

Sommaire

I. Suites.....	2
• Préambule sur les suites.....	2
• Limites de suites.....	8
II. Fonctions.....	14
• Limites de fonctions.....	14
• Dérivation et convexité.....	18
• Continuité.....	22
• Fonction exponentielle.....	26
• Fonction logarithme népérien.....	28
• Primitives et équations différentielles.....	32
• Calcul intégral.....	37
III. Probabilités.....	41
• Probabilités conditionnelles et indépendance.....	41
• Variables aléatoires.....	45
• Lois discrètes.....	47
• Lois à densité.....	53
IV. Statistiques.....	58
• Statistiques à deux variables quantitatives.....	58

Préambule sur les suites

I. Généralités sur les suites

Une suite numérique est une **succession infinie de réels**. Une suite numérique est donc une fonction définie sur l'ensemble des **entiers naturels** $\mathbb{N}$.

Une suite numérique (u_n) définie à partir du rang p est une fonction qui à chaque entier $n \geq p$ associe un réel, noté u_n . Cette suite est aussi notée $(u_n)_{n \geq p}$ ou simplement u .

u_n est appelé le **terme général** de la suite ou le **terme d'indice** n .

u_p est le **terme initial** ou le **premier terme** de la suite.

Attention !

- u_{n+1} est le terme d'indice $n+1$. C'est le terme qui suit le terme d'indice n , c'est-à-dire u_n . On ne doit pas le confondre avec $u_n + 1$ qui est la somme de u_n , le terme d'indice n , et de 1.
- u_{n-1} est le terme d'indice $n-1$. Il précède le terme u_n .

Une suite numérique (u_n) peut être représentée par un **nuage de points** de coordonnées $(n; u_n)$.

II. Mode de génération d'une suite numérique

II.1 Suite définie par une formule explicite

Soit a un nombre réel et f une fonction définie sur l'intervalle $[a; +\infty[$.

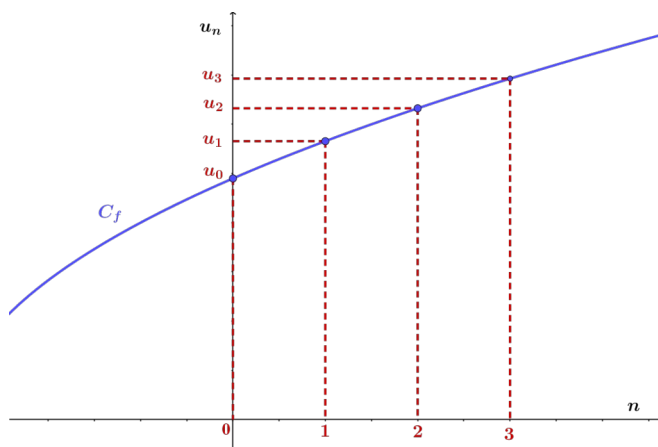
On peut définir une suite (u_n) en posant pour tout entier $n \geq a$, $u_n = f(n)$.

Une suite (u_n) est définie de **façon explicite** quand le terme u_n est exprimé en fonction de n .

Avec cette définition, on peut donc calculer n'importe quel terme de la suite à partir de son indice.

Représentation graphique

Graphiquement, les termes de la suite (u_n) sont les ordonnées des points $A_n(n; u_n)$ d'abscisses entières de la courbe C_f .



II.2 Suite définie par une formule de récurrence

Soit f une fonction définie sur un ensemble I . On suppose que si $x \in I$, alors $f(x) \in I$.

Soit a un nombre réel de I et p un entier.

On peut alors définir une suite (u_n) en posant $u_p = a$ et pour tout entier $n \geq p$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

Représentation graphique

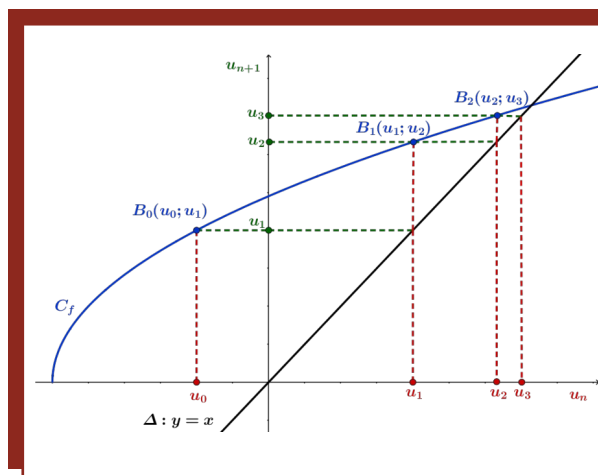
Graphiquement, $B_0(u_0; u_1)$ appartient à la courbe C_f .

Pour déterminer $B_1(u_1; u_2)$, il faut placer u_1 , l'ordonnée de B_0 , en abscisse.

On « reporte » donc u_1 sur l'axe des abscisses en utilisant la droite $\Delta : y = x$.

On poursuit de même pour construire

$B_2(u_2; u_3)$, $B_3(u_3; u_4)$, ...



III. Sens de variations

- Une suite (u_n) est **croissante** à partir du rang p si pour tout $n \geq p$, $u_{n+1} \geq u_n$.
- Une suite (u_n) est **décroissante** à partir du rang p si pour tout $n \geq p$, $u_{n+1} \leq u_n$.
- Une suite (u_n) est **monotone** si elle est soit croissante, soit décroissante à partir du rang p .
- Une suite (u_n) est **stationnaire** à partir du rang p si pour tout n , $u_{n+1} = u_n$.
- Une suite (u_n) est **constante** lorsque pour tout n , $u_{n+1} = u_n$.

Méthodes d'étude de variation d'une suite

- Étude du signe de la différence : Soit (u_n) une suite.

- Si à partir du rang p , pour tout entier $n \geq p$, $u_{n+1} - u_n \geq 0$, alors (u_n) est une suite croissante.
- Si à partir du rang p , pour tout entier $n \geq p$, $u_{n+1} - u_n \leq 0$, alors (u_n) est une suite

décroissante.

- Étude du quotient : Soit (u_n) une suite dont **tous les termes sont strictement positifs**.

- Si à partir du rang p , pour tout entier $n \geq p$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$, alors $u_{n+1} \geq u_n$ et donc (u_n) est une suite croissante.

- Si à partir du rang p , pour tout entier $n \geq p$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1$, alors $u_{n+1} \leq u_n$ et donc (u_n) est une suite décroissante.

- Étude de la fonction f associée pour une suite explicite :

Soit a un nombre réel et f une fonction définie sur l'intervalle $[a; +\infty[$.

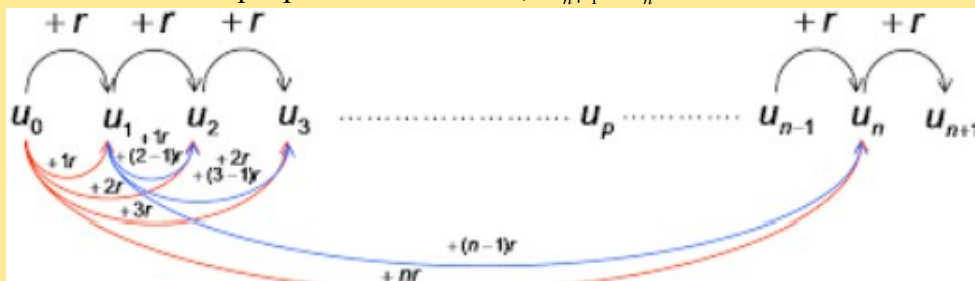
Soit un entier $p \geq a$ et la suite (u_n) définie pour tout entier $n \geq p$ par $u_n = f(n)$.

- Si la fonction f est (strictement) **croissante** sur $[p; +\infty[$, alors la suite (u_n) est (strictement) **croissante** à partir du rang p .
- Si la fonction f est (strictement) **décroissante** sur $[p; +\infty[$, alors la suite (u_n) est (strictement) **décroissante** à partir du rang p .

IV. Suites arithmétiques

On dit qu'une suite (u_n) est **arithmétique** si, à partir de son premier terme, **chaque terme est obtenu en ajoutant au précédent un même nombre**.

Ainsi, il existe un réel r tel que pour tout entier n , $u_{n+1} = u_n + r$.



Le nombre r est appelé **raison** de la suite arithmétique (u_n) . Il est égal à la différence entre deux termes consécutifs quelconques : pour tout entier n , $r = u_{n+1} - u_n$.

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r .

Pour tous entiers n et p tels que $n \geq p$, on a $u_n = u_p + (n - p)r$.

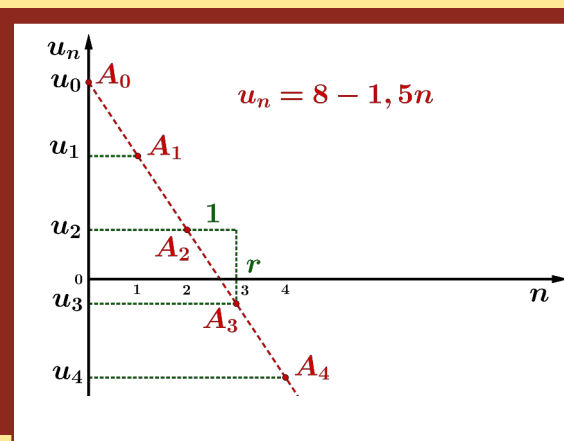
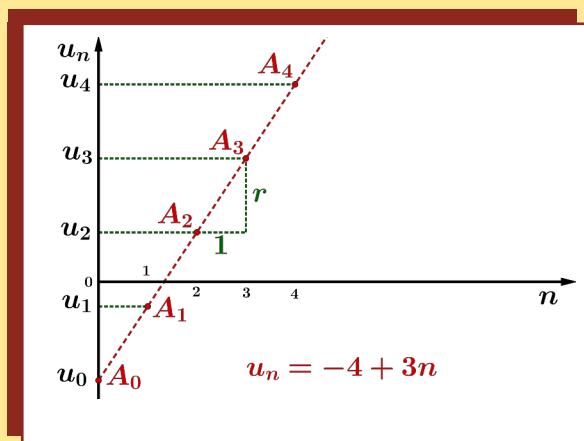
En particulier, pour tout entier n , $u_n = u_0 + nr$.

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_p .

- Si $r > 0$, alors la suite (u_n) est (strictement) **croissante**.
- Si $r < 0$, alors la suite (u_n) est (strictement) **décroissante**.
- Si $r = 0$, alors la suite (u_n) est **constante**, égale à u_p .

La représentation graphique d'une suite arithmétique (u_n) est un **ensemble de points isolés alignés de coordonnées $(n; u_n)$** .

Ces points sont situés sur une **droite** d'équation $y = rx + u_0$ (le coefficient directeur de la droite est la raison r).



Soit n un entier naturel non nul. La somme des n premiers entiers est :

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

Soit (u_n) une suite arithmétique. La formule suivante donne la somme des termes consécutifs :

$$\text{Somme des termes consécutifs} = \text{nombre de termes} \times \frac{\text{premier terme} + \text{dernier terme}}{2}$$

En particulier, pour une suite arithmétique de premier terme u_0 :

$$S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n = \sum_{k=0}^n u_k = (n+1) \times \frac{u_0 + u_n}{2}$$

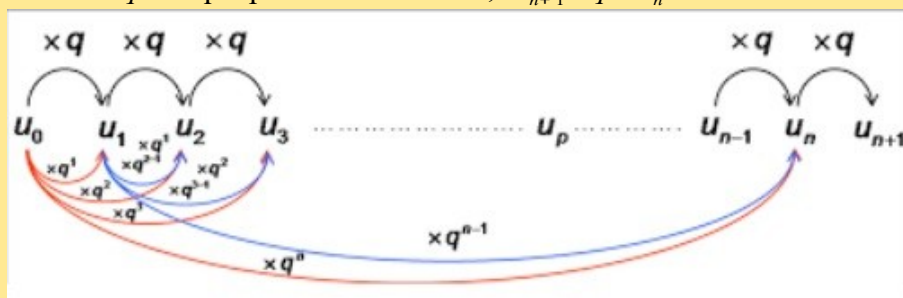
De manière plus générale, si n et p sont deux entiers naturels tels que $n > p$, alors :

$$S_n = u_p + u_{p+1} + \dots + u_n = \sum_{k=p}^n u_k = (n-p+1) \times \frac{u_p + u_n}{2}$$

V. Suites géométriques

On dit qu'une suite (u_n) est **géométrique** si, à partir de son premier terme, **chaque terme est obtenu en multipliant le précédent par un même nombre**.

Ainsi, il existe un réel q tel que pour tout entier n , $u_{n+1} = q \times u_n$.



Le nombre q est appelé **raison** de la suite géométrique (u_n) .

Dans le cas où la suite (u_n) ne s'annule pas, q est égal au quotient de deux termes consécutifs

quelconques : pour tout entier n , $q = \frac{u_{n+1}}{u_n}$.

Soit (u_n) une suite géométrique de raison q .

Pour tous entiers n et p tels que $n \geq p$, on a $u_n = u_p \times q^{n-p}$.

En particulier, pour tout entier n , $u_n = u_0 \times q^n$.

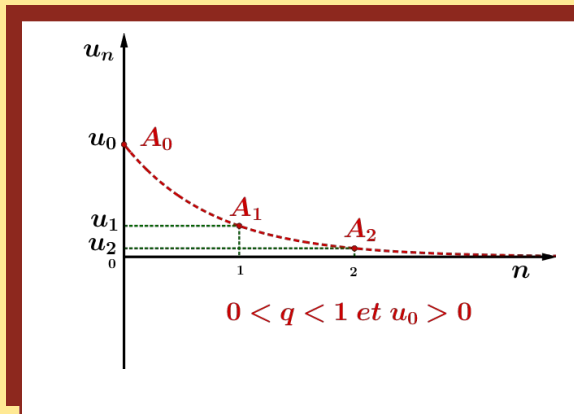
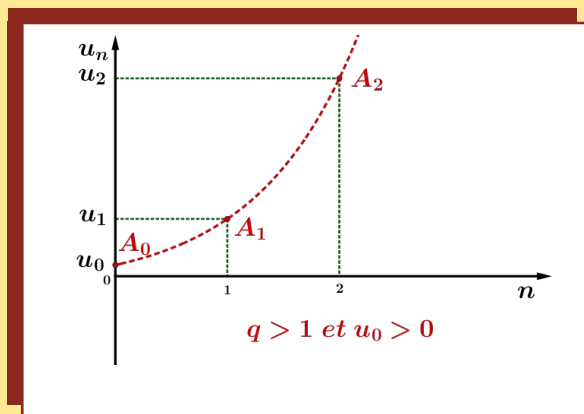
Soit (u_n) une suite géométrique de raison q et de premier terme $u_p > 0$.

- Si $q > 1$, alors la suite (u_n) est (strictement) **croissante**.
- Si $0 < q < 1$, alors la suite (u_n) est (strictement) **décroissante**.
- Si $q = 1$, alors la suite (u_n) est **constante**, égale à u_p .
- Si $q < 0$, alors la suite (u_n) **n'est pas monotone**.

Remarque

Si $u_p < 0$, ces sens de variations sont **inversés**.

La représentation graphique d'une suite géométrique (u_n) est **un ensemble de points isolés** $(n; u_n)$, situés sur une courbe dite **exponentielle**.



Soit n un entier naturel non nul et q un réel différent de 1. La somme des n premières puissances successives d'un nombre q est : $1 + q + q^2 + \dots + q^n = \sum_{k=0}^n q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$.

Soit (u_n) une suite géométrique de raison $q \neq 1$. La formule suivante donne la somme des termes consécutifs :

$$\text{Somme des termes consécutifs} = \text{premier terme} \times \frac{1 - q^{\text{nombre de termes}}}{1 - q}$$

En particulier, pour une suite géométrique de premier terme u_0 :

$$S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n = \sum_{k=0}^n u_k = u_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

De manière plus générale, si n et p sont deux entiers naturels tels que $n > p$, alors :

$$S_n = u_p + u_{p+1} + \dots + u_n = \sum_{k=p}^n u_k = u_p \times \frac{1 - q^{n-p+1}}{1 - q}$$

VI. Suites arithmético-géométriques

Une suite (u_n) est dite **arithmético-géométrique** s'il existe deux réels a et b tels que pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = au_n + b$.

Méthode générale

Dans les exercices, pour étudier une suite (u_n) arithmético-géométrique, on utilise une suite annexe (v_n) (donnée par l'énoncé et définie en fonction de (u_n)) qui est géométrique.

De manière générale, on démontre que (v_n) est une suite géométrique (en exprimant v_{n+1} en fonction de v_n) et on donne son expression générale. On en déduit alors l'expression générale de (u_n) . Enfin on conclut sur les variations et la limite de (u_n) .

Méthode : Étude d'une suite arithmético-géométrique

M. Durand dépose 5000€ sur un compte rémunéré au taux annuel de 2,5 % et choisit d'y ajouter à la fin de chaque année la somme de 2000€. On note u_n le montant, en euros, du capital acquis au bout de n années.

- On exprime u_{n+1} en fonction de u_n :

Le coefficient multiplicateur associé à un taux d'intérêt de 2,5 % est $1 + \frac{2,5}{100} = 1,025$.

De plus, 2000€ sont ajoutés chaque début d'année.

Donc pour tout entier n , $u_{n+1} = 1,025 u_n + 2000$ et $u_0 = 5000$.

- On introduit la suite géométrique (v_n) :

Soit (v_n) la suite définie pour tout n par $v_n = u_n + 80000$. On montre que (v_n) est géométrique.

$$\begin{aligned} \text{Pour tout entier } n, \text{ on a } v_{n+1} &= u_{n+1} + 80000 \\ &= 1,025 u_n + 2000 + 80000 \\ &= 1,025 u_n + 82000 \\ &= 1,025 \left(u_n + \frac{82000}{1,025} \right) \\ &= 1,025 (u_n + 80000) \\ &= 1,025 v_n \end{aligned}$$

Donc (v_n) est une suite géométrique de raison $q = 1,025$ et de premier terme $v_0 = u_0 + 80000 = 5000 + 80000 = 85000$.

- On exprime v_n en fonction de n :

Pour tout entier n , on a $v_n = v_0 \times q^n = 85000 \times 1,025^n$.

- On exprime u_n en fonction de n :

Pour tout entier n , on a $u_n = v_n - 80000 = 85000 \times 1,025^n - 80000$.

- On cherche un seuil :

M. Durand souhaite s'acheter une voiture à 15000€. Il se demande combien d'années seront nécessaires pour que le montant du capital disponible dépasse 15000€. La calculatrice nous donne (programme ou table de valeurs) $n = 5$. Donc il faudra 5 ans à M. Durand pour s'offrir sa voiture.

