bas », donc f admet un maximum. Ce maximum est 4.
c. Tableau de variations :

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f(x)$	↗	4	↘

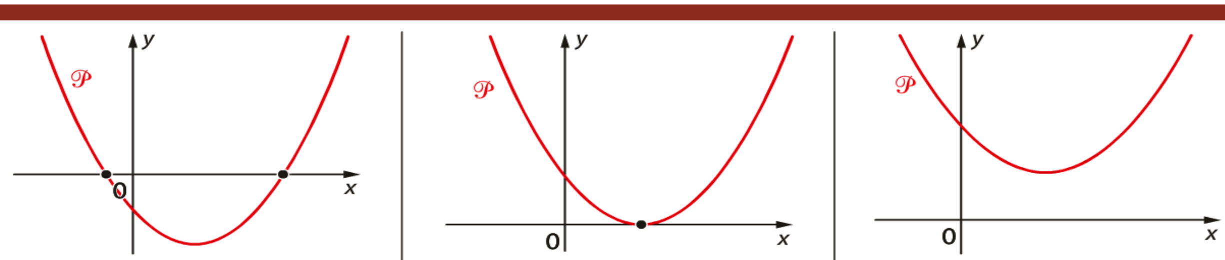
I.3 Fonctions particulières $x \rightarrow ax^2$ et $x \rightarrow ax^2 + c$

<table>
<tr><th>Influence du coefficient a ($a > 0$)</th><th>Passage de $a > 0$ à $a < 0$</th><th>Influence du coefficient c</th></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>L'axe de symétrie des différentes courbes est la droite d'équation $x = 0$
Cas : $a > 1$
Plus a est grand et plus la courbe « se contracte »
Cas : $0 < a < 1$
Plus a est proche de zéro et plus la courbe « s'écarte »</td><td>La courbe représentative de la fonction $x \rightarrow -ax^2$ est symétrique à celle de la fonction $x \rightarrow ax^2$ par rapport à l'axe des abscisses</td><td>La courbe représentative de la fonction $x \rightarrow ax^2 + c$ s'obtient en effectuant une translation de vecteur $c\vec{j}$ à partir de la courbe représentative de la fonction $x \rightarrow ax^2$</td></tr>
</table>

II. Équation du second degré

II.1 Approche graphique

Résoudre l'équation $ax^2 + bx + c = 0$, où $a \neq 0$, c'est trouver, s'il en existe, tous les nombres x qui vérifient cette égalité. De tels nombres sont appelés **solutions de l'équation** ou **racines** du trinôme.
Pour trouver le nombre de solutions de cette équation, on peut s'aider de la représentation graphique de la fonction f définie par $f(x) = ax^2 + bx + c$.
Dans les trois exemples ci-dessous, on peut conjecturer que l'équation admet respectivement deux solutions, une solution et aucune solution.



$\mathscr{P}$ coupe deux fois l'axe des abscisses. | $\mathscr{P}$ coupe une fois l'axe des abscisses. | $\mathscr{P}$ ne coupe pas l'axe des abscisses.

II.2 Vocabulaire

Une **équation du second degré**, d'inconnue x, est une équation qui peut s'écrire sous la forme $ax^2+bx+c=0$ où a, b et c sont des nombres réels, avec $a \neq 0$.
Une solution de cette équation est appelée **racine** du trinôme ax^2+bx+c.

III. Fonctions polynômes du second degré admettant deux racines

III.1 Forme factorisée

Soit f une fonction du second degré de la forme $f(x)=ax^2+bx+c$, avec $a \neq 0$. On a la factorisation suivante :
- Si f admet **deux racines x_1 et x_2**, alors on a pour tout réel x, $f(x)=a(x-x_1)(x-x_2)$.
- Si f admet **une racine double x_0**, alors on a pour tout réel x, $f(x)=a(x-x_0)^2$.

Remarque
Si $x_1=x_2$, alors on dit que f admet une racine double que l'on note x_0.

La représentation graphique des fonctions de la forme $x \rightarrow a(x-x_1)(x-x_2)$ est une parabole d'axe de symétrie la droite d'équation $x=\dfrac{x_1+x_2}{2}$.

L'abscisse du sommet de la parabole est alors $\alpha=\dfrac{x_1+x_2}{2}$.

III.2 Signe d'une fonction polynôme du second degré

Soit la fonction polynomiale $f(x)=ax^2+bx+c$, avec $a \neq 0$.
- Si f admet deux racines x_1 et x_2, alors $f(x)$ s'annule pour $x=x_1$ et $x=x_2$ (on suppose que $x_1<x_2$) et alors :
  - le signe de $f(x)$ est **du signe de a** pour x extérieur à l'intervalle des racines ;
  - le signe de $f(x)$ est **du signe contraire de celui de a** si x est compris entre les racines.

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$f(x)$		signe de a	0	signe de $-a$	0	signe de a	

- Si f admet une racine double, alors $f(x)$ s'annule pour $x=x_0$: **son signe est celui de a** pour tous les réels $x \neq x_0$.

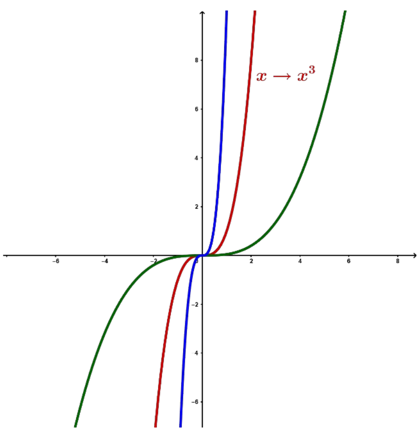
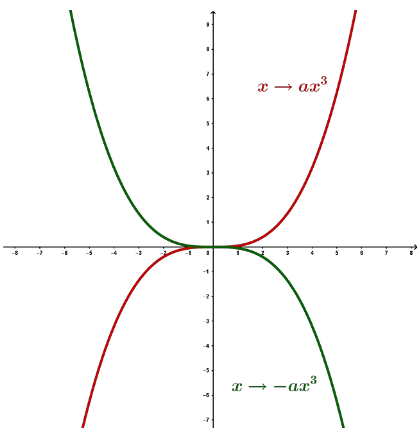
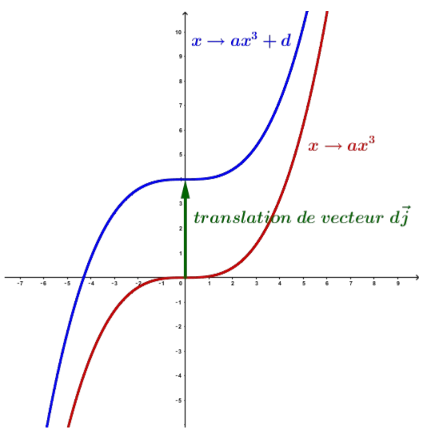
x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
$f(x)$		signe de a	0	signe de a	

Étude des fonctions polynomiales du troisième degré

I. Fonctions polynômes du troisième degré

On appelle **fonction polynôme du troisième degré** toute fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ où a, b, c et d sont des nombres réels et $a\neq 0$.
Cette expression est appelée **forme développée** de f.