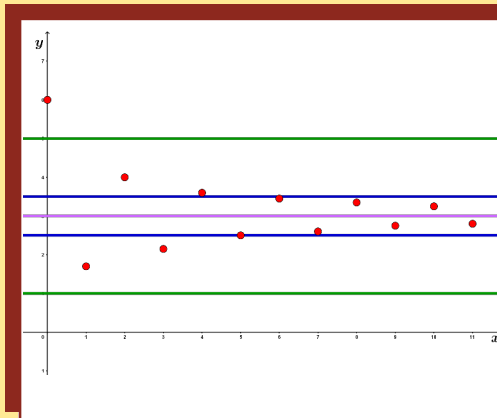
Limites de suites

I. Limite d'une suite

Soit (u_n) une suite et l un réel.

On dit que (u_n) **converge vers l** ou **tend vers l** si tout intervalle ouvert contenant l contient tous les termes u_n à partir d'un certain rang.

Le réel l est appelé **limite** de (u_n) et on note $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$.

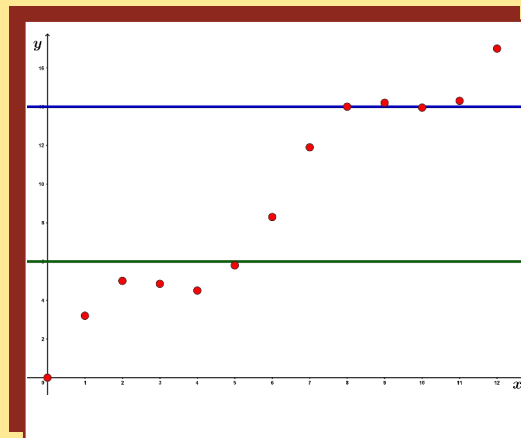


Si une suite (u_n) converge, alors sa limite est **unique**.

Soit (u_n) une suite et A un réel.

• On dit que (u_n) **diverge vers $+\infty$** ou **tend vers $+\infty$** si tout intervalle ouvert de la forme $]A; +\infty[$ contient tous les termes u_n à partir d'un certain rang. On note $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

• On dit que (u_n) **diverge vers $-\infty$** ou **tend vers $-\infty$** si tout intervalle ouvert de la forme $]-\infty; A[$ contient tous les termes u_n à partir d'un certain rang. On note $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$.



II. Opérations sur les limites

II.1 Limites d'une somme de suites

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n =$	l	l	l	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n =$	l'	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n + v_n) =$	$l + l'$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	FI

II.2 Limites d'un produit de suites

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n =$	l	$l > 0$	$l > 0$	$l < 0$	$l < 0$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	0
$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n =$	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n \times v_n) =$	ll'	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	FI

II.3 Limites d'un quotient de suites

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n =$	l	l	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$l > 0$ ou $+\infty$	$l < 0$ ou $-\infty$	$l > 0$ ou $+\infty$	$l < 0$ ou $-\infty$	0	$+\infty$ ou $-\infty$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n =$	l' et $l' \neq 0$	$+\infty$ ou $-\infty$	$l' > 0$	$l' < 0$	$l' > 0$	$l' < 0$	0 et $v_n > 0$	0 et $v_n > 0$	0 et $v_n < 0$	0 et $v_n < 0$	0	$+\infty$ ou $-\infty$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} =$	$\frac{l}{l'}$	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	FI	FI

II.4 Formes indéterminées

Il y a quatre cas d'indétermination qui sont, en utilisant un abus d'écriture :

$$\ll \infty - \infty \gg, \ll 0 \times \infty \gg, \ll \frac{\infty}{\infty} \gg \text{ et } \ll \frac{0}{0} \gg$$

Pour lever une indétermination, le principe est alors de transformer l'écriture de l'expression étudiée pour se ramener aux cas connus.

Méthodes pour lever une indétermination :**• La factorisation d'un polynôme**

Déterminons la limite de la suite de terme général $n^2 - 4n + 1$.

Puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} (-4n + 1) = -\infty$, on est en présence de la forme indéterminée

« $\infty - \infty$ ». Pour lever l'indétermination, on factorise par n^2 .

On a pour tout entier naturel n non nul, $n^2 - 4n + 1 = n^2 \left(1 - \frac{4}{n} + \frac{1}{n^2} \right)$.

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} -\frac{4}{n} = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} = 0$, donc limite de somme, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{4}{n} + \frac{1}{n^2} \right) = 1$.

De plus, $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty$. Ainsi, par limite de produit, $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n^2 - 4n + 1) = +\infty$.

• La factorisation d'un quotient

Déterminons la limite de la suite de terme général $\frac{n-4}{2n+7}$.

Puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n-4) = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} (2n+7) = +\infty$, on est en présence de la forme indéterminée

« $\frac{\infty}{\infty}$ ». Pour lever l'indétermination, on factorise le numérateur et le dénominateur par n .

On a $\frac{n-4}{2n+7} = \frac{n \left(1 - \frac{4}{n} \right)}{n \left(2 + \frac{7}{n} \right)} = \frac{1 - \frac{4}{n}}{2 + \frac{7}{n}}$. Or par limite de somme, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{4}{n} \right) = 1$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(2 + \frac{7}{n} \right) = 2$.

Ainsi, par limite de quotient, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n-4}{2n+7} = \frac{1}{2}$.

• La quantité conjuguée

Déterminons la limite de terme général $\sqrt{n+3} - \sqrt{n+2}$.

Puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n+3} = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n+2} = +\infty$, on est en présence de la forme indéterminée

« $\infty - \infty$ ». Pour lever l'indétermination, on utilise la quantité conjuguée.

On a pour tout entier naturel n , $\sqrt{n+3} - \sqrt{n+2} = (\sqrt{n+3} - \sqrt{n+2}) \times \frac{\sqrt{n+3} + \sqrt{n+2}}{\sqrt{n+3} + \sqrt{n+2}}$

$$\begin{aligned} &= \frac{\sqrt{n+3}^2 - \sqrt{n+2}^2}{\sqrt{n+3} + \sqrt{n+2}} \\ &= \frac{n+3 - (n+2)}{\sqrt{n+3} + \sqrt{n+2}} \\ &= \frac{n+3 - n - 2}{\sqrt{n+3} + \sqrt{n+2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{n+3} + \sqrt{n+2}} \end{aligned}$$

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n+3} = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n+2} = +\infty$. D'où, par limite de somme, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n+3} + \sqrt{n+2} = +\infty$.

Donc, par inverse, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n+3} + \sqrt{n+2}} = 0$. Ainsi $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{n+3} - \sqrt{n+2}) = 0$.

III. Théorèmes sur les limites

III.1 Limites et inégalités

Soit (u_n) , (v_n) et (w_n) trois suites et l un réel. Si à partir d'un certain rang, on a :

Théorème de comparaison

- $u_n \geq v_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.
- $u_n \leq v_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$.

Théorème d'encadrement

$v_n \leq u_n \leq w_n$, et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = l$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$.

Inégalités et limites

Soit (u_n) et (v_n) deux suites convergentes. On suppose qu'il existe un entier naturel n_0 , tel que pour tout entier $n \geq n_0$, $u_n \leq v_n$. Alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$.

III.2 Limites d'une suite arithmétique

Soit (u_n) une suite arithmétique de premier terme u_p et de raison r non nulle.

- Si $r > 0$, alors la suite (u_n) diverge et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.
- Si $r < 0$, alors la suite (u_n) diverge et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$.

III.3 Limites d'une suite géométrique

Soit q un réel.

- Si $q > 1$, alors la suite (q^n) diverge et $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty$.
- Si $q = 1$, alors la suite (q^n) converge et $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 1$.
- Si $-1 < q < 1$, alors la suite (q^n) converge et $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$.
- Si $q \leq -1$, alors la suite (q^n) diverge et n'a pas de limite.

Soit (u_n) une suite géométrique de raison q avec $q \geq 0$ et de premier terme u_p , où $p \in \mathbb{N}$.

- Si $q > 1$ et $u_p > 0$, alors la suite (u_n) diverge et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.
- Si $q > 1$ et $u_p < 0$, alors la suite (u_n) diverge et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$.
- Si $q = 1$, alors la suite (u_n) converge et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = u_p$.
- Si $-1 < q < 1$, alors la suite (u_n) converge et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.
- Si $q \leq -1$, alors la suite (q^n) diverge et n'a pas de limite.

Soit (u_n) une suite géométrique de raison q avec $-1 < q < 1$ et de premier terme u_p , où $p \in \mathbb{N}$.

Soit S_n la somme des n premiers termes de la suite (u_n) . Alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \frac{u_p}{1-q}$.

III.4 Limites d'une suite arithmétique-géométrique

Soit (u_n) une suite arithmético-géométrique de premier terme u_p , où $p \in \mathbb{N}$, et telle que pour tout entier $n \geq p$, $u_{n+1} = au_n + b$, avec $a \neq 1$ et $b \neq 0$.

Soit l le réel tel que $l = al + b$. La suite (v_n) définie pour tout entier $n \geq p$ par $v_n = u_n - l$ est une suite géométrique de raison a et de premier terme $v_p = u_p - l$.

V. Algorithme de calcul

Un algorithme est une suite finie d'instructions données dans un certain ordre permettant de résoudre un problème. Ce mot vient du nom du mathématicien perse Muhammad ibn Musa al-Khwarizmi (8^e siècle après J.C.), surnommé le père de l'algèbre.

Exemple 1

On souhaite mettre en œuvre un algorithme permettant de déterminer un seuil à partir duquel les termes de la suite sont supérieurs à un réel A donné.

Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = 3n^2 + 2$. On peut démontrer que (u_n) est croissante et que sa limite est $+\infty$. On a $u_0 = 3 \times 0^2 + 2 = 2$.

En langage de programmation, on a par exemple (sur TI) :

```
PROGRAM : SEUIL
: Prompt A
: 0 → N
: 2 → U
: While U < A
: N + 1 → N
: 3 * N^2 + 2 → U
: End
: Disp N
```

Exemple 2

Étant donné une suite géométrique de raison $q \in]0; 1[$, on souhaite mettre en œuvre un algorithme permettant de déterminer un seuil à partir duquel les termes de la suite sont inférieurs à un réel a donné.

On injecte à un patient une dose de 2 cm^3 de médicament. Chaque heure le volume du médicament dans le sang diminue de 12%. Pour tout entier n , on note u_n le volume du médicament en cm^3 .

On souhaite connaître la « demi-vie » du médicament, c'est-à-dire le moment où le médicament sera absorbé à 50%.

(u_n) est une suite géométrique de raison $q = 1 - \frac{12}{100} = 0,88$. Pour tout entier n , $u_n = 2 \times 0,88^n$.

Un algorithme se construit en trois phases : l'**initialisation**, le **traitement** et la **sortie**.

- L'initialisation consiste à affecter aux différentes variables de départ leur valeur. Ici, les deux variables sont n (l'indice de la suite qui correspond au nombre d'heures) qui débute à 0 et u (le volume de médicament dans le sang) qui débute à 2.
- Le traitement consiste à effectuer les différents calculs pour atteindre l'objectif. Ici, tant que u (le volume de médicament dans le sang) est supérieur à 1, on continue à calculer les termes de la suite.
- La sortie consiste à afficher le résultat trouvé. Ici, on affichera la valeur de n , c'est-à-dire au bout de combien d'heures le médicament sera à moitié absorbé.

En langage de programmation, on a par exemple (sur TI) :

```
PROGRAM : SEUIL  
: 0 → N  
: 2 → U  
: While U > 1  
: N + 1 → N  
: 2 * 0,88N → U  
: End  
: Disp N
```

```
PROGRAM : SEUIL  
: 0 → N  
: While 2 * 0,88N > 1  
: N + 1 → N  
: End  
: Disp N
```

L'algorithme nous donne un seuil de 6, c'est-à-dire qu'à partir de 6 heures après l'injection du médicament, il en restera moins de la moitié dans le corps du patient.

Limites de fonctions

I. Limites en l'infini

I.1 Limite infinie

- Une fonction f admet une limite infinie égale à $+\infty$ si tout intervalle ouvert de la forme $]A; +\infty[$ contient toutes les valeurs $f(x)$ pour x assez grand.

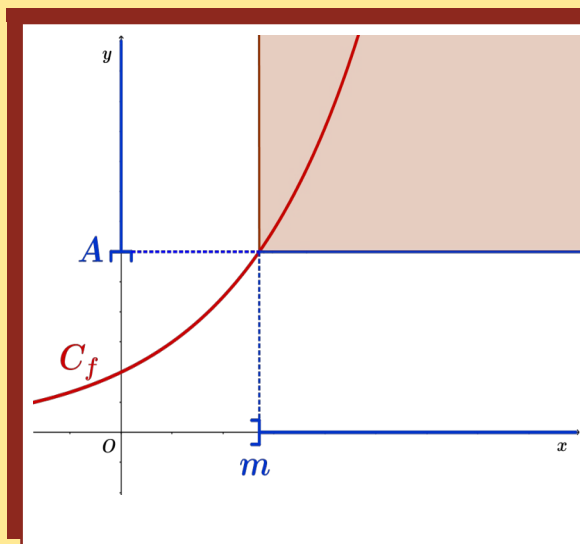
Autrement dit, pour tout réel A , il existe un réel m tel que si $x > m$, alors $f(x) > A$.

On note $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

- Une fonction f admet une limite infinie égale à $-\infty$ si tout intervalle ouvert de la forme $]-\infty; A[$ contient toutes les valeurs $f(x)$ pour x assez grand.

Autrement dit, pour tout réel A , il existe un réel m tel que si $x > m$, alors $f(x) < A$.

On note $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$.



On a pour tout entier naturel n non nul :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{x} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = +\infty \text{ si } n \text{ est pair}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = -\infty \text{ si } n \text{ est impair}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$$

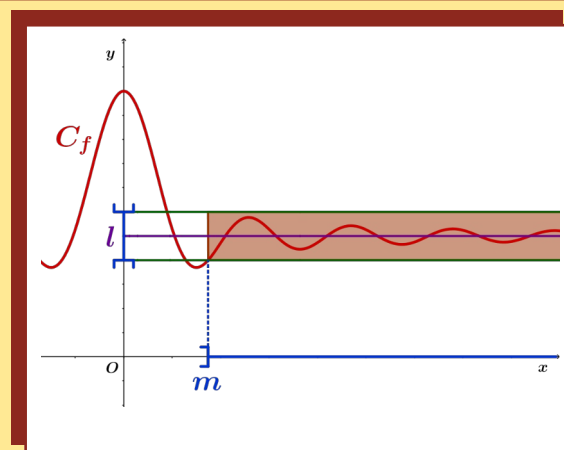
I.2 Limite finie

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et l un réel.

La fonction f admet une limite finie égale à l si tout intervalle ouvert contenant l contient toutes les valeurs $f(x)$ pour x assez grand.

Autrement dit, pour tout intervalle J contenant l , il existe un réel m tel que si $x > m$, alors $f(x) \in J$.

On note $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$.



Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$ ou $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l$, alors la droite d'équation $y = l$ est une **asymptote horizontale** à la courbe représentative de f en $+\infty$ ou $-\infty$.

On a pour tout réel k et tout entier naturel n non nul :

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} k = \lim_{x \rightarrow -\infty} k = k$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^n} = 0$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^n} = 0$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$

II. Limite en un point

II.1 Limite infinie

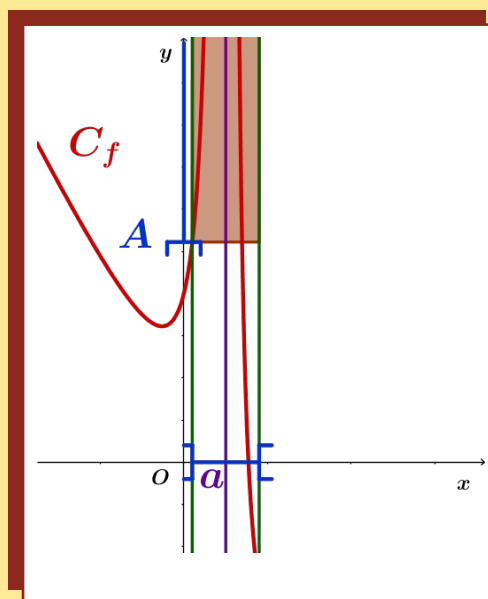
Soit f une fonction définie sur un intervalle I et a un réel étant une borne de I .

- La fonction f admet une limite infinie égale à $+\infty$ en a si tout intervalle ouvert de la forme $]A; +\infty[$ contient toutes les valeurs $f(x)$ pour x suffisamment proche de a .

Autrement dit, pour tout réel A , il existe un intervalle ouvert J contenant a tel que si $x \in J \cap I$, alors $f(x) > A$.
On note $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$.

- La fonction f admet une limite infinie égale à $-\infty$ en a si tout intervalle ouvert de la forme $]-\infty; A[$ contient toutes les valeurs $f(x)$ pour x suffisamment proche de a .

Autrement dit, pour tout réel A , il existe un intervalle ouvert J contenant a tel que si $x \in J \cap I$, alors $f(x) < A$.
On note $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$.



Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ ou $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$, alors la droite d'équation $x = a$ est une **asymptote verticale** à la courbe représentative de f en a .

II.2 Limite à gauche, limite à droite

- On dit que f admet une **limite à droite en a** lorsque f admet une limite quand x tend vers a avec $x > a$. On note cette limite $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x)$ ou $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$.
- On dit que f admet une **limite à gauche en a** lorsque f admet une limite quand x tend vers a avec $x < a$. On note cette limite $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} f(x)$ ou $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$.
- Soit a un réel et f une fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{a\}$.
La fonction f a une limite infinie en a si f possède une limite à gauche en a , une limite à droite en a (infinies) et que ces **limites sont égales**. On a alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$.

II.3 Limite finie

Une fonction f admet une limite finie l en a lorsque $f(x)$ est aussi proche de l que voulu pour x suffisamment proche de a . On note $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$.

III. Opérations sur les limites

III.1 Limites d'une somme de fonctions

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) =$	l	l	l	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim_{x \rightarrow a} g(x) =$	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) =$	$l + l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	FI

III.2 Limites d'un produit de fonctions

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) =$	l	$l > 0$	$l > 0$	$l < 0$	$l < 0$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	0
$\lim_{x \rightarrow a} g(x) =$	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \times g(x)) =$	ll'	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	FI

III.3 Limites d'un quotient de fonctions

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) =$	l	l	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$l > 0$ ou $+\infty$	$l < 0$ ou $-\infty$	$l > 0$ ou $+\infty$	$l < 0$ ou $-\infty$	0	$+\infty$ ou $-\infty$
$\lim_{x \rightarrow a} g(x) =$	l' et $l' \neq 0$	$+\infty$ ou $-\infty$	$l' > 0$	$l' < 0$	$l' > 0$	$l' < 0$	0 et $g(x) > 0$	0 et $g(x) > 0$	0 et $g(x) < 0$	0 et $g(x) < 0$	0	$+\infty$ ou $-\infty$
$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} =$	$\frac{l}{l'}$	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	FI	FI

IV. Théorèmes sur les limites

Limites en l'infini d'une fonction polynomiale

La limite en l'infini d'une fonction polynomiale est égale à la limite en l'infini de son terme de plus haut degré.

Limites en l'infini d'une fonction polynomiale

La limite en l'infini d'une fonction rationnelle est égale à la **limite en l'infini du quotient du terme de plus haut degré du numérateur par le terme de plus haut degré du dénominateur**.

Soit f une fonction définie sur un intervalle J et g une fonction définie sur un intervalle I tel que $g(x) \in J$ pour tout $x \in I$. On définit la composée de g par f comme la fonction définie sur I par : $(f \circ g)(x) = f(g(x))$.

On a le schéma suivant :

$$\begin{array}{ccccccc} f \circ g : & I & \rightarrow & J & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \xrightarrow{g} & g(x) & \xrightarrow{f} & f(g(x)) \end{array}$$

Limite d'une composée de fonctions (hors programme)

Soit les fonctions f et g et trois nombres a , b et c désignant un réel, $+\infty$ ou $-\infty$.

Si $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = b$ et $\lim_{X \rightarrow b} f(X) = c$, alors $\lim_{x \rightarrow a} f(g(x)) = c$.

V. Limites et comparaison

Soit f , g et h trois fonctions définies un intervalle ouvert I et l et a deux réels tel que a appartient à I ou a est une borne de I . Si pour tout $x \in I$, on a :

Théorème de comparaison

- $f(x) \geq g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = +\infty$, alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$.
- $f(x) \leq g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = -\infty$, alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$.

Théorème d'encadrement

$g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ et $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = l$, alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$.

Dérivation et convexité

I. Rappels sur la dérivation

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et a un nombre réel de I . Soit h un nombre réel non nul suffisamment petit.

On dit que f est dérivable en a si le taux d'accroissement $\tau(h) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ tend vers un réel quand h tend vers 0, qu'on note $f'(a)$ et qu'on appelle nombre dérivé de la fonction f en a . On écrit alors : $f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \tau(h)$, soit $f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$.

Soit f une fonction dérivable en a . L'équation réduite de la tangente T à la courbe C_f au point d'abscisse a est : $T: y = f'(a)(x-a) + f(a)$.

Soit une fonction f définie sur un intervalle I .

On dit que f est dérivable sur I si elle est dérivable en tout point x de I .

On appelle fonction dérivée de f et on note f' la fonction qui à chaque x associe $f'(x)$.

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I .

- Pour tout réel x de I , $f'(x) \geq 0$ si et seulement si f est croissante sur I .
- Pour tout réel x de I , $f'(x) \leq 0$ si et seulement si f est décroissante sur I .
- Pour tout réel x de I , $f'(x) = 0$ si et seulement si f est constante sur I .
- Si f' est strictement positive (respectivement strictement négative) sur I , sauf éventuellement pour un nombre fini de valeurs de x où f' s'annule, alors f est strictement croissante (respectivement strictement décroissante) sur I .

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et a un réel de I .

- Si f admet un extremum local en a , alors $f'(a) = 0$.
- Si $f'(a) = 0$ et si f' change de signe en a , alors la fonction f admet un extremum local en a .

II. Compléments sur la dérivation

II.1 Fonction composée

Soit u une fonction définie sur un intervalle I à valeur dans un intervalle J et v une fonction définie sur un intervalle J .

La composée de u par v , notée $v \circ u$, est la fonction définie sur I par $(v \circ u)(x) = v(u(x))$.

On a le schéma suivant :

$$\begin{array}{ccccccc} v \circ u : & I & \rightarrow & J & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \xrightarrow{u} & u(x) & \xrightarrow{v} & v(u(x)) \end{array}$$

Soit f une fonction définie sur un intervalle J et g une fonction définie sur un intervalle I par $g(x)=ax+b$, où a et b sont des réels tels que $g(x) \in J$ pour tout $x \in I$.
Alors la fonction $f \circ g$ est dérivable sur I , et on a pour tout réel $x \in I$, $(f \circ g)'(x) = a f'(ax+b)$.

II.2 Dérivée seconde

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I . On note f' sa fonction dérivée.
La fonction f est **deux fois dérivable** sur I si f' est elle-même dérivable sur I .
On note f'' la dérivée de f' . Elle est appelée **dérivée seconde** de f .

III. Tableaux des dérivées

DÉRIVÉES DES FONCTIONS USUELLES

Fonction	D_f	Fonction dérivée	$D_{f'}$
$f(x)=k$, $k \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x)=0$	$\mathbb{R}$
$f(x)=mx+p$	$\mathbb{R}$	$f'(x)=m$	$\mathbb{R}$
$f(x)=\frac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$	$f'(x)=-\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$
$f(x)=\sqrt{x}$	$[0; +\infty[$	$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0; +\infty[$
$f(x)=x^n$, $n \geq 1$	$\mathbb{R}$	$f'(x)=nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$f(x)=\frac{1}{x^n}$, $n \geq 1$	$\mathbb{R}^*$	$f'(x)=-\frac{n}{x^{n+1}}$	$\mathbb{R}^*$
$f(x)=e^x$	$\mathbb{R}$	$f'(x)=e^x$	$\mathbb{R}$

OPÉRATIONS SUR LES DÉRIVÉES

Fonction	Fonction dérivée
$u + v$	$u' + v'$
$\lambda u, \lambda \in \mathbb{R}$	$\lambda u'$
uv	$u'v + uv'$
$\frac{1}{v}, v(x) \neq 0$	$-\frac{v'}{v^2}$
$\frac{u}{v}, v(x) \neq 0$	$\frac{u'v - uv'}{v^2}$
$\sqrt{u}, u(x) \geq 0$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$
$u^n, n \geq 1$	$nu' u^{n-1}$
$\frac{1}{u^n}, n \geq 1 \text{ et } u(x) \neq 0$	$-n \frac{u'}{u^{n+1}}$
e^u	$u' e^u$
$f(ax+b), ax+b \in J \text{ pour tout } x \in I$	$af'(ax+b)$

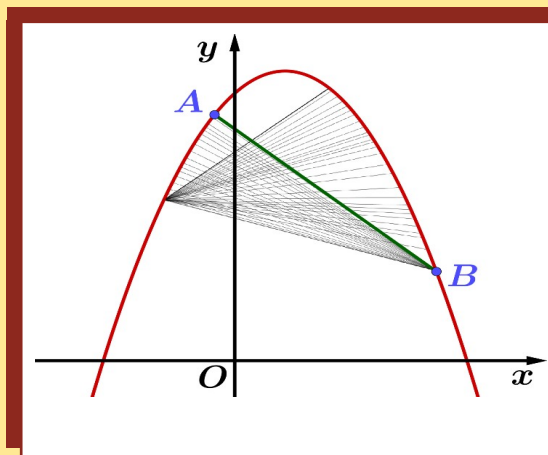
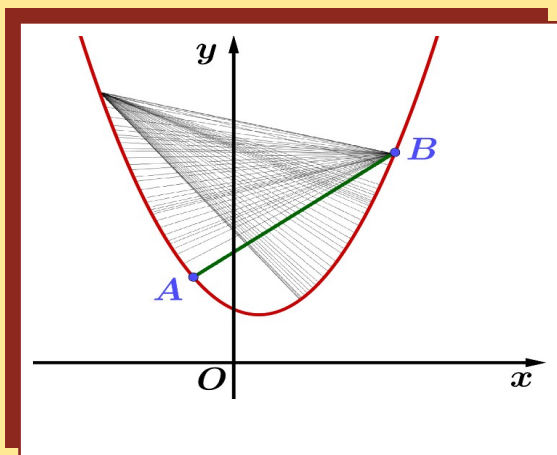
IV. Convexité

IV.1 Fonctions convexes et concaves

Soit f une fonction, C_f sa courbe représentative dans un repère et A et B deux points de C_f . Alors la droite (AB) est appelée **sécante** de C_f .

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et C_f sa courbe représentative dans un repère.

- f est **convexe** sur I si, pour tout $x \in I$, C_f est **en dessous de ses sécantes**.
- f est **concave** sur I si, pour tout $x \in I$, C_f est **au-dessus de ses sécantes**.



- Les fonctions carrée et exponentielle sont convexes sur $\mathbb{R}$.
- La fonction racine carrée est concave sur $[0; +\infty[$.
- La fonction inverse est concave sur $] -\infty; 0[$ et convexe sur $] 0; +\infty[$.
- La fonction cube est concave sur $] -\infty; 0]$ et convexe sur $[0; +\infty[$.

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I .

- Si f est une fonction convexe sur I , alors $-f$ est concave sur I .
- Si f est une fonction concave sur I , alors $-f$ est convexe sur I .

IV.2 Convexité des fonctions dérivables

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I .

- La fonction f est **convexe** sur I si et seulement si f' est **croissante** sur I .
- La fonction f est **concave** sur I si et seulement si f' est **décroissante** sur I .

Soit f une fonction définie et deux fois dérivable sur un intervalle I .

- La fonction f est **convexe** sur I si et seulement si f'' est **positive** sur I .
- La fonction f est **concave** sur I si et seulement si f'' est **négative** sur I .

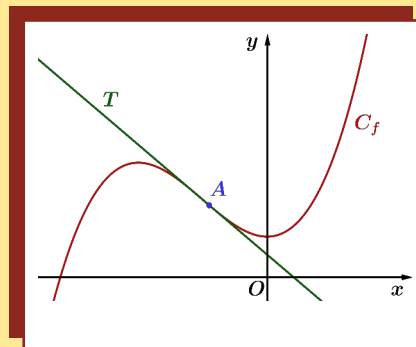
Soit f une fonction définie et deux fois dérivable sur I .

Si f'' est **positive** sur I , alors la courbe représentative de f est **au-dessus de chacune de ses tangentes**.

IV.3 Point d'inflexion

Soit f une fonction définie sur un intervalle I .

Un **point d'inflexion** est un point où la représentation graphique de f traverse sa tangente. Lorsque la courbe représentative d'une fonction admet un point d'inflexion, alors la fonction change de convexité.



Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I et a un réel de I .

f' change de sens de variations sur I en a si et seulement si sa courbe $C_{f'}$ admet un point d'inflexion au point d'abscisse a . Ce point a pour coordonnées $(a; f'(a))$.

Soit f une fonction définie et deux fois dérivable sur un intervalle I et a un réel de I .

La courbe représentative de f admet un point d'inflexion au point d'abscisse a si et seulement si f'' s'annule en changeant de signe en a . Ce point a pour coordonnées $(a; f(a))$.

Continuité

I. Notion de continuité

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

On dit que f est **continue** sur I si lorsque l'on trace la courbe de la fonction f , on ne lève pas le crayon. On dit qu'il n'y a pas de « saut » dans la représentation graphique de la fonction f .

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et a un réel de I .

- La fonction f est **continue en a** si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.
- La fonction f est **continue sur I** si elle est continue en tout point de I .

• Les fonctions polynômes, rationnelles, racine carrée, valeur absolue, exponentielle, sinus et cosinus sont continues sur tout intervalle sur lequel elles sont définies.

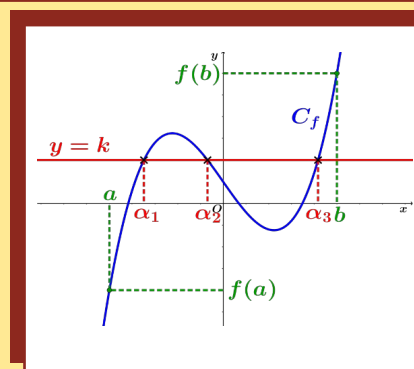
• La somme, le produit, le quotient et la composée de fonctions continues sont continues.

Une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ est continue sur I .

II. Théorème des valeurs intermédiaires

Théorème des valeurs intermédiaires (TVI)

Soit f une fonction définie et **continue** sur un intervalle $[a; b]$. Alors pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ **admet au moins une solution** α dans l'intervalle $[a; b]$.



Théorème de Bolzano

Soit f une fonction définie et **continue** sur un intervalle $[a; b]$.

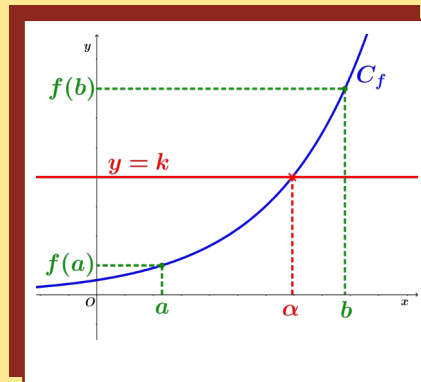
Si $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires, alors il existe **au moins un réel c compris entre a et b tel que $f(c) = 0$** .

III. Fonctions continues et strictement monotones

Théorème de la bijection

Soit f une fonction **continue et strictement monotone** sur un intervalle $[a; b]$. Alors :

- L'image de l'intervalle $[a; b]$ par la fonction f est l'intervalle $[f(a); f(b)]$.
- Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x)=k$ admet **une unique solution** α dans l'intervalle $[a; b]$.



Remarques

- Le terme « bijection » signifie qu'une image par la fonction f n'admet qu'un seul antécédent.
- On appelle aussi ce théorème le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires.
- Le corollaire s'applique aussi dans le cas d'un intervalle semi ouvert ($[a; b[$ ou $]a; b]$) ou d'un intervalle ouvert ($]a; b[$). On remplace alors le calcul de $f(a)$ (ou de $f(b)$) par le calcul de $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ (ou de $\lim_{x \rightarrow b} f(x)$), a et b pouvant être des réels, $-\infty$ ou $+\infty$.
- Ce corollaire permet d'affirmer l'existence d'une unique solution à une équation que l'on ne sait pas résoudre par le calcul. On cherche alors une valeur approchée de cette solution.

Soit f une fonction **continue et strictement monotone** sur un intervalle $[a; b]$.
Si $f(a) \times f(b) < 0$, alors l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution.

IV. Méthodes

Méthode d'encadrement d'une solution par balayage

Avec la calculatrice on construit un tableau de valeurs de $f(x)$ à partir de $x=a$ avec un pas de 1 (à l'aide des touches « 2nde » et « déf table »).

On peut en déduire l'appartenance de la solution à un intervalle d'amplitude 1. On note $[p; p+1]$ cet intervalle. Puis on fait un tableau de valeurs à partir de $x=p$ avec un pas de 0,1 et on réitère ce procédé en diminuant le pas à chaque étape, jusqu'à obtenir la précision souhaitée.

Méthode d'encadrement d'une solution par dichotomie

Le principe de la dichotomie est de déterminer successivement l'intervalle dans lequel se situe la solution, en divisant par 2 l'amplitude de l'intervalle à chaque étape. Ainsi, on calcule le centre m de l'intervalle et on teste si la solution se trouve dans $[a, m]$ ou $[m; b]$.

Si la solution est dans $[a, m]$ (respectivement $[m; b]$), on recommence ce procédé dans $[a, m]$ (respectivement $[m; b]$).

Méthode générale de résolution

En pratique, pour montrer que l'équation $f(x)=k$ admet une unique solution sur $[a;b]$, on peut procéder ainsi :

- On calcule la dérivée de f afin d'obtenir son signe ;
- On construit le tableau de variations de f sur l'intervalle $[a;b]$;
- Chaque « flèche oblique » traduisant la continuité et la stricte monotonie de la fonction sur un intervalle, on conclut sur l'unicité de la solution.

x	a	b
$f(x)$	$f(a)$	$f(b)$

Si l'on souhaite donner le signe de f , on détermine les éventuels intervalles où la fonction s'annule, c'est-à-dire les intervalles $[a;b]$ pour lesquels $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires.

Méthode : Solution d'une équation du type $f(x)=k$

Soit la fonction f définie sur $[2;3]$ par $f(x)=x^3-3x^2+2$.

On souhaite démontrer que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution dans $[2;3]$ et donner une valeur approchée à 10^{-2} près de cette solution.

- On calcule la dérivée de f :

Pour tout $x \in [2;3]$, $f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$.

- On étudie le signe de la dérivée de f :

Pour tout $x \in [2;3]$, $3x > 0$ et $x-2 \geq 0$, donc $f'(x) \geq 0$.

Donc f est strictement croissante sur l'intervalle $[2;3]$ (car elle ne s'annule qu'en un point isolé).

- On construit le tableau de variations de f :

x	2	3
$f'(x)$	+	
$f(x)$	-2	2

$$f(2)=2^3-3 \times 2^2+2=8-12+2=-2 \text{ et } f(3)=3^3-3 \times 3^2+2=27-27+2=2$$

- On utilise le TVI (ou le corollaire) :

La fonction f est continue et strictement croissante sur $[2;3]$. De plus, l'image de l'intervalle $[2;3]$ par la fonction f est l'intervalle $[-2;2]$.

Donc d'après le théorème de la bijection, l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α .

- On utilise la calculatrice pour déterminer un encadrement de la solution :

X	Y
2	-2
2,1	-1,969
2,2	-1,872
2,3	-1,703
2,4	-1,456
2,5	-1,125
2,6	-0,704
2,7	-0,187
2,8	0,432
2,9	1,159
3	2

La solution est comprise entre 2,7 et 2,8

X	Y
2,7	-0,187
2,71	-0,13
2,72	-0,072
2,73	-0,012
2,74	0,048
2,75	0,1094
2,76	0,1718
2,77	0,2352
2,78	0,2998
2,79	0,3653
2,8	0,432

La solution est comprise entre 2,73 et 2,74

Fonction exponentielle

I. Généralités sur la fonction exponentielle

La **fonction exponentielle** est l'unique fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$.
On note $\exp(x) = e^x$.

II. Propriétés algébriques

Pour tous réels x et y et tout entier relatif n , on a :

- | | | |
|---|---|--|
| <ul style="list-style-type: none"> • $e \approx 2,718$ • $e^x \times e^{-x} = 1$ • $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$ | <ul style="list-style-type: none"> • $e^0 = 1$ • $e^x \neq 0$ • $e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}$ | <ul style="list-style-type: none"> • $e^1 = e$ • $e^{x+y} = e^x \times e^y$ • $(e^x)^n = e^{nx}$ |
|---|---|--|

III. Étude de la fonction exponentielle

III.1 Signe

La fonction exponentielle est **strictement positive** sur $\mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x > 0$.

III.2 Variation

La fonction exponentielle est **strictement croissante** sur $\mathbb{R}$.