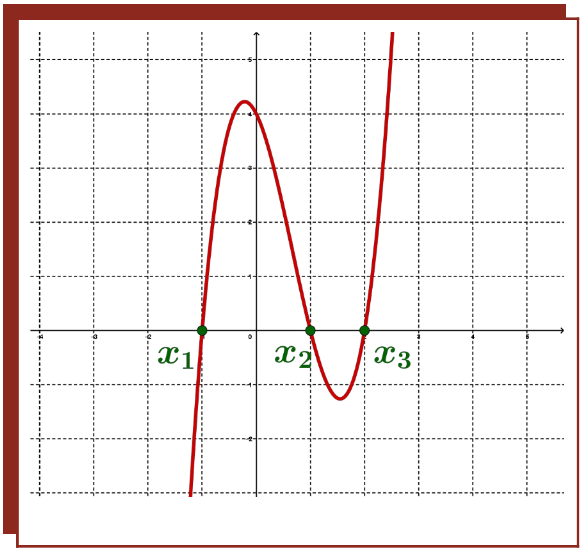
II. Fonctions particulières $x \to ax^3$ et $x \to ax^3+d$

Influence du coefficient a ($a>0$)	**Passage de $a>0$ à $a<0$**	**Influence du coefficient d**
		
Les courbes représentatives des fonctions $x \to ax^3$ sont symétriques par rapport à l'origine du repère Cas : $a>1$ Plus a est grand et plus la courbe « se contracte » Cas : $0<a<1$ Plus a est proche de zéro et plus la courbe « s'écarte »	La courbe représentative de la fonction $x \to -ax^3$ est symétrique à celle de la fonction $x \to ax^3$ par rapport à l'origine du repère	La courbe représentative de la fonction $x \to ax^3+d$ s'obtient en effectuant une translation de vecteur $d\vec{j}$ à partir de la courbe représentative de la fonction $x \to ax^3$

III. Forme factorisée

Soit f une fonction du troisième degré de la forme $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$, avec $a\neq 0$.
Si f admet trois racines x_1, x_2 et x_3, alors f est factorisable et on a :
Pour tout réel x, $f(x)=a(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$.

Lien avec la courbe représentative



Les racines de f se lisent directement sur le graphique. Il s'agit des abscisses des points d'intersection de la courbe représentative de la fonction f et de l'axe des abscisses.

IV. Signe d'une fonction polynôme de degré 3

Le signe de $f(x)=a(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$ s'obtient à l'aide d'un tableau de signes, après avoir étudié le signe de $a(x-x_1)(x-x_2)$ et $x-x_3$.

V. Équation du type $x^3=c$

Soit c un réel positif. L'équation $x^3=c$ possède une unique solution qui est $x=c^{\frac{1}{3}}$, que l'on note aussi $\sqrt[3]{c}$.

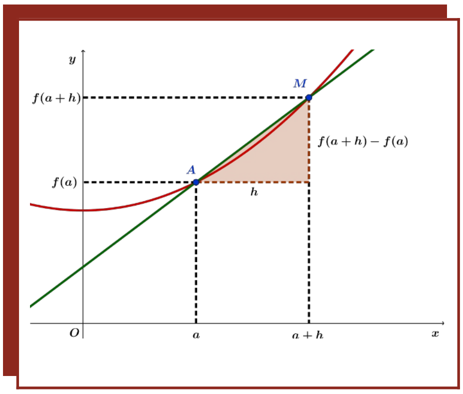
Dérivation

I. Nombre dérivé

I.1 Taux d'accroissement

Soit f une fonction définie sur un intervalle contenant les réels a et b. Le **taux de variation** de la fonction f entre a et b est le réel défini par le quotient $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Le **taux d'accroissement** de f entre a et $a+h$ est $\tau(h)=\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$.



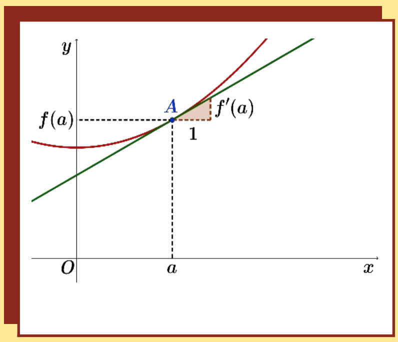
Remarques

• $\tau(0)$ n'existe pas, mais on va s'intéresser aux valeurs de t lorsque h se rapproche de plus en plus de 0.
• Le taux d'accroissement de f entre a et $a+h$ est le **coefficient directeur** de la droite (AM) avec $A(a;f(a))$ et $M(a+h;f(a+h))$.
On appelle cette droite une sécante à la courbe.

I.2 Nombre dérivé

Si, lorsque h se rapproche le plus possible de 0, $\tau(h)$ semble valoir une valeur réelle, on dit que f est dérivable en a. Cette valeur réelle est appelée **nombre dérivé** de f en a, et est notée $f'(a)$. On écrit alors : $f'(a)=\lim\limits_{h\to 0}\tau(h)$, soit $f'(a)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$.

On constate que, lorsque h tend vers 0, les sécantes en A tendent vers une droite particulière, nommée **tangente** à C_f en A : aux alentours du point $A(a, f(a))$, elle est semblable à la courbe.



Lorsque f est dérivable en a, on appelle **tangente** à la courbe C_f au point d'abscisse a la droite T passant par $A(a;f(a))$ dont **le coefficient directeur est le nombre dérivé** $\boldsymbol{f'(a)}$.

Soit f une fonction dérivable en a. L'**équation** de la tangente T à la courbe C_f au point d'abscisse a est : $T: y=f'(a)(x-a)+f(a)$.

II. Fonction dérivée

Soit une fonction f définie sur un intervalle I.
On dit que f est dérivable sur I si elle est dérivable en tout point x de I.
On appelle fonction dérivée de f et on note f' la fonction qui à chaque x associe $f'(x)$.

Remarque
Toutes les fonctions usuelles vues en première sont dérivables sur leur domaine de définition.

III. Dérivées des fonctions usuelles

Fonction	$\mathbf{D}_f$	Fonction dérivée	$\mathbf{D}_{f'}$
$f(x)=k$, $k\in\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x)=0$	$\mathbb{R}$
$f(x)=mx+p$	$\mathbb{R}$	$f'(x)=m$	$\mathbb{R}$
$f(x)=x$	$\mathbb{R}$	$f'(x)=1$	$\mathbb{R}$
$f(x)=x^2$	$\mathbb{R}$	$f'(x)=2x$	$\mathbb{R}$
$f(x)=x^3$	$\mathbb{R}$	$f'(x)=3x^2$	$\mathbb{R}$

IV. Opérations sur les fonctions dérivées

Soit f une **fonction polynomiale** de la forme $f(x)=a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1 x+a_0$ définie sur $\mathbb{R}$ avec $n\in\mathbb{N}$ et $a_n\neq 0$.
La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x)=na_n x^{n-1}+(n-1)a_{n-1}x^{n-2}+\ldots+a_1$.

Fonction	Fonction dérivée
$u+v$	$u'+v'$
$u-v$	$u'-v'$
ku , $k\in\mathbb{R}$	ku'

V. Sens de variation d'une fonction

V.1 Du sens de variation d'une fonction au signe de la dérivée

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I .
• Si f est **croissante** sur I , alors pour tout réel x de I , $\boldsymbol{f'(x)\geqslant 0}$.
• Si f est **décroissante** sur I , alors pour tout réel x de I , $\boldsymbol{f'(x)\leqslant 0}$.
• Si f est **constante** sur I , alors pour tout réel x de I , $\boldsymbol{f'(x)=0}$.

Remarque
Dans de nombreux cas il sera nécessaire de dériver pour étudier les variations d'une fonction, car l'étude du signe de la dérivée sera plus simple que l'étude des variations de la fonction initiale.

V.2 Du signe de la dérivée au sens de variation de la fonction

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I .
• Si pour tout réel x de I , $\boldsymbol{f'(x)\geqslant 0}$, alors la fonction f est **croissante** sur I .
• Si pour tout réel x de I , $\boldsymbol{f'(x)\leqslant 0}$, alors la fonction f est **décroissante** sur I .
• Si pour tout réel x de I , $\boldsymbol{f'(x)=0}$, alors la fonction f est **constante** sur I .
• Si f' est **strictement positive** (respectivement **strictement négative**) sur I , sauf éventuellement pour un nombre fini de valeurs de x où f' s'annule, alors f est **strictement croissante** (respectivement **strictement décroissante**) sur I .

Remarques
Une flèche dans le tableau de variation d'une fonction f indiquera :
• la stricte croissance ou décroissance de f sur l'intervalle correspondant.
• la continuité (ou absence de rupture) de la courbe C_f sur cet intervalle.

VI. Extremum d'une fonction

Soit une fonction f définie sur un intervalle I et a un réel de I .
• On dit que le réel M est le **maximum** de f sur I , **atteint** en a , si $f(a)=M$ et si pour tout réel x de I , on a $f(x)\leqslant M$.
• On dit que le réel m est le **minimum** de f sur I , **atteint** en a , si $f(a)=m$ et si pour tout réel x de I , on a $f(x)\geqslant m$.
• Un **extremum** de f sur I est un **maximum** ou un **minimum** de f sur I .
• On dit que le réel L est un **maximum** (respectivement **minimum**) **local** de f sur I s'il existe un intervalle ouvert J contenu dans I , tel que L est le maximum (respectivement minimum) de f sur J .

Remarques
• Les pluriels de "minimum", "maximum" et "extremum" sont "minima", "maxima" et "extrema".
• Graphiquement, il s'agit pour le maximum du plus haut "sommet" de la courbe, et pour le minimum du plus bas "sommet" de la courbe.

Suites numériques

I. Généralités sur les suites

Une suite numérique est une **succession infinie de réels**. Une suite numérique est donc une fonction définie sur l'ensemble des **entiers naturels** $\mathbb{N}$.

Une suite numérique (u_n) définie à partir du rang p est une fonction qui à chaque entier $n \geqslant p$ associe un réel, noté u_n. Cette suite est aussi notée $(u_n)_{n \geqslant p}$ ou simplement u.
u_n est appelé le **terme général** de la suite ou le **terme d'indice** $\boldsymbol{n}$.
u_p est le **terme initial** ou le **premier terme** de la suite.

Attention !
• u_{n+1} est le terme d'indice $n+1$. C'est le terme qui suit le terme d'indice n, c'est-à-dire u_n. On ne doit pas le confondre avec u_n+1 qui est la somme de u_n, le terme d'indice n, et de 1.
• u_{n-1} est le terme d'indice $n-1$. Il précède le terme u_n.

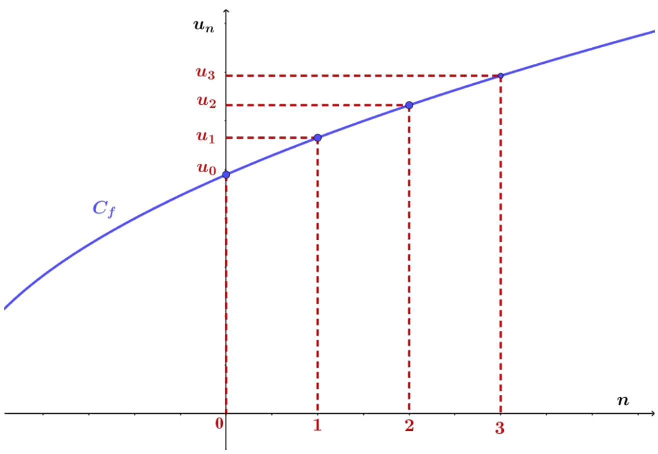
Une suite numérique (u_n) peut être représentée par un **nuage de points** de coordonnées $(n\,;u_n)$.

II. Mode de génération d'une suite numérique

II.1 Suite définie par une formule explicite

Soit a un nombre réel et f une fonction définie sur l'intervalle $[a\,;+\infty[$.
On peut définir une suite (u_n) en posant pour tout entier $n \geqslant a$, $u_n = f(n)$.
Une suite (u_n) est définie de **façon explicite** quand le terme u_n est exprimé en fonction de n.
Avec cette définition, on peut donc calculer n'importe quel terme de la suite à partir de son indice.

Représentation graphique
Graphiquement, les termes de la suite (u_n) sont les ordonnées des points $\mathrm{A}_n(n\,;u_n)$ d'abscisses entières de la courbe C_f.



II.2 Suite définie par une formule de récurrence

Soit f une fonction définie sur un ensemble I . On suppose que si $x \in I$, alors $f(x) \in I$.
Soit a un nombre réel de I et p un entier.
On peut alors définir une suite (u_n) en posant $u_p = a$ et pour tout entier $n \geqslant p$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

III. Sens de variations

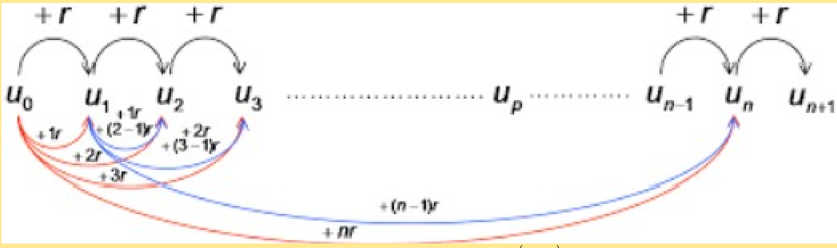
- Une suite (u_n) est **croissante** à partir du rang p si pour tout $n \geqslant p$, $u_{n+1} \geqslant u_n$.
- Une suite (u_n) est **décroissante** à partir du rang p si pour tout $n \geqslant p$, $u_{n+1} \leqslant u_n$.
- Une suite (u_n) est **monotone** si elle est soit croissante, soit décroissante à partir du rang p .
- Une suite (u_n) est **stationnaire** à partir du rang p si pour tout n , $u_{n+1} = u_n$.
- Une suite (u_n) est **constante** lorsque pour tout n , $u_{n+1} = u_n$.

Méthode : étude du signe de la différence
Soit (u_n) une suite.
- Si à partir du rang p , pour tout entier $n \geqslant p$, $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$, alors (u_n) est une suite croissante.
- Si à partir du rang p , pour tout entier $n \geqslant p$, $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$, alors (u_n) est une suite décroissante.

Suites arithmétiques et géométriques

I. Suites arithmétiques

On dit qu'une suite (u_n) est **arithmétique** si, à partir de son premier terme, **chaque terme est obtenu en ajoutant au précédent un même nombre**.
Ainsi, il existe un réel r tel que pour tout entier n, $u_{n+1}=u_n+r$.