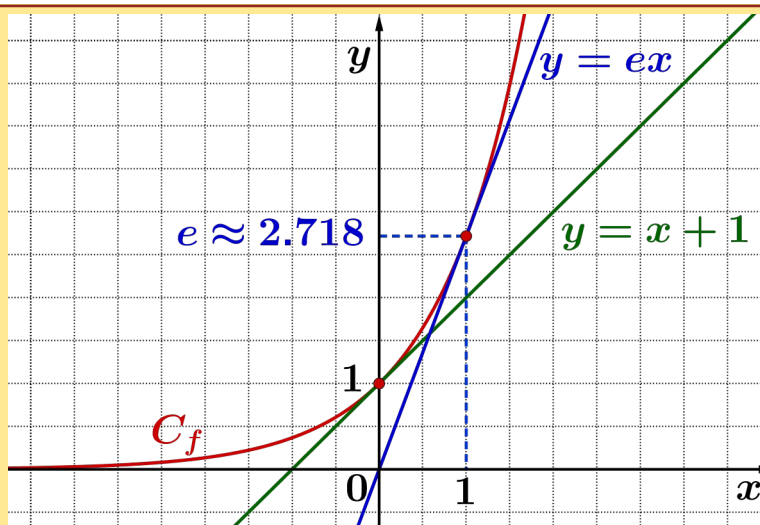
III.3 Limites (hors programme)

- | | |
|---|---|
| <ul style="list-style-type: none"> • $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$ | <ul style="list-style-type: none"> • $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ |
|---|---|

III.4 Tableau

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	+			
$f(x)$				

III.5 Représentation graphique



Équations de tangente :

- L'équation de la tangente au point d'abscisse 0 est $T_0 : y = x + 1$.
- L'équation de la tangente au point d'abscisse 1 est $T_1 : y = ex$.

IV. Lien avec les suites géométriques

Soit $a \in \mathbb{R}$. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier n par $u_n = e^{na}$.

La suite (u_n) est une suite géométrique de raison e^a . Alors :

- Si $a > 0$, la suite (u_n) est strictement croissante et $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{na} = +\infty$.
- Si $a < 0$, la suite (u_n) est strictement décroissante et $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{na} = 0$.

V. Équations de inéquations

Pour tous réels x et y , on a :

- Si $x \leq 0$, alors $0 < e^x \leq 1$
- Si $x \geq 0$, alors $1 \leq e^x$
- $e^x = e^y \Leftrightarrow x = y$
- $e^x < e^y \Leftrightarrow x < y$

VI. Les fonctions exponentielles de la forme e^u

Soit u une fonction définie et dérivable sur un intervalle I .

- La fonction e^u définie par $x \mapsto e^{u(x)}$ est appelée exponentielle de u .
- La fonction $x \mapsto e^{u(x)}$ est **strictement positive** sur son ensemble de définition.

Soit f une fonction définie par $f(x) = e^{u(x)}$ où u est une fonction dérivable sur un intervalle I .

- La fonction f est dérivable sur I et on a pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = u'(x)e^{u(x)}$.
- La fonction f a le même sens de variation que la fonction u .

Fonction logarithme népérien

I. Généralités sur la fonction logarithme népérien

La **fonction logarithme népérien** est la fonction **réciproque** de la fonction exponentielle. Elle est définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ et est noté $\ln$. Pour tout $x \in \mathbb{R}^{+*}$, $f(x) = \ln(x)$.

Relation entre les fonctions $\exp$ et $\ln$

Pour tout y réel strictement positif et x réel, on a :

- $y = e^x \Leftrightarrow \ln(y) = x$
- $\ln(e^x) = x$ et $e^{\ln(y)} = y$

II. Propriétés algébriques

Pour tous réels strictement positifs x et y et tout entier relatif n , on a :

- $\ln(1) = 0$
- $\ln(e) = 1$
- $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$
- $\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x)$
- $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$
- $\ln(x^n) = n \ln(x)$
- $\ln(\sqrt{x}) = \frac{1}{2} \ln(x)$

III. Étude de la fonction exponentielle

III.1 Dérivée

La fonction $\ln$ est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et, pour tout réel $x > 0$, $\ln'(x) = \frac{1}{x}$.

III.2 Signe

- La fonction logarithme népérien est **négative** sur $]0; 1]$. Pour tout $x \in]0; 1]$, $\ln(x) \leq 0$.
- La fonction logarithme népérien est **positive** sur $[1; +\infty[$. Pour tout $x \in [1; +\infty[$, $\ln(x) \geq 0$.

III.3 Variation

La fonction $\ln$ est **strictement croissante** sur $\mathbb{R}^{+*}$.

III.4 Limites

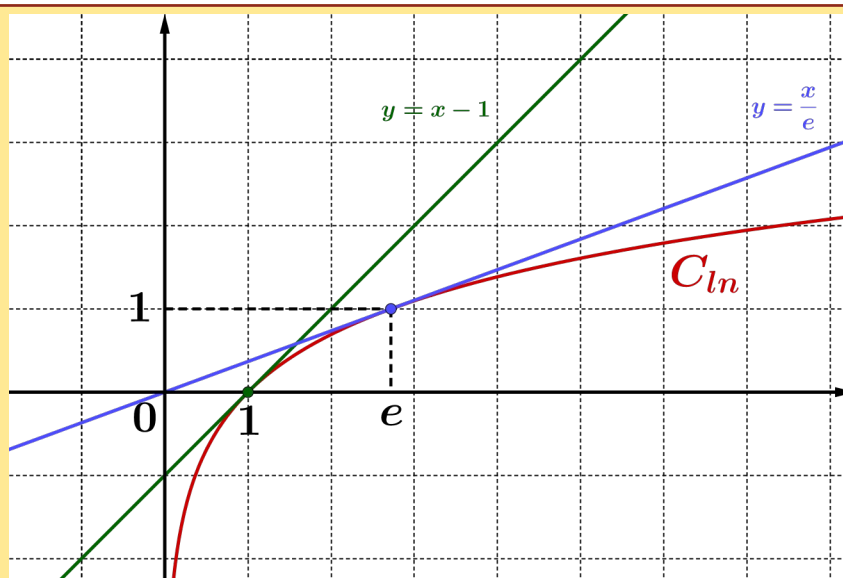
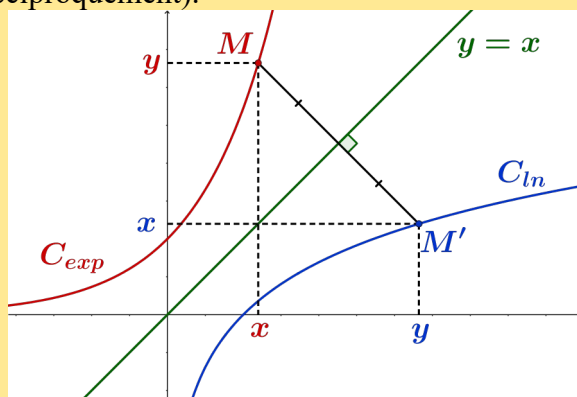
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty$

III.5 Tableau

x	0	1	e	$+\infty$
$f'(x)$	$ $		+	
$f(x)$	$-\infty$	0	1	$+\infty$

III.6 Représentation graphique

Dans un repère orthonormé, la courbe représentative de la fonction logarithme népérien peut être obtenue comme la courbe image de la représentation de la fonction exponentielle par la symétrie d'axe la droite $y=x$ (et réciproquement).



Équations de tangente :

- L'équation de la tangente au point d'abscisse 1 est $T_1: y=x-1$.
- L'équation de la tangente au point d'abscisse e est $T_e: y=\frac{x}{e}$.

IV. Équations de inéquations

Pour tous réels strictement positifs x et y , on a :

- $\ln(x) = \ln(y) \Leftrightarrow x = y$
- $\ln(x) < \ln(y) \Leftrightarrow 0 < x < y$
- $\ln(x) > \ln(y) \Leftrightarrow x > y > 0$

Pour tout réel x strictement positif et tout réel y , on a :

- $\ln(x) = y \Leftrightarrow x = e^y$
- $\ln(x) < y \Leftrightarrow 0 < x < e^y$
- $\ln(x) > y \Leftrightarrow x > e^y$

Attention !

Pour les équations et les inéquations avec les logarithmes, ne pas oublier de commencer par définir les conditions d'existence (les expressions contenues dans un logarithme doivent être positives).

V. Fonctions composées $x \rightarrow \ln(u(x))$

Soit u une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle I .

On considère la fonction composée f définie par $f = \ln \circ u$.

Pour tout $x \in I$, $f(x) = \ln(u(x))$. On la note aussi $f = \ln(u)$.

Soit f la fonction définie par $f = \ln(u)$ où u est une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle I . La fonction f est dérivable sur I et pour tout réel $x \in I$, $f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$.

Soit f une fonction définie par $f(x) = \ln(u(x))$ où u est une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle I . Alors la fonction f a le même sens de variation que la fonction u .

VI. Fonction logarithme décimal

La fonction **logarithme décimal** est la fonction, notée $\log$, définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par $\log(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(10)}$.

Remarques

- $\ln(10) > 0$, donc le nombre $k = \frac{1}{\ln(10)}$ est strictement positif. Donc, de $\log(x) = k \ln(x)$, on en déduit que la fonction $\log$ a le même sens de variation que la fonction $\ln$.
- Toutes les propriétés analytiques de la fonction $\ln$ s'appliquent à la fonction $\log$.
- Les fonctions $\ln$ et $\log$ sont intégrées de manière distincte dans les calculatrices.

Utilisations du logarithme décimal

- En chimie, on exprime le caractère acido-basique d'une solution au moyen d'un indicateur noté pH . On a $pH = -\log [H_3O^+]$ où $[H_3O^+]$ est exprimée en $mol.L^{-1}$.
- Sur l'échelle de Richter, la magnitude d'un tremblement de terre est donnée par la formule $R = \log \left(\frac{I}{I_0} \right)$, I étant l'intensité du tremblement de terre et I_0 une intensité minimale.
- La puissance d'un son est donnée en décibels par $10 \log \left(\frac{I}{I_0} \right)$, I_0 étant l'intensité la plus faible perceptible par l'oreille humaine.
- D'après la loi de Benford, lorsqu'on tire au hasard un nombre dans une série de nombres quelconques, la probabilité que le premier chiffre significatif soit le chiffre d est environ égale à $\log \left(1 + \frac{1}{d} \right)$. Ainsi, la probabilité que le premier chiffre significatif soit 1 est environ égale à $\log(2)$. Cette loi est utilisée en France pour détecter les fraudes fiscales.

Primitives et équations différentielles

I. Équation différentielle $y' = f$ et primitives

I.1 Équation différentielle $y' = f$

Soit f une fonction continue sur un intervalle I .

- On dit qu'une fonction F est **solution de l'équation différentielle $y' = f$** sur I lorsque F est dérivable sur I et $F' = f$.
- Résoudre sur I une équation différentielle $y' = f$, c'est trouver toutes les fonctions F dérivables sur I telles que $F' = f$.

Remarques

- La dérivée est associée à un taux de variation, quotient des variations de y sur les variations de x , d'où le terme différentiel.
- On peut être amené à utiliser l'écriture différentielle $y' = \frac{dy}{dx}$ ou $y' = \frac{dy}{dt}$.

I.2 Ensemble des primitives d'une fonction continue

Soit f une fonction continue définie sur un intervalle I .

On appelle **primitive** de f sur I toute fonction F dérivable sur l'intervalle I telle que :

$$\text{Pour tout réel } x \in I, F'(x) = f(x)$$

Remarques

- D'après la définition, une primitive est toujours dérivable et donc continue.
- F est une primitive de f sur I si et seulement si F est solution de l'équation différentielle $y' = f$. Résoudre sur I l'équation $y' = f$ revient donc à déterminer toutes les primitives de f sur I .

Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I qui admet une primitive F sur I .

Alors la fonction f **admet une infinité de primitives** sur I et toute primitive G de f sur I est définie par : $G(x) = F(x) + k$, où $k \in \mathbb{R}$.

Soit f une fonction continue admettant une primitive sur un intervalle I . Soit $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}$. Il existe une unique primitive F de f sur I telle que $F(x_0) = y_0$.

Autrement dit, l'équation différentielle $y' = f$ admet une unique solution F telle que $F(x_0) = y_0$.

Remarques

- La condition $F(x_0) = y_0$ est parfois appelée **condition initiale** en référence à certaines situations rencontrées en physique.
- En cinétique (étude des mouvements), l'utilisation des conditions initiales est primordiale pour obtenir les équations du mouvement et par la suite la loi horaire.

Toute fonction continue sur un intervalle I admet des primitives sur I .

II. Primitives et opérations

II.1 Primitives des fonctions usuelles

Fonction f	Primitive F	Intervalle I
$f(x)=k$	$F(x)=kx$	$\mathbb{R}$
$f(x)=x$	$F(x)=\frac{x^2}{2}$	$\mathbb{R}$
$f(x)=x^n, n \in \mathbb{N}$	$F(x)=\frac{x^{n+1}}{n+1}$	$\mathbb{R}$
$f(x)=\frac{1}{x}$	$F(x)=\ln(x)$	$]0; +\infty[$
$f(x)=\frac{1}{x^2}$	$F(x)=-\frac{1}{x}$	$] -\infty; 0[$ ou $]0; +\infty[$
$f(x)=\frac{1}{x^n}, n \geq 2$	$F(x)=-\frac{1}{(n-1)x^{n-1}}$	$] -\infty; 0[$ ou $]0; +\infty[$
$f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$	$F(x)=2\sqrt{x}$	$]0; +\infty[$
$f(x)=e^x$	$F(x)=e^x$	$\mathbb{R}$

II.2 Primitives de $f+g$ et de kf avec k un réel

- Si F et G sont des primitives respectives des fonctions continues f et g sur un intervalle I , alors $F+G$ est une primitive de $f+g$ sur I .
- Si F est une primitive de la fonction continue f sur un intervalle I et si k est un réel, alors kF est une primitive de kf sur I .

II.3 Primitives des fonctions composées (hors programme)

Soit u une fonction définie sur un intervalle I et v une fonction définie sur un intervalle J telles que $u(x) \in J$ pour tout $x \in I$.
La fonction composée $v \circ u$ est une primitive sur I de $u'(v' \circ u)$.

Les dérivées de certains types de fonctions se déduisent des résultats connus sur les dérivées. On obtient donc le tableau des fonctions composées suivant, où u est une fonction dérivable sur un intervalle I de dérivée continue sur I .

Fonction f	Primitive F	Conditions
$u' u^n, n \in \mathbb{N}$	$\frac{u^{n+1}}{n+1}$	
$\frac{u'}{u^n}, n \geq 2$	$-\frac{1}{(n-1)u^{n-1}}$	Pour tout $x \in I, u(x) \neq 0$
$\frac{u'}{u} = u' u^{-1}$	$\ln(u)$	Pour tout $x \in I, u(x) \neq 0$
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}$	Pour tout $x \in I, u(x) > 0$
$u' e^u$	e^u	

Remarques

- On pourra vérifier le résultat en dérivant la primitive obtenue et ainsi voir si l'on retombe sur f .
- Trouver une primitive n'est pas toujours chose facile. Des manipulations plus sophistiquées (par exemple pour les fonctions rationnelles ou les fonctions possédant des radicaux) sont parfois nécessaires pour déterminer une primitive. Parfois la primitive ne correspond à aucune fonction connue, elle est alors uniquement définie par une intégrale (par exemple une primitive de e^{-x^2}). Contrairement à la dérivation qui est toujours possible, la recherche de primitive s'avère donc parfois impossible.

Attention !

Bien adapter le coefficient lorsque cela est nécessaire pour obtenir une forme connue.

III. Équations différentielles**III.1 Définition**

- Une **équation différentielle** est une égalité reliant une fonction dérivable et ses dérivées successives, et éventuellement d'autres fonctions.
- Une **solution d'une équation différentielle** est une fonction dérivable qui vérifie cette égalité.

Remarques

- Résoudre une équation différentielle, c'est trouver toutes les fonctions solutions vérifiant l'égalité.
- Une équation différentielle met en jeu une fonction et ses dérivées successives. Cependant, nous nous limiterons essentiellement dans ce chapitre à l'étude des **équations différentielles du premier ordre**, c'est-à-dire les équations différentielles reliant une fonction dérivable à sa dérivée première.
- De même que pour une dérivée première, on peut être amené à utiliser l'écriture différentielle

$$y'' = \frac{d^2 y}{dx^2} \text{ ou } y'' = \frac{d^2 y}{dt^2}.$$

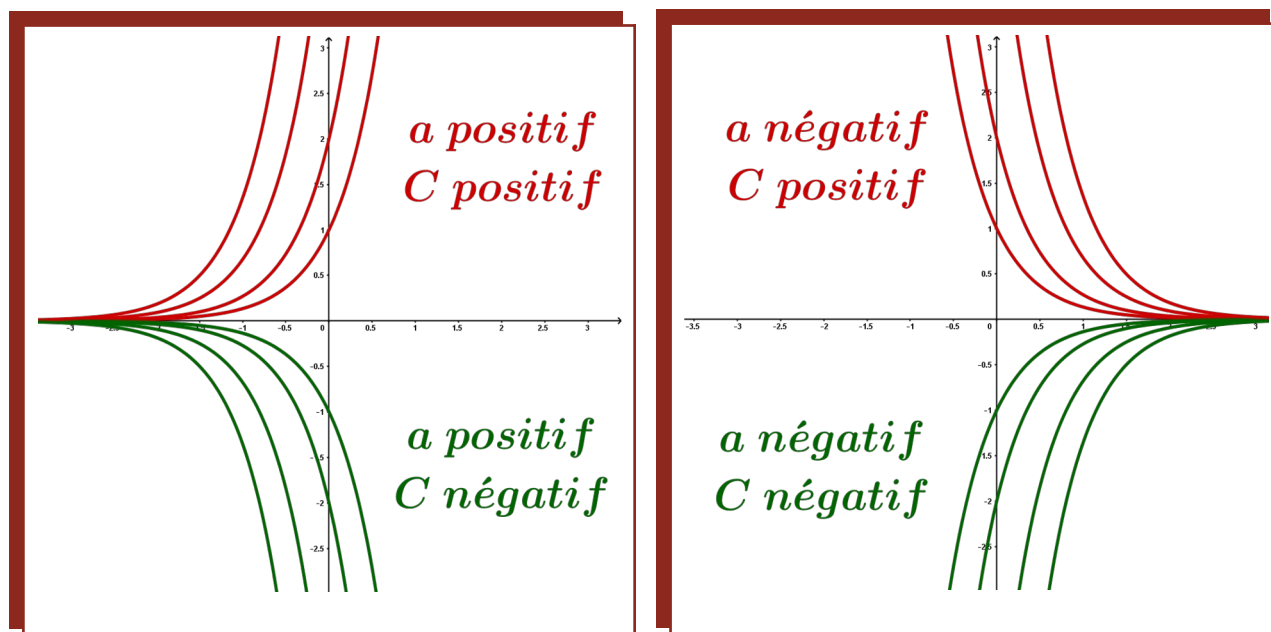
III.2 Équation différentielle $y' = ay$

Soit a un réel. L'équation différentielle $(E_0): y' = ay$ est appelée **équation différentielle linéaire homogène du premier ordre à coefficients constants**.

Les solutions de l'équation différentielle $(E_0): y' = ay$ sont les fonctions y définies sur $\mathbb{R}$ de la forme $y(x) = Ce^{ax}$, où C est un réel.

Allures des courbes

Les courbes des solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' = ay$ ont les allures suivantes :



Soit $(E_0): y' = ay$ une **équation différentielle linéaire homogène du premier ordre à coefficients constants** et $(x_0; y_0) \in \mathbb{R}^2$.