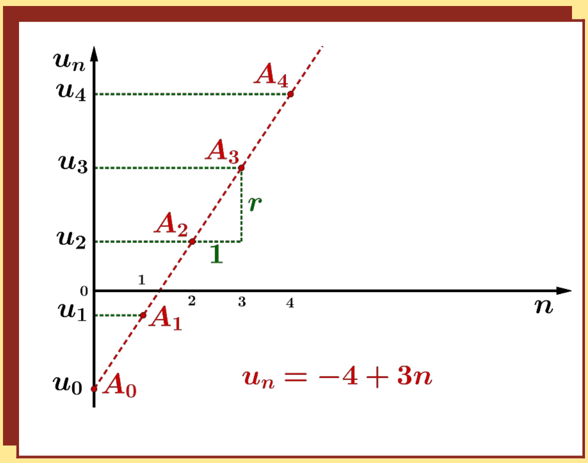


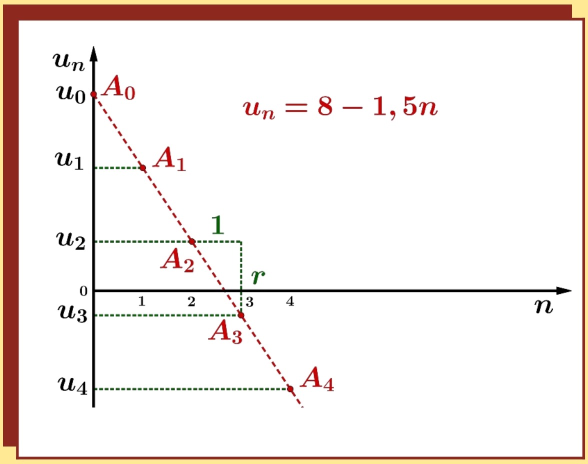
Le nombre r est appelé **raison** de la suite arithmétique (u_n). Il est égal à la différence entre deux termes consécutifs quelconques : pour tout entier n, $r=u_{n+1}-u_n$.

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r.
Pour tous entiers n et p tels que $n \geqslant p$, on a $u_n=u_p+(n-p)r$.
En particulier, pour tout entier n, $u_n=u_0+nr$.

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_p.
- Si $r>0$, alors la suite (u_n) est (strictement) **croissante**.
- Si $r<0$, alors la suite (u_n) est (strictement) **décroissante**.
- Si $r=0$, alors la suite (u_n) est **constante**, égale à u_p.

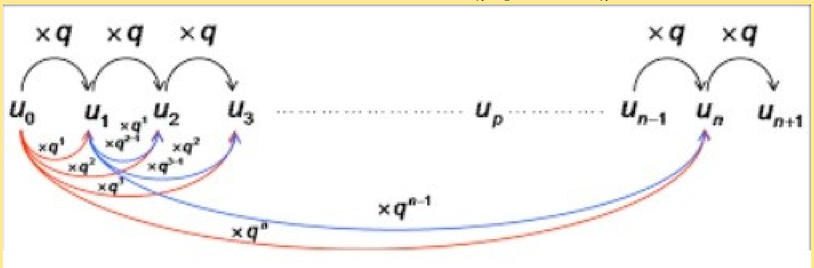
La représentation graphique d'une suite arithmétique (u_n) est un **ensemble de points isolés alignés de coordonnées** $(n;u_n)$.
Ces points sont situés sur une **droite** d'équation $y=rx+u_0$ (le coefficient directeur de la droite est la raison r).





II. Suites géométriques

On dit qu'une suite (u_n) est **géométrique** si, à partir de son premier terme, **chaque terme est obtenu en multipliant le précédent par un même nombre**.
Ainsi, il existe un réel q tel que pour tout entier n, $u_{n+1}=q\times u_n$.



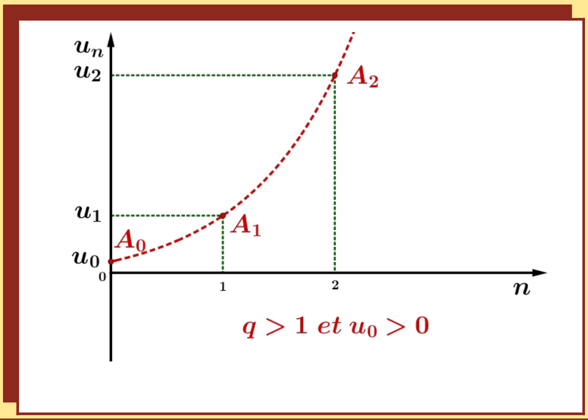
Le nombre q est appelé **raison** de la suite géométrique (u_n).
Dans le cas où la suite (u_n) ne s'annule pas, q est égal au quotient de deux termes consécutifs quelconques : pour tout entier n, $q=\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$.

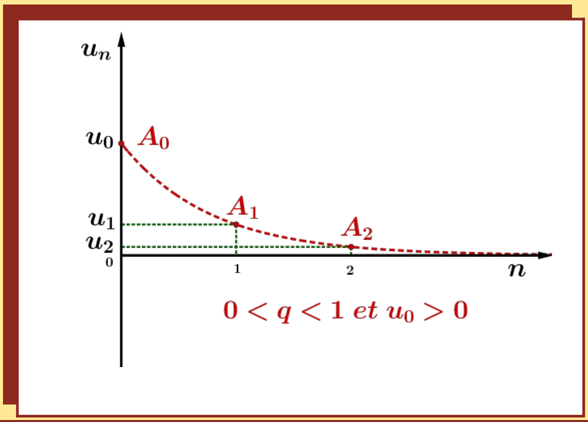
Soit (u_n) une suite géométrique de raison q.
Pour tous entiers n et p tels que $n\geqslant p$, on a $u_n=u_p\times q^{n-p}$.
En particulier, pour tout entier n, $u_n=u_0\times q^n$.

Soit (u_n) une suite géométrique de raison q et de premier terme $u_p>0$.
- Si $q>1$, alors la suite (u_n) est (strictement) **croissante**.
- Si $0<q<1$, alors la suite (u_n) est (strictement) **décroissante**.
- Si $q=1$, alors la suite (u_n) est **constante**, égale à u_p.
- Si $q<0$, alors la suite (u_n) **n'est pas monotone**.

Remarque
Si $u_p<0$, ces sens de variations sont **inversés**.

La représentation graphique d'une suite géométrique (u_n) est **un ensemble de points isolés** $(\boldsymbol{n};\boldsymbol{u_n})$, situés sur une courbe dite **exponentielle**.





Proportions et pourcentages

I. Proportions et pourcentages

I.1 Généralités

Soit E un ensemble non vide et A une partie de cet ensemble. On note n_E le nombre d'éléments (ou d'individus) de E et n_A le nombre d'éléments de A .

On appelle **proportion de A dans E** le quotient $p=\frac{n_A}{n_E}$.

• Pour tout ensemble A contenu dans un ensemble non vide E , on a $\mathbf{0 \leqslant p \leqslant 1}$.
• Pour obtenir un résultat en pourcentage, il suffit de **multiplier la proportion obtenue par 100** .

À partir de la première propriété, il est possible de déterminer chacun des paramètres en fonction des deux autres :

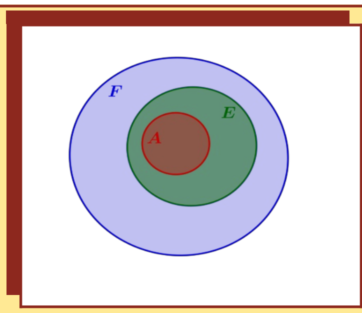
• Si on connaît n_A et n_E , on peut déterminer p : $p=\frac{n_A}{n_E}$.

• Si on connaît p (où $p\neq 0$) et n_A , on peut déterminer n_E : $n_E=\frac{n_A}{p}$.

• Si on connaît p et n_E , on peut déterminer n_A : $n_A=p\times n_E$.

I.2 Pourcentage de pourcentage

Soit F un ensemble non vide, E une partie non vide de F et A une partie non vide de E .
On note p_1 la proportion de A dans E et p_2 la proportion de E dans F .
Alors la **proportion de A dans F** est $p=p_1\times p_2$.



II. Taux d'évolution

II.1 Variation absolue et variation relative

Soit une grandeur ayant pour valeur initiale V_I et pour valeur finale V_F .
• La **variation absolue** ΔV est la différence entre V_F et V_I . On a $\Delta V=V_F-V_I$.
• Le **taux d'évolution (ou variation relative)** t est le quotient de la différence entre V_F et V_I par V_I . On a $t=\frac{V_F-V_I}{V_I}$.

Pour obtenir un **pourcentage d'évolution**, il suffit de **multiplier le taux d'évolution obtenu par 100**.

II.2 Coefficient multiplicateur

• Soit t le taux d'évolution qui permet à une quantité de passer de V_I à V_F.
On a alors : $V_F=(1+t)\times V_I$.
• $1+t$ est appelé **coefficient multiplicateur** associé au taux d'évolution t. On le note CM.
Avec ces notations, on a alors $V_F=CM\times V_I$ et $CM=1+t$.

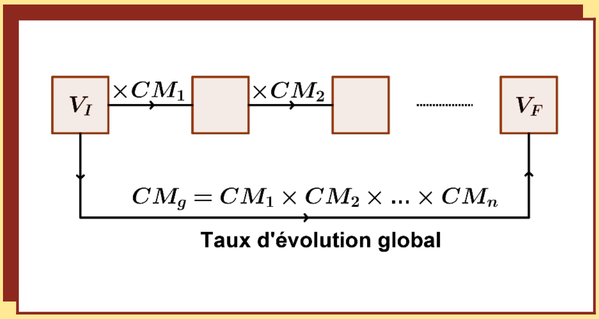
• Dans le cas d'une **augmentation**, t est **positif** et CM est un réel **supérieur à 1**.
• Dans le cas d'une **diminution**, t est **négatif** et CM est **compris entre 0 et 1**.

III. Évolutions successives et réciproques

III.1 Évolutions successives

Lorsqu'une quantité subit des **évolutions successives** $\boldsymbol{t_1, t_2, \ldots, t_n}$ de sa valeur, elle subit alors une **évolution globale** $\boldsymbol{t_g}$.

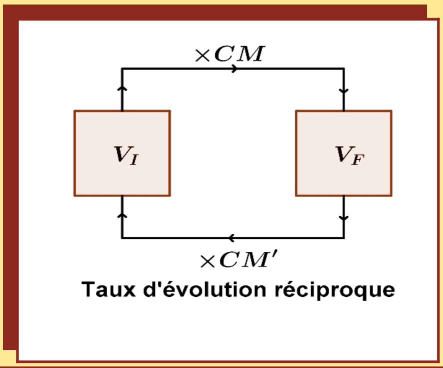
Le **coefficient multiplicateur global** $\mathbf{CM_g}$ associé à l'évolution t_g est le produit des coefficients multiplicateurs CM_1, CM_2, …, CM_n associés respectivement aux évolutions t_1, t_2, …, t_n.
On a $CM_g=CM_1\times CM_2\times\ldots\times CM_n$.



III.2 Évolution réciproque

Soit t le taux d'évolution d'une valeur passant de V_I à V_F. Alors son **taux d'évolution réciproque** $\boldsymbol{t'}$ est le taux permettant de passer de V_F à V_I.

Le **coefficient multiplicateur réciproque** $\mathbf{CM'}$ associé à l'évolution réciproque t' est l'inverse du coefficient multiplicateur non nul CM associé à l'évolution de départ t.
On a $CM'=\dfrac{1}{CM}$.



Variables catégorielles

I. Rappels

• La **population** d'une série statistique est l'ensemble des éléments appelés **individus** sur lesquels porte l'étude statistique.
• Le **caractère** d'une série statistique est la propriété étudiée sur chaque individu. Il est dit :
- **qualitatif** lorsqu'il ne prend pas que des valeurs numériques.
- **quantitatif discret** lorsqu'il ne peut prendre qu'un nombre fini de valeurs numériques.
- **quantitatif continu** lorsqu'il peut prendre une infinité de valeurs numériques.

• L'**effectif total** est le nombre d'éléments au sein de la population étudiée. On le note N.
• L'**effectif** d'une valeur du caractère est le nombre d'individus de la population prenant cette valeur (nombre de fois où cette valeur apparaît dans la série.). On le note n_i.
• La **fréquence** d'une valeur du caractère est le quotient de l'effectif de cette valeur par l'effectif total. On la note f_i et on a $f_i = \frac{n_i}{\mathrm{N}}$ (on multiplie par 100 si on veut un résultat en pourcentage).
• Le **mode** (ou **classe modale**) de la série est la valeur (ou la classe) du caractère ayant le plus grand effectif.

Remarques
• Une fréquence est toujours un nombre compris entre 0 et 1 (entre 0 et 100% si on donne les fréquences en pourcentage).
• Une série statistique apparaîtra ainsi généralement sous la forme d'un tableau donnant les effectifs pour chacune des valeurs possibles du caractère, celles-ci étant classées par ordre croissant.

Variable x_i	x_1	x_2	...	x_p
Effectif n_i	n_1	n_2	...	n_p

Effectif total : $\mathrm{N} = n_1 + n_2 + \ldots n_p$.

La somme de toutes les fréquences est toujours égale à 1.

II. Croisement de deux variables catégorielles

Lorsque l'on s'intéresse à un sujet, il est fréquent de recueillir plusieurs données ou caractères. Il est parfois intéressant de ne pas regarder chaque caractère indépendamment, mais d'essayer d'établir une éventuelle corrélation entre ces deux caractères. C'est le rôle des statistiques.

II.1 Tableau croisé d'effectifs

Lorsqu'une série statistique étudie simultanément deux caractères X et Y, on dit qu'il s'agit d'une série statistique à deux variables (ou double) que l'on note $(\mathrm{X};\mathrm{Y})$.
Les valeurs prises par le caractère X sont notées $(x_1; x_2; \ldots x_n)$.
Les valeurs prises par le caractère Y sont notées $(y_1; y_2; \ldots; y_n)$.

Un tableau croisé d'effectifs est un tableau dans lequel les valeurs d'un caractère sont présentées en ligne et celles de l'autre caractère sont présentées en colonne :
- On note n_{ij} l'effectif correspondant au couple $(x_i ; y_j)$ et N l'effectif total.
- À l'intersection d'une ligne et d'une colonne, on indique le nombre d'individus présentant simultanément la valeur du premier caractère correspondant à la ligne et la valeur du deuxième caractère correspondant à la colonne.
- L'**effectif marginal** d'une valeur d'un caractère est le nombre d'individus de la population présentant cette valeur du caractère.