Il existe une unique solution y_0 de (E_0) telle que $y(x_0) = y_0$.

Soit y_1 et y_2 deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, $(E_0): y' = ay$ une équation différentielle et k un réel. Si les fonctions y_1 et y_2 sont solutions de l'équation différentielle (E_0) , alors $y_1 + y_2$ et ky_1 sont aussi solutions de (E_0) .

III.3 Équation différentielle $y' = ay + b$ avec $a \neq 0$

Soit a et b des réels tels que $a \neq 0$. L'équation différentielle $(E): y' = ay + b$ est appelée **équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants avec second membre**.

Les solutions de l'équation différentielle (E): $y' = ay + b$ sont les fonctions y définies sur $\mathbb{R}$ de la forme $y(x) = Ce^{ax} - \frac{b}{a}$, où C est un réel.

III.4 Équation différentielle $y' = ay + f$ avec $a \neq 0$

Soit a un réel non nul et f une fonction continue. L'équation différentielle (E): $y' = ay + f$ est appelée **équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants avec second membre**.

Soit ϕ une solution particulière de l'équation différentielle (E): $y' = ay + f$.
Les solutions de l'équation différentielle (E) sont les fonctions y définies sur $\mathbb{R}$ de la forme $y(x) = Ce^{ax} + \phi(x)$, où C est un réel.

Soit ϕ une solution particulière de l'équation différentielle (E): $y' = ay + f$.
Alors y est une solution de (E) si et seulement si $y - \phi$ est une solution de l'équation homogène associée $(E_0): y' = ay$.

Méthode : Résolution de l'équation différentielle (E): $y' = ay + f$

- On détermine une solution particulière ϕ de l'équation (E).
- On écrit l'équation homogène associée $(E_0): y' = ay$ et ses solutions $x \mapsto Ce^{ax}$ où $C \in \mathbb{R}$.
- On détermine toutes les solutions de l'équation (E) en effectuant la somme des solutions de (E_0) et de ϕ .

Calcul intégral

I. Intégrale d'une fonction continue positive

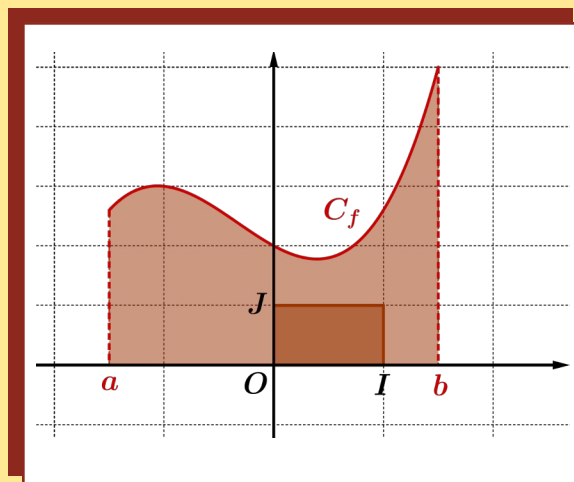
Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a; b]$ (avec $a \leq b$) et C_f sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O; I, J)$. On appelle :

- **unité d'aire** l'aire du rectangle construit à l'aide des points O , I et J . On la note **u.a.** .

- **Domaine sous la courbe** le domaine délimité par la courbe C_f , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=a$ et $x=b$. Ce domaine est l'ensemble des points $M(x; y)$ tels que :
 $a \leq x \leq b$ et $0 \leq y \leq f(x)$

- **Intégrale de f sur $[a; b]$** la mesure de l'aire, en unité d'aire, du domaine situé sous la courbe.

On la note $\int_a^b f(x) dx$.



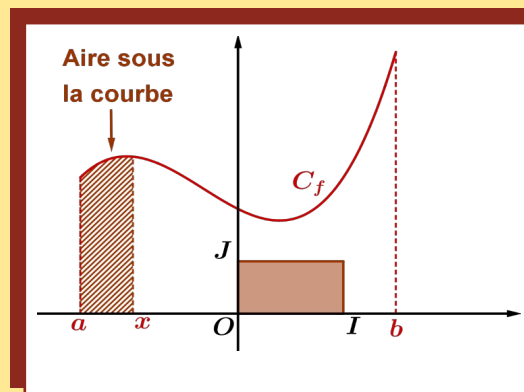
II. Primitive d'une fonction continue

Théorème fondamental

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a; b]$. La fonction F définie par

$F(x) = \int_a^x f(t) dt$ est dérivable sur $[a; b]$ et a pour dérivée f . Ainsi $F' = f$.

La fonction F est la primitive de f sur $[a; b]$ qui s'annule en a .



Soit f une fonction continue définie sur un intervalle I .

On appelle **primitive** de f sur I toute fonction F dérivable sur l'intervalle I telle que :

$$\text{Pour tout réel } x \in I, F'(x) = f(x)$$

Toute fonction continue sur un intervalle I admet des primitives sur I .

III. Intégrale d'une fonction continue quelconque

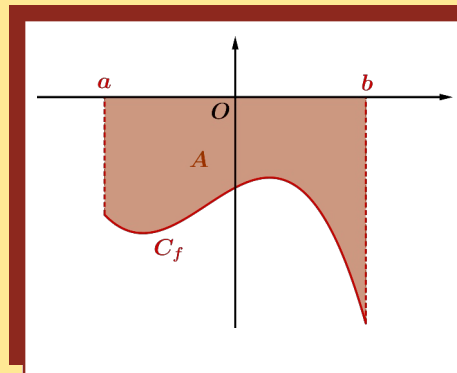
Soit f une fonction continue sur un intervalle I , F une primitive de f et a et b deux réels de I . L'intégrale de f entre a et b est définie par :

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Soit f une fonction continue et négative sur un intervalle I et a et b deux réels de I .

On appelle intégrale de f sur $[a; b]$, et on note $\int_a^b f(x) dx$, l'opposé de l'aire A , en unités d'aire, délimitée par la courbe C_f , l'axe des abscisses et les droites d'équation $x=a$ et $x=b$.

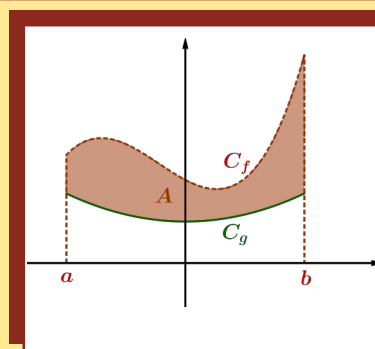
Ainsi $A = -\int_a^b f(x) dx$.



Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[a; b]$ telles que $f(x) \geq g(x)$.

On appelle A l'aire comprise entre les deux courbes et les droites d'équation $x=a$ et $x=b$.

Ainsi $A = \int_a^b (f - g)(x) dx$.



IV. Propriétés de l'intégrale

Soit f et g des fonctions continues sur un intervalle I et α et β des réels.

• Pour tout $a \in I$, $\int_a^a f(x) dx = 0$.

• Pour tout $(a; b) \in I^2$, $\int_b^a f(x) dx = -\int_a^b f(x) dx$.

• **Relation de Chasles** : Pour tout $(a; b; c) \in I^3$, $\int_a^c f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx$.

• **Linéarité** : Pour tout $(a; b) \in I^2$, $\int_a^b (\alpha f + \beta g)(x) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx$.

Parité

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et a un réel.

• Si f est paire, alors $\int_{-a}^0 f(x) dx = \int_0^a f(x) dx$.

• Si f est impaire, alors $\int_{-a}^0 f(x) dx = -\int_0^a f(x) dx$.

Remarques

- Si une fonction est paire, alors d'après la relation de Chasles, on a :

$$\int_{-a}^a f(x) dx = \int_{-a}^0 f(x) dx + \int_0^a f(x) dx = \int_0^a f(x) dx + \int_0^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$$

- Si une fonction est impaire, alors d'après la relation de Chasles, on a :

$$\int_{-a}^a f(x) dx = \int_{-a}^0 f(x) dx + \int_0^a f(x) dx = -\int_0^a f(x) dx + \int_0^a f(x) dx = 0$$

Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle I , a et b des réels de I tels que $a \leq b$.

Positivité

- Si f est positive sur $[a; b]$, alors $\int_a^b f(x) dx \geq 0$.

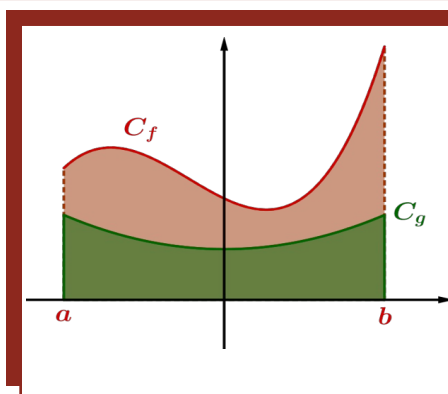
- Si f est négative sur $[a; b]$, alors $\int_a^b f(x) dx \leq 0$.

Inégalité

Si pour tout $x \in [a; b]$, $f(x) \geq g(x)$, alors $\int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx$.

Remarque

Dans le cas où f et g sont positives sur $[a; b]$, si $f(x) \geq g(x)$ alors l'aire sous la courbe représentative de f est inférieure ou égale à l'aire sous la courbe représentative de g .

**Valeur moyenne**

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et a et b deux réels de I tels que $a < b$.

La **valeur moyenne** de la fonction f sur $[a; b]$ est le réel μ défini par :

$$\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

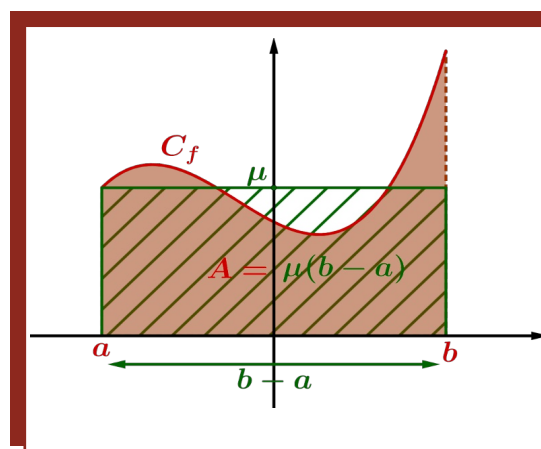
Interprétation graphique

La valeur moyenne μ est telle que :

$$\int_a^b f(x) dx = \mu(b-a)$$

Ainsi, lorsque f est continue et positive sur un intervalle $[a; b]$, la valeur moyenne μ peut-être interprété comme la hauteur du rectangle de base $b-a$ et ayant la même aire que le domaine A sous la courbe C_f .

Ainsi $A = \int_a^b f(x) dx = \mu(b-a)$.



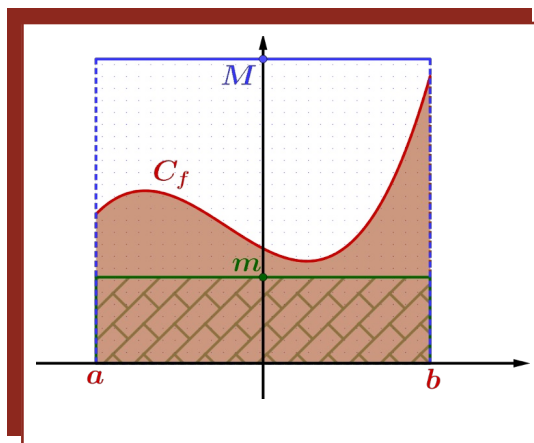
Inégalité de la moyenne

Soit f une fonction continue sur un intervalle I , a et b deux réels de I tels que $a \leq b$.
 Soit deux réels m et M tels que pour tout $x \in [a; b]$, $m \leq f(x) \leq M$. Alors :

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$$

Interprétation graphique

Si la fonction f est bornée sur $[a; b]$ par deux constantes m et M positives, alors l'inégalité de la moyenne traduit le fait que l'aire sous la courbe C_f sur $[a; b]$ est comprise entre les aires des rectangles construits sur $[a; b]$ et de hauteurs respectives m et M .



Probabilités conditionnelles et indépendance

I. Généralités

- Une **expérience aléatoire** est une expérience dont le résultat dépend du hasard. Chacun des résultats possibles s'appelle **éventualité** ou **issue**. L'ensemble Ω (ou E) de tous les résultats possibles d'une expérience aléatoire s'appelle l'**univers** de l'expérience.
- Un **événement** A est une partie de l'univers Ω (un événement peut donc être constitué de zéro, une ou plusieurs issues de Ω).
- Un **événement élémentaire** est une partie de Ω qui ne contient qu'une seule issue.
- L'**événement contraire** de A , noté $\bar{A}$, est la partie constituée de toutes les issues de Ω qui ne sont pas dans A .

- $P(\emptyset)=0$ et $P(\Omega)=1$.
- La probabilité d'un événement A , notée $P(A)$, est la **somme des probabilités des événements élémentaires inclus dans A** .
- Pour tout événement A , on a $0 \leq P(A) \leq 1$.
- La somme des probabilités des événements élémentaires vaut 1.
- La probabilité de l'événement contraire d'un événement A est : $P(\bar{A})=1-P(A)$.

- Si $\Omega=\{e_1; e_2; \dots; e_n\}$ et si à chaque issue e_i on associe un nombre $P(e_i)$ tel que $0 \leq P(e_i) \leq 1$ et $P(e_1)+P(e_2)+\dots+P(e_n)=1$, on dit que l'on a défini une **loi de probabilité** sur Ω .
- Lorsque tous les événements élémentaires d'une expérience aléatoire ont la même probabilité, on dit alors qu'ils sont **équiprobables**. On parle d'**expérience équiprobable** ou de **loi équirépartie**.

- L'événement « **A et B** », noté $A \cap B$, s'appelle l'**intersection** des événements A et B . Il est réalisé lorsque **les deux événements sont réalisés simultanément**.
- L'événement « **A ou B** », noté $A \cup B$, s'appelle la **réunion** des événements A et B . Il est réalisé lorsqu'**au moins l'un des deux événements est réalisé**.
- Deux événements A et B sont dits **incompatibles** si $A \cap B = \emptyset$.

Soit A un événement d'un univers Ω . Pour une loi équirépartie, on a :

$$P(A) = \frac{\text{nombre d'éléments de } A}{\text{nombre d'éléments de } \Omega} = \frac{\text{nombre de cas favorables à } A}{\text{nombre de cas possibles}}$$

Soit A et B deux événements d'un univers Ω .

- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.
- Si A et B sont **incompatibles**, $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

II. Probabilités conditionnelles

Soit A et B deux événements d'un univers Ω avec $P(A) \neq 0$.

La **probabilité conditionnelle** que l'événement B se réalise sachant que l'événement A est

réalisé est notée $P_A(B)$, et elle est définie par : $P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$.

La probabilité $P_A(B)$ vérifie bien $0 \leq P_A(B) \leq 1$ et $P_A(B) + P_A(\bar{B}) = 1$.

Soit A et B deux événements d'un univers Ω avec $P(A) \neq 0$ et $P(B) \neq 0$. Alors :

$$P(A) \times P_A(B) = P(B) \times P_B(A)$$

Utilisation de tableaux

Les tableaux à double entrées permettent une présentation claire de certaines expériences aléatoires et facilitent le calcul des probabilités conditionnelles.

	B	$\bar{B}$	Total
A	$P(A \cap B)$	$P(A \cap \bar{B})$	$P(A)$
$\bar{A}$	$P(\bar{A} \cap B)$	$P(\bar{A} \cap \bar{B})$	$P(\bar{A})$
Total	$P(B)$	$P(\bar{B})$	1

- $P(A \cap B)$ se lit à l'intersection de la ligne A et de la colonne B .
- $P(A)$ (respectivement $P(B)$) se lit sur la dernière colonne (respectivement la dernière ligne).
- $P_A(B)$ (ou $P_B(A)$) s'obtient en calculant le quotient des deux probabilités adéquates :

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \quad \text{et} \quad P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Exemple

Un club sportif rassemble 180 membres répartis en juniors et seniors. On compte 135 seniors dont 81 hommes. Il y a 27 garçons parmi les seniors.

En choisissant une femme au hasard, calculer la probabilité d'avoir une juniore.

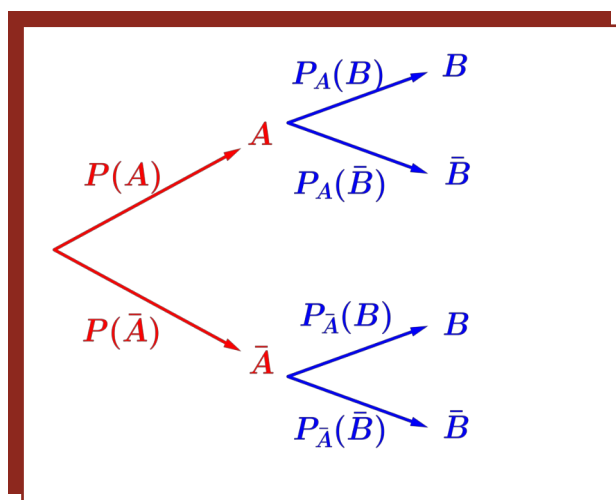
	J	S	Total
H	$\frac{27}{180} = 0,15$	$\frac{81}{180} = 0,45$	$0,15 + 0,45 = 0,6$
F	0,1	0,3	0,4
Total	0,25	$\frac{135}{180} = 0,75$	1

Ainsi $P_F(J) = \frac{P(F \cap J)}{P(F)} = \frac{0,1}{0,4} = 0,25$.

III. Arbre pondéré et calculs de probabilité

- La probabilité de l'événement correspondant à un chemin est obtenue en multipliant les probabilités portées par ses branches.
- La somme des probabilités sur les branches partant d'un même nœud est égale à 1.
- La probabilité de l'événement correspondant à plusieurs chemins est obtenue en additionnant les probabilités de chacun de ces chemins (**formule des probabilités totales**).