X \ Y	y_1	…	y_j	…	y_m	Total
x_1	n_{11}		n_{1j}		n_{1m}	Effectif de x_1
…						
x_i	n_{il}		n_{ij}		n_{im}	Effectif de x_i
…						
x_k	n_{kl}		n_{ki}		n_{km}	Effectif de x_k
Total	Effectif de y_1		Effectif de y_i		Effectif de y_m	N

II.2 Tableau des fréquences par rapport à l'effectif global

Un tableau des fréquences par rapport à l'effectif global se présente de la même manière qu'un tableau croisé d'effectifs. Il permet d'étudier simultanément les fréquences de deux caractères avec l'un des caractères présenté en ligne et l'autre en colonne.
- On note f_{ij} la fréquence correspondant au couple $(x_i ; y_j)$ et on a $f_{ij} = \frac{n_{ij}}{N}$.
- La **fréquence marginale** d'une valeur d'un caractère est le quotient de l'effectif marginal de cette valeur par l'effectif total de la population.

X \ Y	y_1	…	y_j	…	y_m	Total
x_1	$f_{11} = \frac{n_{11}}{N}$		$f_{1j} = \frac{n_{1j}}{N}$		$f_{1m} = \frac{n_{1m}}{N}$	Fréquence de x_1
…						
x_i	$f_{il} = \frac{n_{il}}{N}$		$f_{ij} = \frac{n_{ij}}{N}$		$f_{ʒ} = \frac{n_{im}}{N}$	Fréquence de x_i
…						
x_k	$f_{kl} = \frac{n_{kl}}{N}$		$f_{kj} = \frac{n_{kj}}{N}$		$f_{km} = \frac{n_{km}}{N}$	Fréquence de x_k
Total	Fréquence de y_1		Fréquence de y_i		Fréquence de y_m	1

II.3 Tableau des fréquences conditionnelles

Si on fixe une valeur de l'un des deux caractères, on obtient une série à une variable appelée série conditionnelle. On peut donc obtenir un tableau des effectifs de cette série à une variable correspondant à une colonne du tableau croisée d'effectifs.
Une **fréquence conditionnelle** se calcule donc par rapport au caractère fixé, c'est-à-dire suivant la ligne ou la colonne du tableau croisé d'effectifs.

On repart du tableau croisé d'effectif puis on fixe x_i . On obtient donc le tableau des effectifs de la variable Y .

Y	y_1	...	y_j	...	y_m	**Total**
Effectifs des Y	n_{il}		n_{ij}		n_{im}	$n = effectif\ des\ \mathrm{Y}\ pour\ x_i$

On peut donc construire le tableau des fréquences conditionnelles du caractère Y par rapport à x_i .

Y	y_1	...	y_j	...	y_m	**Total**
Fréquences des Y	f_{il}		f_{ij}		f_{im}	1

Probabilités conditionnelles

I. Expérience aléatoire et événement

Une **expérience aléatoire** est une expérience dont le résultat dépend du hasard. Chacun des résultats possibles s'appelle **éventualité** ou **issue**. L'ensemble Ω (ou E) de tous les résultats possibles d'une expérience aléatoire s'appelle l'**univers** de l'expérience.

• Un **événement** A est une partie de l'univers Ω (un événement peut donc être constitué de zéro, une ou plusieurs issues de Ω).
• Un **événement élémentaire** est une partie de Ω qui ne contient qu'une seule issue.
• Un **événement impossible** est un événement qui n'est réalisé par aucune issue.
• Un **événement certain** est un événement qui est réalisé par toutes les issues.
• L'**événement contraire** de A, noté $\overline{A}$, est la partie constituée de toutes les issues de Ω qui ne sont pas dans A.

Donner une **loi de probabilité** associée à une expérience aléatoire c'est en donner toutes les issues et attribuer une probabilité à chacune d'elles de sorte que la somme des probabilités des issues est égale à 1. On peut présenter les résultats sous la forme d'un tableau.

II. Probabilité d'un événement

II.1 Loi des grands nombres

On a simulé n lancers d'un dé équilibré à 6 faces et noté le nombre de fois que le chiffre 4 est sorti. Le tableau suivant résume les résultats obtenus.

Nombre de lancers n	10	50	100	500	1000	10000	100000
Nombre de 4 obtenu	3	10	19	76	161	1681	16649
Fréquence d'apparition du chiffre 4	$0,3$	$0,2$	$0,19$	$0,15$	$0,161$	$0,1681$	$0,16649$

Si le dé est bien équilibré, le chiffre 4 a une chance sur 6 de sortir, soit $\frac{1}{6} \approx 0,166\ldots$.

On peut remarquer que la fréquence d'apparition du chiffre 4 se rapproche de cette valeur théorique quand le nombre de lancers augmente.

Lors d'une expérience répétée n fois, les fréquences obtenues d'un événement A de l'expérience se rapprochent d'une valeur théorique lorsque n devient grand. Cette valeur s'appelle **probabilité de l'événement $\mathbf{A}$** et est notée $\mathbf{P}(\mathbf{A})$.

II.2 Calculs de probabilité

La probabilité d'un événement A est la **somme des probabilités des événements élémentaires inclus dans A**.

• Pour tout événement A, on a $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$.
• La **somme des probabilités des événements élémentaires est égale à 1**.

Remarques
• La probabilité de l'événement certain vaut 1. On la note $P(\Omega)=1$ (ou $P(E)=1$).
• La probabilité de l'événement vide vaut 0. On la note $P(\emptyset)=0$.

Lorsque tous les événements élémentaires d'une expérience aléatoire ont la même probabilité, on dit alors qu'ils sont **équiprobables**. On parle d'**expérience équiprobable** ou de **loi équirépartie.**

Lors d'une expérience aléatoire ayant n issues équiprobables :
• La probabilité de chaque événement élémentaire est $\frac{1}{n}$.
• La probabilité d'un événement A est $P(A)=\frac{\text{nombre d'issues favorables à } A}{\text{nombre total d'issues}}$.

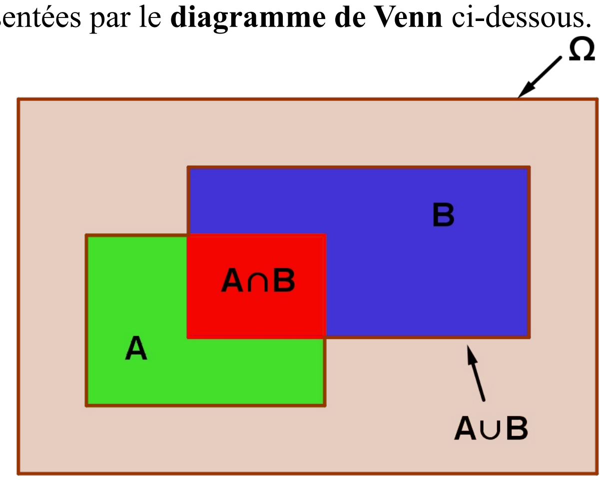
III.3 Événement contraire

La probabilité de l'**événement contraire** d'un événement A est : $P(\overline{A})=1-P(A)$

III. Réunion et intersection d'événements

• L'événement « **A et B** », noté $A \cap B$, s'appelle l'**intersection** des événements A et B.
Il est réalisé lorsque **les deux événements sont réalisés simultanément**.
• L'événement « **A ou B** », noté $A \cup B$, s'appelle la **réunion** des événements A et B.
Il est réalisé lorsqu'**au moins l'un des deux événements est réalisé**.

Ces situations sont représentées par le **diagramme de Venn** ci-dessous.



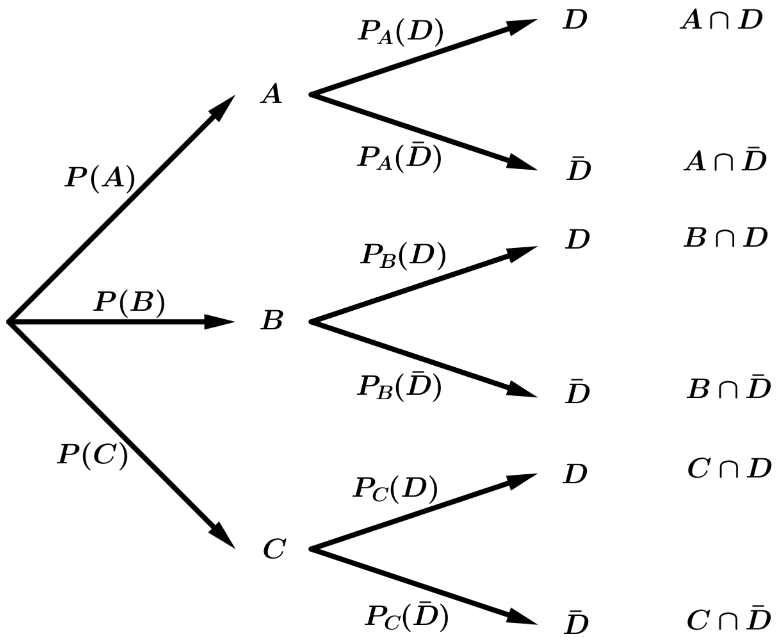
Soit A et B deux événements d'une même expérience aléatoire. On a alors :
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Si l'événement $A \cap B$ ne contient aucun élément (c'est-à-dire que $A \cap B = \emptyset$), on dit que les événements A et B sont **incompatibles** (ou **disjoints**).

Si deux événements A et B sont **incompatibles**, alors $P(A \cap B) = 0$.
Pour conséquence, on en déduit que $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Remarque
A et $\overline{A}$ sont incompatibles car $A \cap \overline{A} = \emptyset$.

IV. Règles d'utilisation d'un arbre de probabilités



Remarque
$P_A(D)$ se lit probabilité de D sachant A. Il s'agit de la probabilité d'avoir l'événement D sachant que l'événement A est réalisé.

Règle 1
La somme des probabilités sur les branches partant d'un même nœud est égale à 1.
Règle 2
La probabilité de l'événement correspondant à un chemin est obtenue en multipliant les probabilités portées par ses branches.
Règle 3
La probabilité de l'événement correspondant à plusieurs chemins est obtenue en additionnant les probabilités de chacun de ces chemins.

V. Probabilités conditionnelles

On appelle **cardinal de A**, noté $\mathrm{Card}(A)$, l'effectif de l'événement A. Autrement dit, $\mathrm{Card}(A)$ est égal au nombre d'issues qui réalisent l'événement A.

Soit A et B deux événements tels que $\mathrm{Card}(A)$ soit non nul.
La **probabilité conditionnelle** que l'événement B se réalise sachant que l'événement A est réalisé est notée $P_A(B)$, et elle est définie par :

$$P_A(B)=\frac{\mathrm{Card}(A\cap B)}{\mathrm{Card}(A)}$$

Remarques

- $P_A(B)$ se lit « probabilité de B sachant A ».
- Si la probabilité de l'événement B est également non nulle, on peut définir la probabilité conditionnelle que l'événement A se réalise sachant que l'événement B est réalisé, notée $P_B(A)$ et définie par :

$$P_B(A)=\frac{\mathrm{Card}(A\cap B)}{\mathrm{Card}(B)}$$

Répétition d'épreuves indépendantes et variables aléatoires

I. Modèle associé à une expérience aléatoire à deux épreuves indépendantes

En réalisant successivement deux expériences aléatoires telles que les événements associés à la première soit indépendants des événements associés à la seconde, on dit que l'on réalise une **succession de deux épreuves indépendantes**.

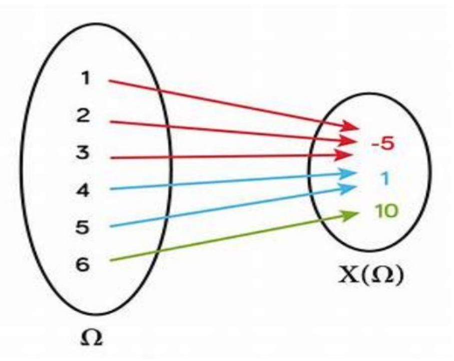
• Deux expériences sont dites **indépendantes** si le résultat de l'une n'influe pas sur le résultat de l'autre.
• Deux expériences sont dites **identiques** si elles ont les mêmes issues et les mêmes probabilités pour chaque issue.

II. Variables aléatoires

II.1 Variable aléatoire discrète

Soit une expérience aléatoire dont l'univers est l'ensemble Ω .
Une **variable aléatoire** est une fonction définie sur Ω et à valeurs dans $\mathbb{R}$. On la note X .

Exemple
On lance un dé équilibré à six faces et on observe le résultat affiché sur la face supérieure.
• « Si le résultat obtenu est 1, 2 ou 3, je perds 5 jetons »
• « Si le résultat obtenu est 4 ou 5, je gagne 1 jeton »
• « Sinon, je gagne 10 jetons »
On peut définir une variable aléatoire X qui décrit les gains de ce jeu. On a donc $X(1)=-5$, $X(2)=-5$, $X(3)=-5$, $X(4)=1$, $X(5)=1$, $X(6)=10$.
On peut représenter la situation par le schéma ci-contre.



II.2 Loi de probabilité d'une variable aléatoire discrète

Soit X une variable aléatoire définie sur l'univers Ω . L'ensemble des valeurs prises par X est $\Omega=\{x_1;x_2;\ldots;x_k\}$, où les valeurs sont rangées par ordre croissant. Le nombre x_i est associé à une ou plusieurs issues de Ω , avec $1\leqslant i\leqslant k$.

• L'événement « $X=x_i$ » est l'ensemble des issues de Ω auxquelles on a associé la valeur x_i .
• L'événement « $X\geqslant x_i$ » est l'ensemble des issues de Ω auxquelles on a associé une valeur supérieure ou égale à x_i . On définit de même « $X>x_i$ », « $X<x_i$ », et « $X\leqslant x_i$ ».

La probabilité de l'événement « $X=x_i$ » est la probabilité de l'événement formé de toutes les issues associées au nombre x_i . On la note $P(X=x_i)$ ou p_i .

Une variable aléatoire X est définie sur l'univers Ω d'une expérience aléatoire.
Notons $\Omega=\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ l'ensemble des valeurs prises par X.
La loi de probabilité de X est la fonction qui à chaque x_i de Ω lui associe sa probabilité notée $P(X=x_i)$. On la représente sous forme d'un tableau de valeurs :

$\boldsymbol{x_i}$	x_1	x_2	…	x_n
$\mathbf{P}(\mathbf{X}=\boldsymbol{x_i})$	$P(X=x_1)$	$P(X=x_2)$	…	$P(X=x_n)$

On a $p_1+p_2+\ldots+p_n=\sum_{i=1}^{k} p_i=1$ ou $P(X=x_1)+P(X=x_2)+\ldots+P(X=x_n)=\sum_{i=1}^{n} P(X=x_i)=1$.