Le cas le plus fréquent correspond à la partition la plus simple (A et $\bar{A}$). Si on connaît les probabilités de B et $\bar{B}$ par l'intermédiaire de A et $\bar{A}$, on a l'arbre suivant :



- Le produit des probabilités inscrites sur chaque branche d'un chemin donne la probabilité de l'intersection des événements placés sur ce chemin.

$$P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$$

- La somme des probabilités inscrites sur les branches issues d'un même nœud est égale à 1 (loi des nœuds).

$$P_A(B) + P_A(\bar{B}) = 1$$

- La probabilité d'un événement E est la somme des probabilités des chemins qui aboutissent à E .

$$\begin{aligned} P(B) &= P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B) \\ &= P(A) \times P_A(B) + P(\bar{A}) \times P_{\bar{A}}(B) \end{aligned}$$

Exemple

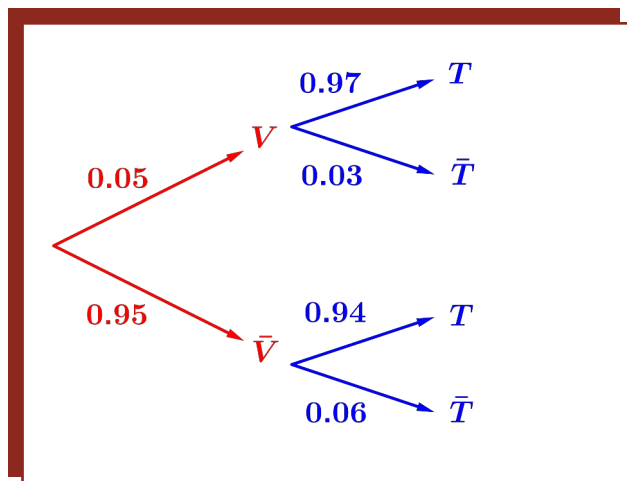
Dans un pays, il y a 5% de la population contaminée par le coronavirus. On dispose d'un test de dépistage de ce virus qui a les propriétés suivantes

- La probabilité qu'une personne contaminée ait un test positif est de 0,97 (sensibilité du test).
- La probabilité qu'une personne non contaminée ait un test négatif est de 0,94 (spécificité du test). On fait passer un test à une personne choisie au hasard dans cette population.

On note les événements suivants :

V : « la personne est contaminée par le virus »

T : « le test est positif »



- La probabilité que le test soit positif est :

$$\begin{aligned} P(T) &= P(V \cap T) + P(\bar{V} \cap T) \\ &= 0,05 \times 0,97 + 0,95 \times 0,94 \\ &= 0,9415 \end{aligned}$$

- La probabilité que la personne soit contaminée sachant que le test est positif est :

$$\begin{aligned} P_T(V) &= \frac{P(V \cap T)}{P(T)} \\ &= \frac{0,05 \times 0,97}{0,9415} \\ &= 0,051514 \end{aligned}$$

IV. Formule des probabilités totales

Soit n (où $n \geq 2$) événements de probabilités non nulles $A_1, A_2, \dots, A_n$ des sous-ensembles d'un univers Ω . Ces événements forment une **partition de l'univers Ω** (ou un **système complet d'événements**) si :

- Ils sont **disjoints** (ou **incompatibles**) deux à deux, c'est-à-dire que $A_i \cap A_j = \emptyset$ si $i \neq j$;
- $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = \Omega$.

Soit $A_1, A_2, \dots, A_n$ des événements formant une partition de Ω .

Pour tout événement B de Ω , on a :

$$P(B) = P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + \dots + P(A_n \cap B)$$

Ou, de manière équivalente :

$$P(B) = P(A_1) \times P_{A_1}(B) + P(A_2) \times P_{A_2}(B) + \dots + P(A_n) \times P_{A_n}(B)$$

On appelle cette égalité la **formule des probabilités totales**.

V. Indépendance

- Soit A et B deux événements d'un univers Ω .

On dit que A et B sont **indépendants** lorsque $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

- Soit A et B deux événements d'un univers Ω tels que $P(A) \neq 0$.

Les événements A et B sont **indépendants** si et seulement si $P_A(B) = P(B)$.

Soit A et B deux événements d'un univers Ω .

Si A et B sont indépendants, alors il en est de même pour :

- $\bar{A}$ et B
- A et $\bar{B}$
- $\bar{A}$ et $\bar{B}$

En réalisant successivement deux expériences aléatoires telles que les événements associés à la première soit indépendants des événements associés à la seconde, on dit que l'on réalise une **succession de deux épreuves indépendantes**.

- Deux expériences sont dites **indépendantes** si le résultat de l'une n'influe pas sur le résultat de l'autre.
- Deux expériences sont dites **identiques** si elles ont les mêmes issues et les mêmes probabilités pour chaque issue.

Variables aléatoires

I. Variables aléatoires

I.1 Variable aléatoire discrète

Soit une expérience aléatoire dont l'univers est l'ensemble Ω .

Une **variable aléatoire** est une fonction définie sur Ω et à valeurs dans $\mathbb{R}$. On la note X .

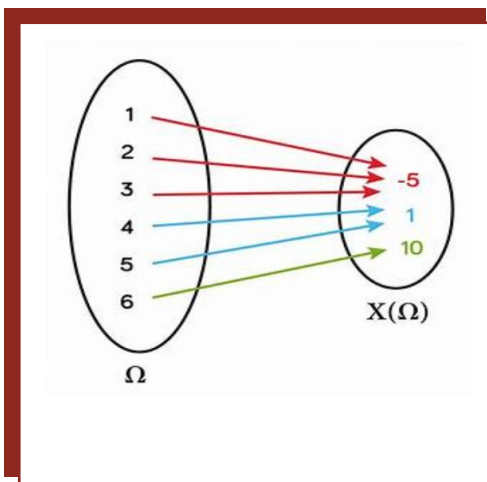
Exemple

On lance un dé équilibré à six faces et on observe le résultat affiché sur la face supérieure.

- « Si le résultat obtenu est 1, 2 ou 3, je perds 5 jetons »
- « Si le résultat obtenu est 4 ou 5, je gagne 1 jeton »
- « Sinon, je gagne 10 jetons »

On peut définir une variable aléatoire X qui décrit les gains de ce jeu. On a donc $X(1)=-5$, $X(2)=-5$, $X(3)=-5$, $X(4)=1$, $X(5)=1$, $X(6)=10$.

On peut représenter la situation par le schéma ci-contre.



I.2 Loi de probabilité d'une variable aléatoire discrète

Soit X une variable aléatoire définie sur l'univers Ω . L'ensemble des valeurs prises par X est $\{x_1; x_2; \dots; x_k\}$, où les valeurs sont rangées par ordre croissant. Le nombre x_i est associé à une ou plusieurs issues de Ω , avec $1 \leq i \leq k$.

- L'événement « $X=x_i$ » est l'ensemble des issues de Ω auxquelles on a associé la valeur x_i .
- L'événement « $X \geq x_i$ » est l'ensemble des issues de Ω auxquelles on a associé une valeur supérieure ou égale à x_i . On définit de même « $X > x_i$ », « $X < x_i$ », et « $X \leq x_i$ ».
- La probabilité de l'événement « $X=x_i$ » est la probabilité de l'événement formé de toutes les issues associées au nombre x_i . On la note $P(X=x_i)$ ou p_i .
- La probabilité de l'événement « $X \geq x_i$ » est la probabilité de l'événement formé de toutes les issues associées au nombre supérieurs ou égaux à x_i . On la note $P(X \geq x_i)$.

Une variable aléatoire X est définie sur l'univers Ω d'une expérience aléatoire.

Notons $\{x_1; x_2; \dots; x_k\}$ l'ensemble des valeurs prises par X .

La loi de probabilité de X est la fonction qui à chaque valeur x_i lui associe sa probabilité notée $P(X=x_i)$. On la représente sous forme d'un tableau de valeurs :

x_i	x_1	x_2	...	x_n
$P(X=x_i)$	$P(X=x_1)$	$P(X=x_2)$	...	$P(X=x_n)$

On a $p_1 + p_2 + \dots + p_n = \sum_{i=1}^k p_i = 1$ ou $P(X=x_1) + P(X=x_2) + \dots + P(X=x_n) = \sum_{i=1}^n P(X=x_i) = 1$.

II. Espérance, variance et écart-type

- L'**espérance** mathématique de la variable aléatoire X est le réel noté $E(X)$ défini par :

$$E(X) = \sum_{i=1}^n p_i x_i = p_1 x_1 + p_2 x_2 + \dots + p_n x_n$$

L'espérance représente la valeur moyenne que prend X si on répète un grand nombre de fois l'expérience aléatoire.

- La **variance** de la variable aléatoire X est le réel positif noté $V(X)$ défini par :

$$V(X) = \sum_{i=1}^n p_i (x_i - E(X))^2 = p_1 (x_1 - E(X))^2 + p_2 (x_2 - E(X))^2 + \dots + p_n (x_n - E(X))^2$$

- L'**écart-type** de la variable aléatoire X est définie comme la racine carrée de la variance :

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

Remarques

- La loi des grands nombres nous permet d'interpréter l'espérance et l'écart-type de la loi de probabilité de X . Elle nous dit en effet qu'en répétant un grand nombre de fois l'expérience, les fréquences observées se rapprochent de la probabilité théorique. En conséquence, la moyenne des résultats obtenus se rapproche de l'espérance de la loi de probabilité de X . L'espérance est donc la moyenne que l'on peut espérer en répétant l'expérience un grand nombre de fois.
De même pour l'écart-type, qui est un paramètre de dispersion pour une série statistique, il peut être interprété comme un paramètre de dispersion « espérée » pour la loi de probabilité de X .
Pour le jeu proposé en exemple, l'espérance de $-0,5$ signifie que l'on peut « espérer » ou « craindre » perdre en moyenne $0,5$ jeton par partie (ou perdre 1 jeton toutes les 2 parties).
Mais avec une moyenne égale à $-0,5$, l'écart-type d'environ $5,41$ exprime le fait que le risque d'obtenir un gain négatif (une perte) est important.
- Si X représente le gain d'un jeu d'argent, si on a $E(X)=0$ alors on dit que le jeu est équitable.

Formule de König-Huygens

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \sum_{i=1}^n p_i x_i^2 - [E(X)]^2 = p_1 x_1^2 + p_2 x_2^2 + \dots + p_n x_n^2 - [E(X)]^2$$

Soit a et b deux réels quelconques. La variable aléatoire Y , dont la loi de probabilité est donnée par le tableau suivant, est notée $aX + b$.

Valeur de Y	$ax_1 + b$	$ax_2 + b$	...	$ax_n + b$
Probabilité	p_1	p_2	...	p_n

On pose $Y = aX + b$.

Soit X une variable aléatoire et a et b deux nombres réels. Alors :

- $E(aX + b) = aE(X) + b$
- $V(aX) = a^2 V(X)$
- $\sigma(aX + b) = |a| \sigma(X)$

Lois discrètes

I. Loi uniforme

Une variable aléatoire X suit la **loi uniforme sur** $\{1; 2; \dots; n\}$ si elle prend pour valeurs les entiers 1 à n de manière équiprobable, c'est-à-dire si $P(X=k) = \frac{1}{n}$ pour tout $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$.

Soit X une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $\{1; 2; \dots; n\}$. Alors on a :

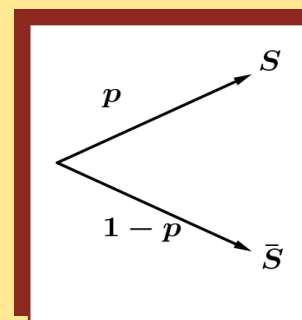
$$\bullet E(X) = \frac{n+1}{2} \qquad \bullet V(X) = \frac{n^2-1}{12} \qquad \bullet \sigma(X) = \sqrt{\frac{n^2-1}{12}}$$

II. Épreuve, loi et schéma de Bernoulli

II.1 Épreuve de Bernoulli

Une **épreuve de Bernoulli** de paramètre p (compris entre 0 et 1) est une expérience aléatoire comportant deux issues :

- l'une appelée succès, noté S , de probabilité p .
- l'autre appelée échec, noté $\bar{S}$ ou E , de probabilité $q = 1 - p$.



II.2 Loi de Bernoulli

Notons X la variable aléatoire prenant la valeur 1 en cas de succès et la valeur 0 en cas d'échec. On dit que X suit la **loi de Bernoulli** de paramètre p .

Autrement dit, on a $P(X=1) = p$ et $P(X=0) = 1 - p$.

On peut résumer la loi de Bernoulli par le tableau suivant :

x_i	1	0
$P(X=x_i)$	p	$1-p$

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi de Bernoulli de paramètre p .

- L'espérance de X est $E(X) = p$.
- La variance de X est $V(X) = p(1-p)$.
- L'écart-type de X est $\sigma(X) = \sqrt{p(1-p)}$.

II.3 Schéma de Bernoulli

Soit n un entier naturel et p un réel compris entre 0 et 1.

Un **schéma de Bernoulli** de paramètres n et p est une expérience aléatoire consistant à répéter n fois, de façon **identique et indépendante**, une épreuve de Bernoulli de paramètre p .

III. Coefficients binomiaux et triangle de Pascal

On considère l'arbre associé à un schéma de Bernoulli de paramètres n et p .

Le nombre de chemins dans l'arbre permettant de réaliser k succès est noté $\binom{n}{k}$.

Les nombres $\binom{n}{k}$ sont appelés les **coefficients binomiaux**.

Méthode pour déterminer les coefficients binomiaux avec la calculatrice :

- Casio 35+ et supérieur : Pour calculer $\binom{5}{2}$, dans le menu RUN (calcul), appuyer sur la touche OPTN, puis choisir PROB. Tapez 5, puis choisir nCr, puis taper 2 et EXE.
- TI 82 et supérieur : Pour calculer $\binom{5}{2}$, taper 5, puis appuyer sur la touche MATH, choisir le menu PROB, puis choisir nCr ou Combinaison (version fr), puis taper 2 et ENTER.

Pour tous n et k entiers naturels tels que $1 \leq k \leq n$, on a :

$$\begin{aligned} \triangleright \binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1 & \qquad \triangleright \binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n \end{aligned}$$

Propriété de symétrie

Pour tous n et k entiers naturels tels que $0 \leq k \leq n$, on a $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

Relation de Pascal

Pour tous entiers naturels $n \geq 2$ et k vérifiant $1 \leq k \leq n-1$, $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$.

Remarque

Ces propriétés permettent de tracer le triangle de Pascal.

- $\binom{n}{0} = 1$ assure que la première colonne ne contient que des 1 ;
- $\binom{n}{n} = 1$ assure que la diagonale ne contient que des 1 ;
- $\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}$ permet de déterminer n'importe quel coefficient binomial à partir de deux connus auparavant.

Par exemple, pour $n=5$ et $k=2$, on a

$$\binom{5}{2} = \binom{4}{1} + \binom{4}{2} = 4 + 6 = 10.$$

$n \backslash k$	0	1	2	3	4	5
0	1					
1	1	1				
2	1	2	1			
3	1	3	3	1		
4	1	4	6	4	1	
5	1	5	10	10	5	1

IV. Loi binomiale

Soit un schéma de Bernoulli de paramètres n et p , correspondant à la répétition de n épreuves identiques et indépendantes et dont la probabilité du succès d'une épreuve est p .

Soit X la variable aléatoire égale au nombre de succès obtenus lors de ces n épreuves.

On dit que X suit la **loi binomiale** de paramètres n et p . On note $X \sim B(n; p)$.

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi binomiale $B(n; p)$.

Pour tout entier $k \in [0; n]$, on a $P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$.

Méthode pour déterminer les probabilités d'une loi binomiale avec la calculatrice :

• Casio 35+ et supérieur : Pour calculer $P(X=20)$ avec X qui suit la loi $B\left(100; \frac{1}{6}\right)$: Choisir le menu STAT, puis DIST, puis BINM, puis Bpd. Rentrez les paramètres ("x" vaut ici 20, "NumTrial" vaut ici 100, et " p " vaut $\frac{1}{6}$). Enfin, sélectionner CALC.

• TI 82 et supérieur : Pour calculer $P(X=20)$ avec X qui suit la loi $B\left(100; \frac{1}{6}\right)$: Appuyer sur 2nd+DISTR (au-dessus de la touche var), puis choisissez binompdf ou binomFdp (version Fr.). Complétez ensuite les paramètres (ici nombre d'essais, probabilité de succès et valeur de x). L'ordre des paramètres est donc n , puis p et enfin k .

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi binomiale $B(n; p)$.

- L'espérance de X est $E(X) = np$.
- La variance de X est $V(X) = np(1-p)$.
- L'écart-type de X est $\sigma(X) = \sqrt{np(1-p)}$.

Représentation graphique

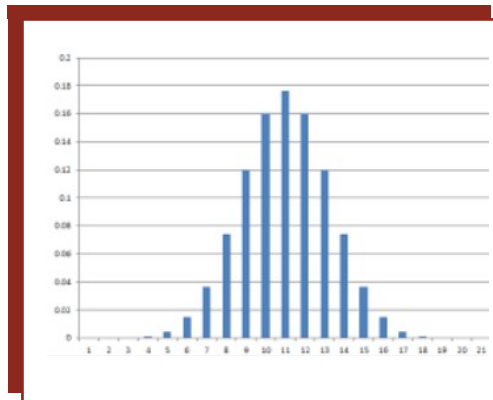
On peut représenter graphiquement une loi binomiale par un diagramme en bâtons en mettant en abscisse les valeurs prises par la variable aléatoire et en ordonnée les probabilités correspondantes. Le diagramme en bâtons est en forme de cloche et est approximativement centré sur son espérance.

Exemple

Le diagramme en bâtons associé à la loi $B(40; 0,5)$, sur lequel k varie de 0 à 40 en abscisses, montre, pour chaque valeur de k , la hauteur de la barre correspondant à $P(X=k)$.

Par exemple, pour $k=10$, la hauteur de la barre est $P(X=10)=0,16$.

Le diagramme est en forme de cloche et est centré en 11. Or l'espérance vaut $E(X)=40 \times 0,5 = 20$, ce qui signifie que cette loi binomiale n'est pas centrée sur son espérance.



Remarque

Pour des variables aléatoires suivant des lois binomiales de même paramètre n , plus p est éloigné de $0,5$ et plus l'écart-type est petit. En conséquence, plus la cloche est « étroite » et « haute ».

V. Échantillonnage

V.1 Intervalle de fluctuation

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi binomiale $B(n; p)$.

Soit α un réel tel que $0 < \alpha < 1$ et a et b deux réels.

$[a; b]$ est un **intervalle de fluctuation au seuil de $1-\alpha$** si et seulement si $P(a \leq X \leq b) \geq 1-\alpha$.

Remarques

- On parle aussi de seuil de confiance, de niveau de confiance ou encore de coefficient de confiance.
- Dans la pratique, on cherchera souvent un intervalle dont l'amplitude est la plus petite possible.
- Selon le contexte, l'intervalle est généralement de la forme $[0; k]$, $[k; n]$ ou $[k; k']$.

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi binomiale $B(n; p)$.

Soit α un réel tel que $0 < \alpha < 1$ et a et b deux réels.

L'intervalle $[a; b]$ tel que a et b soient les plus petits entiers vérifiant $P(X \leq a) > \frac{\alpha}{2}$ et

$P(X \leq b) \geq 1 - \frac{\alpha}{2}$ est un **intervalle de fluctuation centré au seuil de $1-\alpha$** associé à X .

V.2 Intervalle de fluctuation au seuil de 95%

Au sein d'une population, on suppose que la proportion d'un certain caractère est p .

On souhaite juger cette hypothèse. Pour cela, on prélève dans la population au hasard et avec remise (ou sans remise si la population étudiée est très grande), un échantillon de taille n sur lequel on observe une fréquence f de ce caractère.

Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres n et p .
L'intervalle de fluctuation au seuil de 95% d'une fréquence, sur un échantillon de taille n est :

$$I = \left[\frac{a}{n}; \frac{b}{n} \right] \text{ avec } a : \text{le plus petit entier tel que } P(X \leq a) > 0,025.$$

$$b : \text{le plus petit entier tel que } P(X \leq b) \geq 0,975.$$

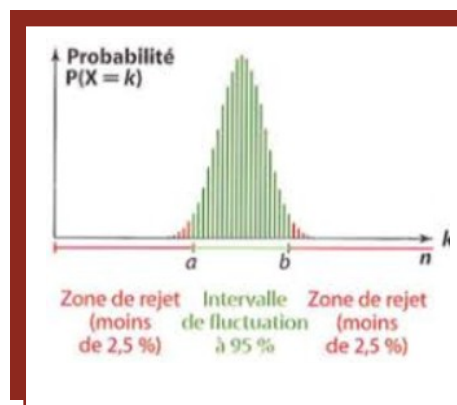
Exemple

Dans le graphique ci-contre, 95% des valeurs se situent entre les réels a et b .

Nécessairement, 5% des valeurs sont

« à l'extérieur ».

Par symétrie, 2,5 % de ces valeurs se situent à gauche de a et 2,5 % à droite de b .



V.3 Prise de décision

On fait l'hypothèse que la proportion d'un caractère dans une population est p .

On veut savoir si l'hypothèse est compatible avec l'échantillon étudié.

Prise de décision

Soit I l'intervalle de fluctuation au seuil de 95% selon la loi binomiale de paramètres n et p et f la fréquence observée du caractère étudié.

- Si $f \notin I$ alors on rejette l'échantillon avec une erreur au seuil de 5%. L'échantillon n'est pas représentatif.
- Si $f \in I$ alors on accepte l'hypothèse au seuil de 95%.

VI. Loi géométrique

VI.1 Définition, probabilité et espérance

On considère une épreuve de Bernoulli pour laquelle la probabilité d'un succès est p et on répète cette épreuve de Bernoulli de manière indépendante jusqu'à l'obtention d'un succès.

Soit X la variable aléatoire égale au nombre d'essais nécessaires pour obtenir un succès.

On dit que X suit la **loi géométrique** de paramètre p . On note $X \sim G(p)$.

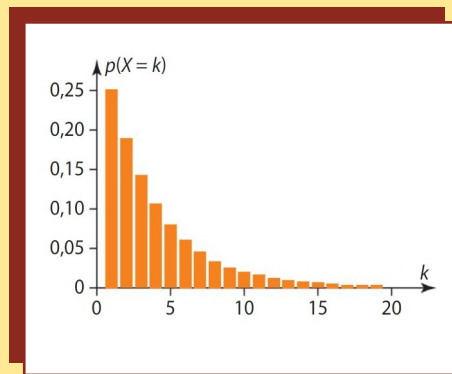
Soit X une variable aléatoire suivant la loi géométrique de paramètre p et $k \in \mathbb{N}^*$. Alors :

- $P(X=k) = p(1-p)^{k-1}$
- $P(X \leq k) = 1 - (1-p)^k$
- $P(X > k) = (1-p)^k$

Soit X une variable aléatoire suivant la loi géométrique de paramètre p et $k \in \mathbb{N}^*$.

Alors l'espérance de X est $E(X) = \frac{1}{p}$.

Pour une variable aléatoire X suivant la loi géométrique $G(p)$, son diagramme en barres associés correspond à une décroissance exponentielle et $P(X=1)$ est la hauteur de la première barre.



VI.2 Loi sans vieillissement

Une variable aléatoire X suit une loi **sans vieillissement** si pour tous entiers naturels non nuls s et t , on a $P_{X>s}(X>s+t)=P(X>t)$.

La loi géométrique est une loi sans vieillissement.

Lois à densité

I. Variables aléatoires à densité

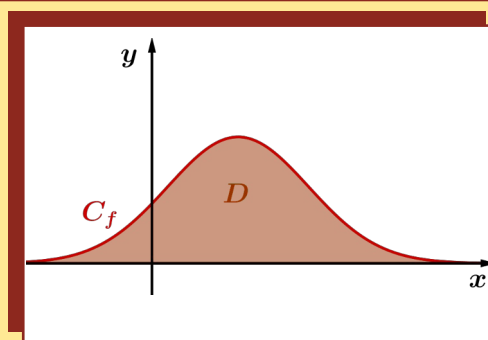
I.1 Variable aléatoire continue

Soit Ω l'univers d'une expérience aléatoire. Une variable aléatoire X définie sur Ω , qui peut prendre comme valeur tous les nombres réels d'un intervalle I de $\mathbb{R}$, est dite **continue**.

I.2 Fonction densité

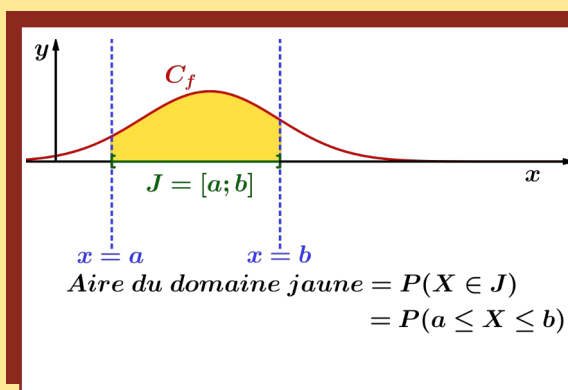
Une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ est appelée **fonction densité**, ou **densité de probabilité**, si :

- f est **positive** sur $\mathbb{R}$.
- f est **continue** sur $\mathbb{R}$ (sauf éventuellement en un nombre fini de points).
- L'**aire du domaine D** , domaine délimité par la courbe représentative C_f de la fonction f dans un repère orthogonal, et par l'axe des abscisses, **est égale à 1**.



I.3 Probabilité d'un événement

Soit Ω l'univers d'une expérience aléatoire et X une variable aléatoire continue de densité f . La probabilité de l'événement $\{X \in J\}$, où J est un intervalle de $\mathbb{R}$, est notée $P(X \in J)$, et est définie comme l'aire du domaine suivant :

$$\{(x; y); x \in J \text{ et } 0 \leq y \leq f(x)\}$$


Remarque

Par cette définition, la probabilité de l'événement $\{X \in \mathbb{R}\}$ correspond à l'aire du domaine D , aire du domaine délimité par la courbe C_f et l'axe des abscisses. Par la troisième caractéristique de la densité f , cette aire est égale à 1 (donc $\int_D f(x) dx = 1$). On a alors $P(X \in \mathbb{R}) = 1$.

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans un intervalle I qui suit la loi à densité f . Alors :
Pour tous réels a et b de I , $P(X \in [a; b]) = P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x) dx$.

Soit X une variable aléatoire qui suit une loi à densité f sur I . Alors :

- $\int_I f(x) dx = 1$.
- Pour tout réel a de I , $P(X=a) = \int_a^a f(x) dx = 0$.
- Pour tout réel a de I , $P(X > a) = 1 - P(X \leq a)$.
- Pour tous réels a et b , $P(a < X < b) = P(X < b) - P(X \leq a)$.
- $P(X \notin J) = 1 - P(X \in J)$.
- Pour tout intervalle J et K inclus dans I , $P(X \in J \cup K) = P(X \in J) + P(X \in K) - P(X \in J \cap K)$.

I.5 Fonction de répartition

Soit X une variable aléatoire continue de densité f dont la courbe représentative est notée C_f . La fonction de répartition associée à la variable aléatoire X est la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$F(x) = P(X \leq x) = P(X \in]a; x])$$

II. Espérance et variance

Soit a et b deux nombres réels distincts tels que $a < b$ et X une variable aléatoire de densité f sur $[a; b]$. Alors l'espérance mathématique et la variance de X sont les réels notés $E(X)$ et $V(X)$ définis par :

$$E(X) = \int_a^b x f(x) dx \quad \text{et} \quad V(X) = \int_a^b (x - E(X))^2 f(x) dx$$

III. Loi uniforme sur $[0; 1]$

Quand on considère une variable aléatoire donnant un nombre réel choisi au hasard entre 0 et 1, on est dans une situation où la probabilité de chaque issue est la même (équiprobabilité).

Ainsi, dans cette situation on choisira comme densité de probabilité une fonction constante.

On appelle loi uniforme sur $I = [0; 1]$ la loi de densité de probabilité f , où f est la **fonction constante égale à 1** pour tout x de I . On note $X \sim U([0; 1])$.

Soit X une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[0; 1]$. Alors :

$$\forall (c; d \in [0; 1])^2, \text{ tel que } c < d, \quad P(c \leq X \leq d) = \int_c^d dx = [x]_c^d = d - c.$$

IV. Loi uniforme sur $[a; b]$

Quand on considère une variable aléatoire donnant un nombre réel choisi au hasard entre a et b , on est dans une situation équiprobable. On choisira donc aussi comme densité de probabilité une fonction constante.

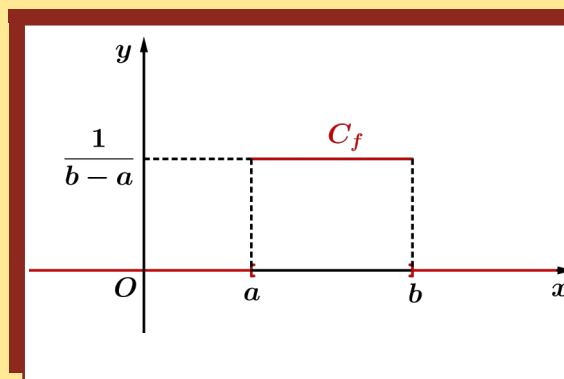
IV.1 Définition

Soit a et b deux réels tels que $a < b$.

On dit qu'une variable aléatoire continue X suit une loi uniforme sur l'intervalle $[a; b]$ si sa densité f est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{si } a \leq x \leq b \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On note $X \sim U([a; b])$.



Soit une variable aléatoire X qui suit une loi uniforme sur $[a; b]$. Alors :

- $\forall x \in [a; b], P(a \leq X \leq x) = \int_a^x \frac{1}{b-a} dt = \frac{x-a}{b-a}$.
- $\forall (c; d) \in [a; b]^2$, tel que $c < d$, $P(c \leq X \leq d) = \int_c^d \frac{1}{b-a} dx = \frac{d-c}{b-a}$.

IV.2 Fonction de répartition

Soit une variable aléatoire X qui suit une loi uniforme sur $[a; b]$. Alors la fonction de répartition de X est la fonction définie sur $[a; b]$ par $F(x) = \frac{x-a}{b-a}$.

IV.3 Espérance et variance

Soit une variable aléatoire X qui suit une loi uniforme sur $[a; b]$.

L'espérance de X est $E(X) = \frac{a+b}{2}$ et la variance de X est $V(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$.

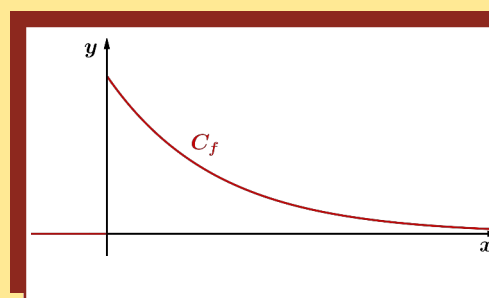
V. Loi exponentielle

V.1 Définition

On dit qu'une variable aléatoire continue X suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ si sa densité f est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

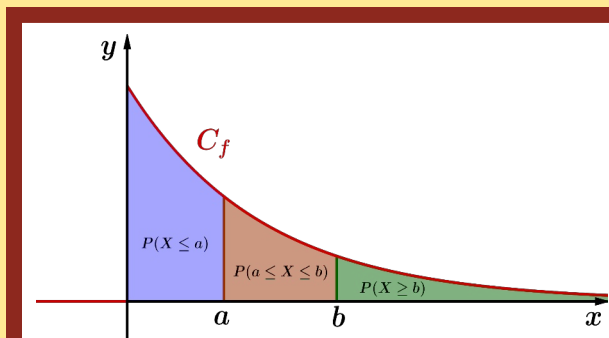
On note $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$.



Soit X une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

Alors, pour tous réels a et b :

- $P(X \leq a) = 1 - e^{-\lambda a}$.
- $P(a \leq X \leq b) = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}$.
- $P(X \geq b) = e^{-\lambda b}$.



V.2 Fonction de répartition

V.2 Fonction de répartition

Soit une variable aléatoire X qui suit la loi exponentielle. Alors la fonction de répartition de X est la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$.

V.3 Espérance

L'espérance d'une variable aléatoire X qui suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ est définie par :

$$E(X) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x t f(t) dt = \frac{1}{\lambda}$$

V.4 Loi sans vieillissement

Absence de mémoire

Une variable aléatoire X à valeurs positives suit une loi sans vieillissement si :

$$\forall t > 0 \text{ et } \forall h > 0, P_{X \geq t}(X \geq t + h) = P(X \geq h)$$

La loi exponentielle est une loi sans mémoire.

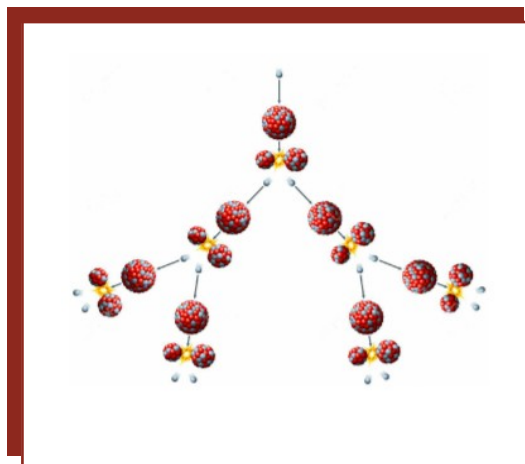
Remarque

On admettra que la loi exponentielle est la seule loi sans mémoire. Autrement dit, toute variable aléatoire à densité sans vieillissement suit une loi exponentielle.

V.5 Application à la physique

La désintégration radioactive est un phénomène aléatoire. c'est à dire que l'on ne peut pas, à l'échelle « microscopique », dire quand un noyau va se désintégrer.

Néanmoins, à l'échelle macroscopique, on a pu établir que la durée de vie d'un noyau radioactif suit une loi de durée de vie sans vieillissement, c'est à dire une loi exponentielle de paramètre λ , λ étant la constante radioactive (en s^{-1}) qui caractérise un radionucléide.



On appelle T la variable aléatoire associée à la durée de vie d'un noyau. La probabilité p qu'un noyau ne soit pas désintégré à l'instant t est donc :

$$p = P(T \geq t) = e^{-\lambda t}$$

Si au départ on compte N_0 noyaux au bout d'un temps t , on en comptera $N(t)$ qui vérifie :

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$$

On appelle demi-vie $t_{1/2}$, le temps nécessaire pour que le nombre de radionucléides soit divisé par deux. On a alors $e^{-\lambda t_{1/2}} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow -\lambda t_{1/2} = \ln\left(\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow -\lambda t_{1/2} = -\ln 2 \Leftrightarrow t_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda}$.

Soit X une variable aléatoire qui suit une loi de durée de vie sans vieillissement.

On appelle demi-vie la durée $t_{1/2}$ tel que $P(X > t_{1/2}) = \frac{1}{2}$. On obtient alors : $t_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda}$.

Remarque

La durée de vie moyenne τ d'un radionucléide est donnée par l'espérance mathématique :

$$\tau = \frac{1}{\lambda} \text{ où } \lambda = \frac{\ln 2}{t_{1/2}} \text{ et donc } \tau = \frac{t_{1/2}}{\ln 2} \approx 1,44 t_{1/2}$$

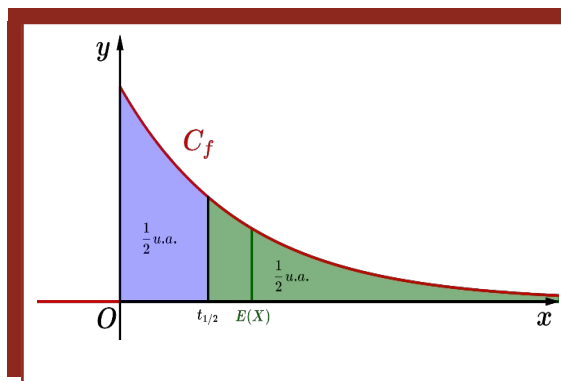
Soit X une variable aléatoire qui suit une loi de durée de vie sans vieillissement.

La durée de vie moyenne τ est donnée par l'espérance mathématique :

$$\tau = \frac{t_{1/2}}{\ln 2} \approx 1,44 t_{1/2}$$

Remarque

La demi-vie $t_{1/2}$ n'est pas égale à la durée de vie moyenne $\tau = E(X)$ car la courbe de densité de probabilité C_f n'est pas symétrique par rapport à la droite verticale d'équation $x = E(X)$.



Statistiques à deux variables quantitatives

I. Rappels sur les statistiques à une variable

I.1 Présentation d'une série statistique à une variable

- La **population** d'une série statistique est l'ensemble des éléments appelés **individus** sur lesquels porte l'étude statistique.
- Le caractère d'une série statistique est la propriété étudiée sur chaque individu. Il est dit :
 - **qualitatif** lorsqu'il ne prend pas que des valeurs numériques.
 - **quantitatif discret** lorsqu'il ne peut prendre qu'un nombre fini de valeurs numériques.
 - **quantitatif continu** lorsqu'il peut prendre une infinité de valeurs numériques.

- L'**effectif total** est le nombre d'éléments au sein de la population étudiée. On le note N .
- L'**effectif** d'une valeur du caractère est le nombre d'individus de la population prenant cette valeur (nombre de fois où cette valeur apparaît dans la série.). On le note n_i .
- La **fréquence** d'une valeur du caractère est le quotient de l'effectif de cette valeur par l'effectif total. On la note f_i et on a $f_i = \frac{n_i}{N}$ (on multiplie par 100 si on veut un résultat en pourcentage).
- Le **mode** (ou **classe modale**) de la série est la valeur (ou la classe) du caractère ayant le plus grand effectif.

On note x_i une valeur prise par un caractère quantitatif : ses valeurs sont numériques.

- L'**effectif cumulé croissant** (respectivement **décroissant**) de x_i est la somme des effectifs des valeurs inférieures (respectivement supérieures) ou égales à x_i . On le note ECC.
- La **fréquence cumulée croissante** (respectivement **décroissante**) de x_i est la somme des fréquences des valeurs inférieures (respectivement supérieures) ou égales à x_i . On la note FCC.

La somme de toutes les fréquences est toujours égale à 1.

I.2 Paramètres d'une série statistique

Variable x_i	x_1	x_2	...	x_p
Effectif n_i	n_1	n_2	...	n_p

- La **moyenne** d'une série statistique est le nombre, noté $\bar{x}$, défini par :

$$\bar{x} = \frac{n_1 x_1 + n_2 x_2 + \dots + n_p x_p}{N} = f_1 x_1 + f_2 x_2 + \dots + f_n x_n$$

- Soit a et b deux réels.