II.3 Espérance

L'**espérance** mathématique de la variable aléatoire X est le réel noté $E(X)$ défini par :

$$E(X)=\sum_{i=1}^{n} p_i x_i = p_1 x_1 + p_2 x_2 + \ldots + p_n x_n$$

Remarques

• La loi des grands nombres nous permet d'interpréter l'espérance de la loi de probabilité de X. Elle nous dit en effet qu'en répétant un grand nombre de fois l'expérience, les fréquences observées se rapprochent de la probabilité théorique. En conséquence, la moyenne des résultats obtenus se rapproche de l'espérance de la loi de probabilité de X. L'espérance est donc la moyenne que l'on peut espérer en répétant l'expérience un grand nombre de fois.

Pour le jeu proposé en exemple, l'espérance de $-\frac{1}{2}$ signifie que l'on peut « espérer » ou « craindre » perdre en moyenne $-\frac{1}{2}$ de jeton par partie (ou perdre 1 jeton toutes les 2 parties).

• Si X représente le gain d'un jeu d'argent, si on a $E(X)=0$, alors on dit que le jeu est équitable.

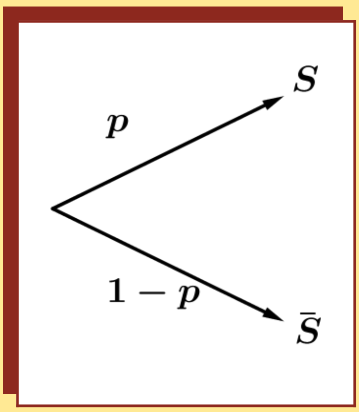
III. Épreuve, loi et schéma de Bernoulli

III.1 Épreuve de Bernoulli

Une **épreuve de Bernoulli** de paramètre p (compris entre 0 et 1) est une expérience aléatoire comportant deux issues :

• l'une appelée **succès**, noté S, de probabilité p.

• l'autre appelée **échec**, noté $\bar{S}$ ou E, de probabilité $q=1-p$.



III.2 Loi de Bernoulli

Notons X la variable aléatoire prenant la valeur 1 en cas de succès et la valeur 0 en cas d'échec.
On dit que X suit la **loi de Bernoulli** de paramètre p.
Autrement dit, on a $P(X=1)=p$ et $P(X=0)=1-p$.
On peut résumer la loi de Bernoulli par le tableau suivant :

$\boldsymbol{x_i}$	1	0
$\mathbf{P}(\mathbf{X}=\boldsymbol{x_i})$	p	$1-p$

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi de Bernoulli de paramètre p.
L'**espérance** de X est $E(X)=p$.

III.3 Schéma de Bernoulli

Soit n un entier naturel et p un réel compris entre 0 et 1.
Un **schéma de Bernoulli** de paramètres n et p est une expérience aléatoire consistant à répéter n fois, de façon **identique et indépendante**, une épreuve de Bernoulli de paramètre p.

IV. Échantillonnage

IV.1 Simulation d'échantillonnage

Lorsqu'on travaille sur une population de grande taille, il est rarement possible d'avoir accès aux données relatives à l'ensemble de la population. On utilise alors un **échantillon** de cette population.

Un échantillon de taille n est une sélection de n individus choisis au hasard dans un population.

Lorsque l'on répète n fois, de façon indépendante, une expérience aléatoire à deux issues, on obtient une série de n résultats que l'on appelle échantillon de taille n associé à une épreuve de Bernoulli.

Remarque
Simuler un échantillon avec un tableur ou un programme en langage Python permet d'étudier des séries statistiques comportant un très grand nombre de données.

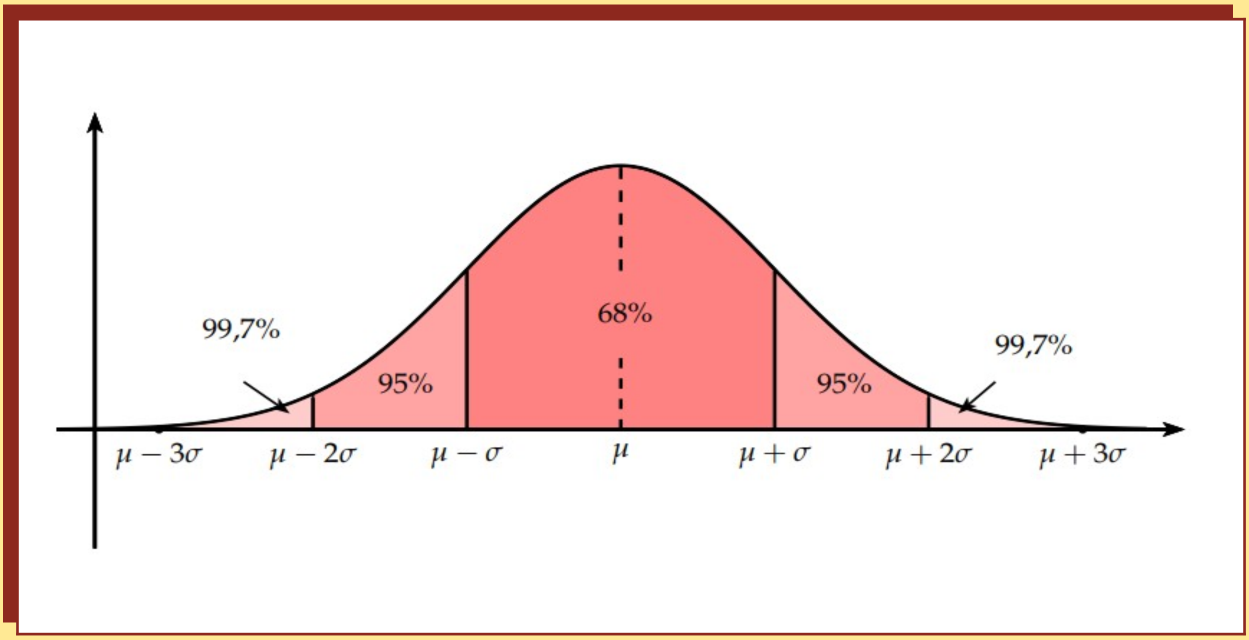
IV.2 Étude des échantillons

Sur plusieurs échantillons de même taille, la fréquence d'un caractère observée varie d'un échantillon à l'autre. C'est ce qu'on appelle la **fluctuation d'échantillonnage**.

Remarque
Plus la taille des échantillons est grande, plus le phénomène de fluctuation diminue. Les fréquences se rapprochent alors de la proportion théorique, c'est-à-dire de la probabilité théorique.

On étudie une simulation de N échantillons de taille n et on note σ l'**écart type** de la série des fréquences obtenues et μ la proportion théorique.

- En moyenne, environ 68% des fréquences sont dans l'intervalle $[\mu-\sigma;\mu+\sigma]$.
- En moyenne, environ 95% des fréquences sont dans l'intervalle $[\mu-2\sigma;\mu+2\sigma]$.
- En moyenne, plus de 99% des fréquences sont dans l'intervalle $[\mu-3\sigma;\mu+3\sigma]$.



L'**écart-type** de la série des fréquences est de l'ordre de $\frac{1}{2\sqrt{n}}$.

Autrement dit, la valeur de σ est proche de $\frac{1}{2\sqrt{n}}$.