Si une série statistique a pour moyenne $\bar{x}$, alors la série $\{ax_i + b\}$ a pour moyenne $a\bar{x} + b$.

La **médiane** d'une série statistique est le nombre, noté Me , qui partage la série en deux groupes de même effectif (50% des valeurs en dessous et 50% au dessus).

Les **quartiles** d'une série partagent celle-ci en quatre groupes de même effectif :

- Le **premier quartile** Q_1 est la plus petite valeur de la série telle que au moins un quart des valeurs sont inférieures ou égales à Q_1 .
- Le **troisième quartile** Q_3 est la plus petite valeur de la série telle que au moins trois quarts des valeurs de la série sont inférieures ou égales à Q_3 .

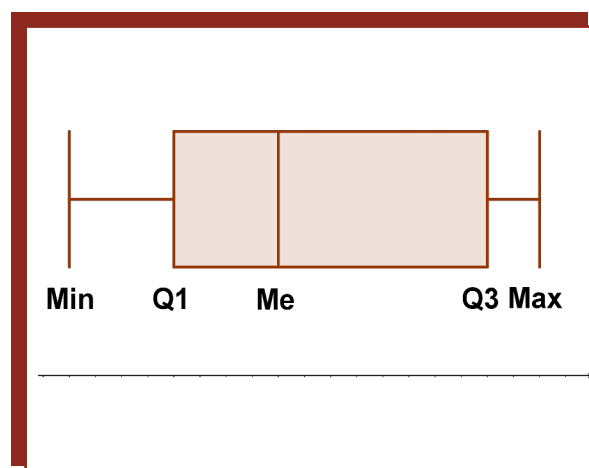
- L'**étendue** d'une série statistique est la différence entre la valeur maximale et la valeur minimale.
- L'**écart interquartile** est le nombre $Q_3 - Q_1$ et mesure la dispersion de la série par rapport à la médiane.
- L'**intervalle interquartile** $[Q_1; Q_3]$ contient 50% des valeurs de la série.
- L'**écart-type** d'une série statistique est le nombre réel positif, noté σ , défini par :

$$\sigma = \sqrt{\frac{n_1(x_1 - \bar{x})^2 + n_2(x_2 - \bar{x})^2 + \dots + n_p(x_p - \bar{x})^2}{N}}$$

Représentation graphique d'une série

Pour résumer une série statistique sous forme de schéma, on utilisera ce que l'on appelle un diagramme en boîte (ou boîte à moustaches).

Un diagramme en boîte représente graphiquement une série en faisant apparaître les principaux indicateurs de la série. On aura ainsi environ 25% des valeurs de la série entre Min et Q_1 , environ 25% entre Q_1 et Me , environ 25% entre Me et Q_3 (donc environ 50% des valeurs dans la boîte) et environ 25% des valeurs entre Q_3 et Max .



Méthode : Détermination de la médiane et des quartiles d'une série

Pour déterminer la médiane et les quartiles d'une série, on range tout d'abord les N valeurs de la série par ordre croissant (si ce n'est pas déjà fait).

Pour la médiane :

- Si N est un nombre impair, alors la médiane Me est la valeur située au rang $\frac{N+1}{2}$.
- Si N est pair, alors la médiane est la moyenne des valeurs de rangs $\frac{N}{2}$ et $\frac{N}{2} + 1$.

Pour les quartiles :

- Q_1 est la valeur de la série de rang $\frac{N}{4}$ (ou l'entier directement supérieur si $\frac{N}{4} \notin \mathbb{N}$)
- Q_3 est la valeur de la série de rang $\frac{3N}{4}$ (ou l'entier directement supérieur si $\frac{3N}{4} \notin \mathbb{N}$)

II. Série statistiques à deux variables

Lorsque l'on s'intéresse à un sujet, il est fréquent de recueillir plusieurs données ou caractères. Il est parfois intéressant de ne pas regarder chaque caractère indépendamment, mais d'essayer d'établir une éventuelle corrélation entre ces deux caractères. C'est le rôle des statistiques.

Lorsqu'une série statistique étudie simultanément deux caractères X et Y , on dit qu'il s'agit d'une série statistique à deux variables (ou double) que l'on note $(X; Y)$.

Les valeurs prises par le caractère X sont notées $(x_1; x_2; \dots; x_n)$.

Les valeurs prises par le caractère Y sont notées $(y_1; y_2; \dots; y_n)$.

On associe à chaque individu de la population un couple $(x_i; y_i)$ où x_i et y_i sont les valeurs prises par l'individu « numéro i », avec $i \in [1; n]$ (ou parfois entre 0 et $n-1$).

On appelle alors série statistique à deux variables $(X; Y)$ l'ensemble des couples $(x_i; y_i)$ associés à chaque individu de la population.

III. Point moyen et forme d'un nuage de points

III.1 Point moyen

Dans cette partie, on représentera une série statistique à deux variables à l'aide d'un tableau de la forme :

Variable x_i	x_1	x_2	...	x_n
Variable y_i	y_1	y_2	...	y_n

On peut associer à chaque couple $(x_i; y_i)$, pour i allant de 1 à n , de la série statistique à deux variables $(X; Y)$ le point M_i de coordonnées $(x_i; y_i)$ dans un repère orthogonal. L'ensemble des points $M_i(x_i; y_i)$ est appelé **nuage de points** associés à la série statistique à deux variables.

Soit $\bar{x}$ la moyenne des valeurs prises par le 1er caractère et $\bar{y}$ celle des valeurs prises par le 2e caractère. On appelle **point moyen du nuage de points** de la série statistique le point **G** de coordonnées $(\bar{x}; \bar{y})$ tel que $\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$ et $\bar{y} = \frac{y_1 + y_2 + \dots + y_n}{n}$.

III.2 Forme d'un nuage de points

La forme d'un nuage de points peut indiquer ou non une liaison entre les deux variables X et Y . L'allure du nuage de points représentant la série statistique permet d'avoir une idée de la réponse. On cherche alors s'il existe un lien entre les deux variables. Pour cela, on va essayer de trouver une courbe, si elle existe, qui « approche au mieux » le nuage, c'est-à-dire une courbe qui passe au plus près des points du nuage.

Chercher une courbe qui « approche au mieux » un nuage de point s'appelle effectuer un **ajustement**. Cette courbe d'ajustement, si elle existe, représente une fonction f qui permet quasiment d'exprimer la variable y en fonction de la variable x sous la forme $y = f(x)$.

Remarque

Parmi les tendances les plus communes, on trouvera :

- les points du nuage sont dispersés, ils n'indiquent pas de tendance particulière ;
- les points du nuage sont sensiblement alignés, alors il existe une **liaison affine** entre les deux variables X et Y ;
- les points du nuage sont sensiblement sur une courbe exponentielle, alors il existe une **liaison exponentielle** entre les variables X et Y .

IV. Ajustement affine

IV.1 Ajustement affine

Lorsqu'un nuage de points $M_i(x_i; y_i)$ met en évidence une liaison affine entre les deux variables étudiées, on peut la représenter par une droite d'équation $y = ax + b$.

Lorsque les points du nuage sont sensiblement alignés, on appelle **droite d'ajustement de y en x** de la série statistique ou **droite de régression linéaire de y en x** une droite qui passe au plus près des points du nuage. On dit que cette droite réalise un **ajustement affine** du nuage de points.

IV.2 Méthode graphique

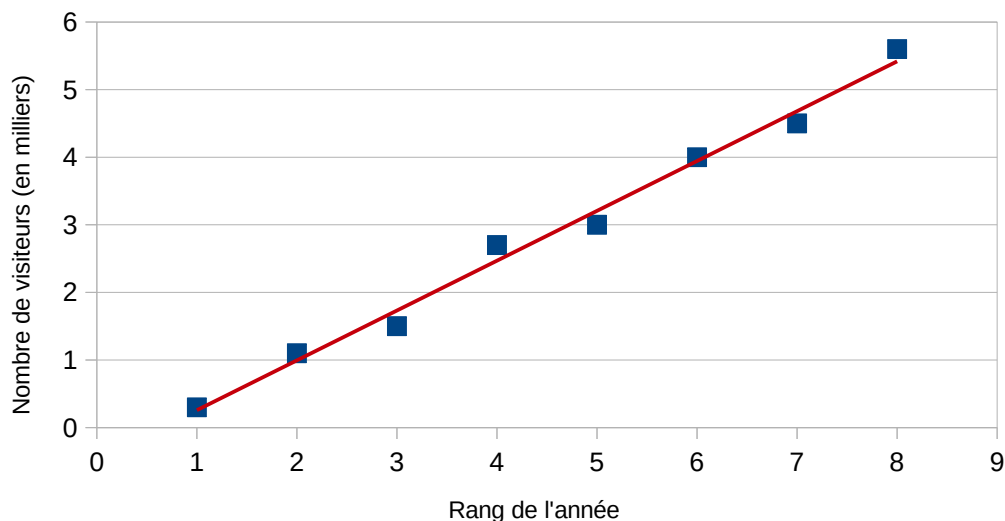
Dans le plan rapporté à un repère, on trace une droite passant au plus près de tous les points du nuage en suivant les indications fournies par l'énoncé.

Exemple

On a relevé, pour un site internet, le nombre de visiteurs (en milliers) par an pendant les huit premières années de fonctionnement :

Année	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018
Rang x_i	1	2	3	4	5	6	7	8
Nombre de visiteurs y_i (en milliers)	0,3	1,1	1,5	2,7	3	4	4,5	5,6

Dans cet exemple, les points du nuage sont sensiblement alignés. Traçons une droite d'ajustement :



Remarque

Par cette méthode, on effectue un tracé « au jugé ». Nous n'obtiendrons donc pas à chaque fois exactement la même droite.

IV.3 Méthode des moindres carrés et covariance

Méthode des moindres carrés

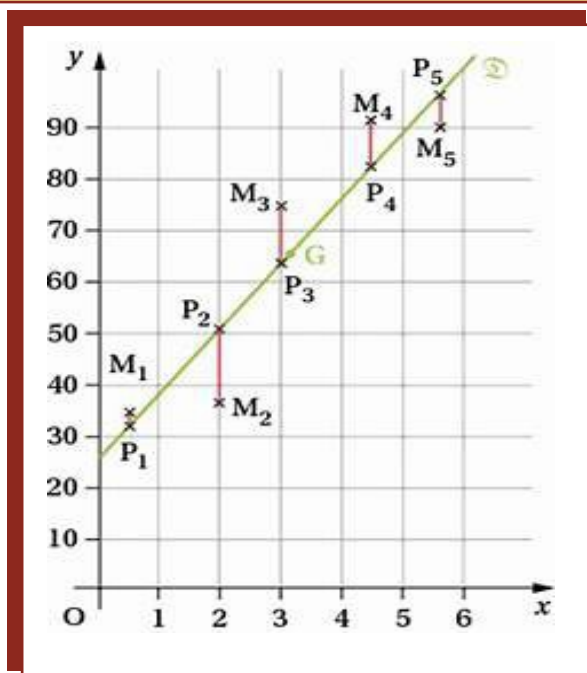
Soit un nuage de points $M_i(x_i; y_i)_{1 \leq i \leq n}$, une droite d d'équation $y = ax + b$ qui ajuste le nuage et les points $P_i(x_i; ax_i + b)$ sur la droite d'ajustement affine.

Il existe deux réels a et b tels que la somme $M_1 P_1^2 + M_2 P_2^2 + \dots + M_n P_n^2$ est **minimale**.

Pour ces valeurs de a et b , la droite d'équation $y = ax + b$ est appelée **droite des moindres carrés** associée au nuage de points $M_i(x_i; y_i)_{1 \leq i \leq n}$.

Remarque

Cette méthode consiste à déterminer une droite d'ajustement D , d'équation $y = ax + b$, passant « en moyenne » au plus près des points du nuage, telle que la somme des carrés des écarts entre les points de même abscisse $M_i(x_i; y_i)$ du nuage de points et $P_i(x_i; y'_i)$ de la droite soient minimale. $M_i P_i = y_i - (ax_i + b)$ représente l'écart entre le point M_i du nuage et la droite. Lorsque l'on fait la somme des carrés de ces écarts, on cherche à minimiser le résultat. Il s'agit donc de trouver les nombres a et b qui minimisent cette quantité.



Remarque

Pour obtenir l'équation de la droite d'ajustement affine, on utilisera la calculatrice ou un tableur. Dans l'exemple graphique précédent, on obtiendrait la droite d'équation $y = 0,74x - 0,48$ (en arrondissant à 10^{-2} près).

La droite d'ajustement affine de y en x par la méthode des moindres carrés **passse par le point moyen** du nuage de points de la série statistique.

On appelle **covariance** des séries statistiques x et y le réel $cov(x; y)$ défini par :

$$cov(x; y) = \frac{(x_1 - \bar{x})(y_1 - \bar{y}) + (x_2 - \bar{x})(y_2 - \bar{y}) + \dots + (x_n - \bar{x})(y_n - \bar{y})}{n}$$

Remarques

- La covariance peut être positive ou négative.
- On note aussi la covariance σ_{xy} .
- Une autre formule pour calculer la covariance est : $cov(x; y) = \sigma_{xy} = \frac{x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n}{n} - \bar{x}\bar{y}$.

La droite des moindres carrés a pour équation $y = ax + b$ avec $a = \frac{cov(x; y)}{V(x)}$ et $b = \bar{y} - a\bar{x}$.

Remarques

- Le réel $V(x)$ s'appelle la variance de la série statistique x . Ce réel est positif.
- On peut obtenir les coefficients a et b de la droite des moindres carrés directement à l'aide de la calculatrice.

On appelle **coefficient de corrélation linéaire** des séries statistiques x et y le réel défini par :

$$r = \frac{cov(x; y)}{cov(x) cov(y)}$$

Le coefficient de corrélation linéaire est un réel compris entre -1 et 1 . Il vérifie :

- Plus $|r|$ est proche de 1 , plus l'ajustement affine est un bon modèle de corrélation entre les variables x et y .
- Plus $|r|$ est proche de 0 , moins l'ajustement n'a de sens.
- Si $|r| = 1$, alors la droite de régression passe par tous les points du nuage.

IV.4 Ajustement exponentiel

Parfois le nuage de points de la série statistique $(x; y)$ a une forme générale qui ressemble à la courbe d'une fonction exponentielle $x \rightarrow e^{ax+b}$.

Pour déterminer l'expression de la fonction dont la courbe représentative approche au mieux le nuage de points, on effectue un changement de variable en posant $y' = \ln y$.

Le nuage de points de la série statistique $(x; y')$ présente alors une forme rectiligne que l'on peut ajuster par la droite de régression de y' en x , d'équation $y' = ax + b$.

On a alors $\ln y = ax + b$ ce qui équivaut à $y = e^{ax+b}$.

Cette équation représente une courbe exponentielle qui ajuste au mieux le nuage.

On dit alors qu'on a réalisé un ajustement exponentiel.

V. Interpolations et extrapolations

Lorsque l'on a pu réaliser un ajustement (affine ou exponentiel) satisfaisant pour le nuage de points d'une série statistique à deux variables x et y , alors on peut considérer, si cela a du sens dans la situation étudiée, que les quantités x et y ne sont pas complètement indépendantes l'une de l'autre et ont un lien qui peut être modélisé par une fonction f (affine ou exponentielle), qui correspond à l'ajustement trouvé, et telle que $y = f(x)$.

Cela permet d'effectuer des estimations de la quantité y qui pourraient correspondre à des valeurs théoriques de la quantité x , non relevées initialement dans l'étude statistique. Ces estimations s'effectuent soit par lecture graphique (à partir du tracé de la droite d'ajustement), soit par le calcul (en utilisant l'équation de la droite d'ajustement).

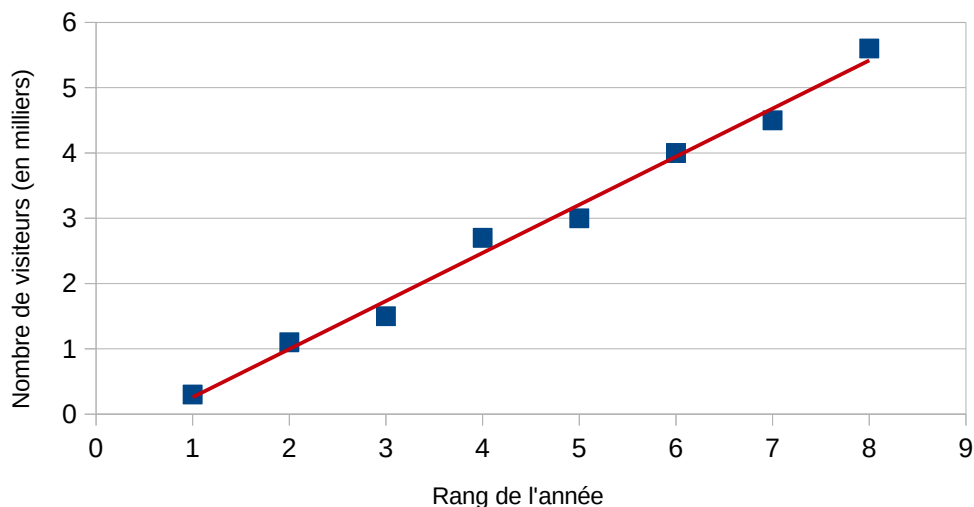
Dans le cas où les valeurs choisies restent dans le « domaine d'étude » défini par l'échantillon, on dit que l'on réalise une **interpolation**.

Réciproquement, on peut aussi estimer une valeur x qui pourrait correspondre à une valeur donnée de y . Il s'agit d'une **extrapolation**. Lorsque la variable x est une mesure du temps, la série est appelée série chronologique et il s'agit alors de se projeter dans le futur pour faire des prévisions.

Exemple

Reprenons l'exemple du nombre de visiteurs (en millier) par an sur un site internet pendant les huit premières années de fonctionnement :

Année	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018
Rang x_i	1	2	3	4	5	6	7	8
Nombre de visiteurs y_i (en milliers)	0,3	1,1	1,5	2,7	3	4	4,5	5,6



Supposons que les statistiques de l'année numéro 5 aient été perdues. Nous pouvons estimer alors la fréquentation du site grâce à l'ajustement affine que nous avons fait.

On a $y = 0,74x - 0,48$ avec $x = 5$. On obtient alors $y = 5 \times 0,74 - 0,48 = 3,22$. Nous estimons le nombre de visiteurs à 3 220 la cinquième année. La valeur cherchée était à l'intérieur du nuage de points, on dit qu'on a fait une **interpolation**. Il s'agit ici d'une **estimation**.

Toujours dans cet exemple, nous voulons estimer la fréquentation du site au bout de 20 ans de fonctionnement, en considérant que l'évolution reste la même.

On a $y = 0,74x - 0,48$ avec $x = 20$. On obtient alors $y = 20 \times 0,74 - 0,48 = 14,32$. Nous estimons le nombre de visiteurs à 14 320 la vingtième année. La valeur cherchée était au-delà du nuage de points, on dit qu'on a fait une **extrapolation**. Il s'agit ici d'une **prévision**.