

Proportions et pourcentages

I. Proportions et pourcentages

I.1 Généralités

Soit E un ensemble non vide et A une partie de cet ensemble. On note n_E le nombre d'éléments (ou d'individus) de E et n_A le nombre d'éléments de A .

On appelle **proportion de A dans E** le quotient $p = \frac{n_A}{n_E}$.

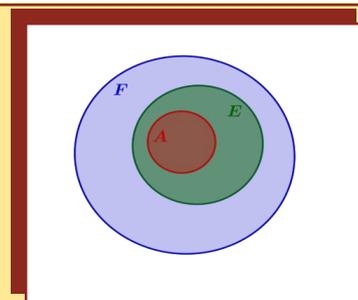
- Pour tout ensemble A contenu dans un ensemble non vide E , on a $0 \leq p \leq 1$.
- Pour obtenir un résultat en pourcentage, il suffit de **multiplier la proportion obtenue par 100**.

À partir de la première propriété, il est possible de déterminer chacun des paramètres en fonction des deux autres :

- Si on connaît n_A et n_E , on peut déterminer p : $p = \frac{n_A}{n_E}$.
- Si on connaît p (où $p \neq 0$) et n_A , on peut déterminer n_E : $n_E = \frac{n_A}{p}$.
- Si on connaît p et n_E , on peut déterminer n_A : $n_A = p \times n_E$.

I.2 Pourcentage de pourcentage

Soit F un ensemble non vide, E une partie non vide de F et A une partie non vide de E .
On note p_1 la proportion de A dans E et p_2 la proportion de E dans F .
Alors la **proportion de A dans F** est $p = p_1 \times p_2$.



II. Taux d'évolution

II.1 Variation absolue et variation relative

Soit une grandeur ayant pour valeur initiale V_I et pour valeur finale V_F .

- La **variation absolue** ΔV est la différence entre V_F et V_I . On a $\Delta V = V_F - V_I$.
- Le **taux d'évolution (ou variation relative)** t est le quotient de la différence entre V_F et V_I

par V_I . On a $t = \frac{V_F - V_I}{V_I}$.

Pour obtenir un **pourcentage d'évolution**, il suffit de **multiplier le taux d'évolution obtenu par 100**.

II.2 Coefficient multiplicateur

- Soit t le taux d'évolution qui permet à une quantité de passer de V_I à V_F .
On a alors : $V_F = (1 + t) \times V_I$.
- $1 + t$ est appelé **coefficient multiplicateur** associé au taux d'évolution t . On le note CM .
Avec ces notations, on a alors $V_F = CM \times V_I$ et $CM = 1 + t$.

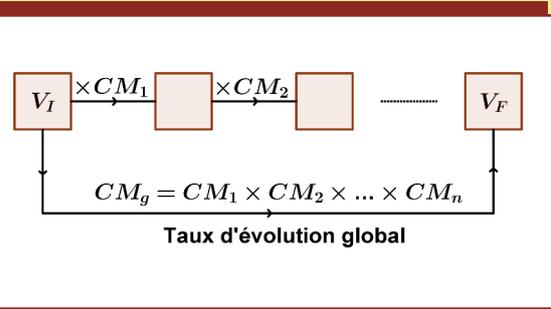
- Dans le cas d'une **augmentation**, t est **positif** et CM est un réel **supérieur à 1**.
- Dans le cas d'une **diminution**, t est **négatif** et CM est **compris entre 0 et 1**.

III. Évolutions successives et réciproques

III.1 Évolutions successives

Lorsqu'une quantité subit des **évolutions successives** t_1, t_2, \dots, t_n de sa valeur, elle subit alors une **évolution globale** t_g .

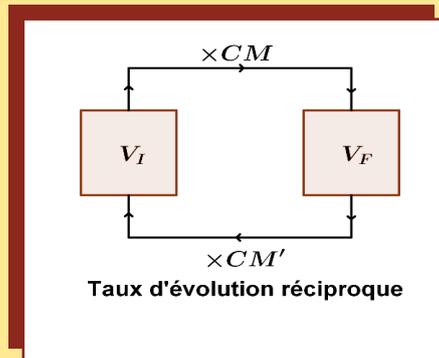
Le **coefficient multiplicateur global** CM_g associé à l'évolution t_g est le produit des coefficients multiplicateurs CM_1, CM_2, \dots, CM_n associés respectivement aux évolutions t_1, t_2, \dots, t_n .
On a $CM_g = CM_1 \times CM_2 \times \dots \times CM_n$.



III.2 Évolution réciproque

Soit t le taux d'évolution d'une valeur passant de V_I à V_F . Alors son **taux d'évolution réciproque** t' est le taux permettant de passer de V_F à V_I .

Le **coefficient multiplicateur réciproque** CM' associé à l'évolution réciproque t' est l'inverse du coefficient multiplicateur non nul CM associé à l'évolution de départ t .
On a $CM' = \frac{1}{CM}$.



Variables catégorielles

I. Rappels

- La **population** d'une série statistique est l'ensemble des éléments appelés **individus** sur lesquels porte l'étude statistique.
- Le **caractère** d'une série statistique est la propriété étudiée sur chaque individu. Il est dit :
 - **qualitatif** lorsqu'il ne prend pas que des valeurs numériques.
 - **quantitatif discret** lorsqu'il ne peut prendre qu'un nombre fini de valeurs numériques.
 - **quantitatif continu** lorsqu'il peut prendre une infinité de valeurs numériques.

- L'**effectif total** est le nombre d'éléments au sein de la population étudiée. On le note N .
- L'**effectif** d'une valeur du caractère est le nombre d'individus de la population prenant cette valeur (nombre de fois où cette valeur apparaît dans la série.). On le note n_i .
- La **fréquence** d'une valeur du caractère est le quotient de l'effectif de cette valeur par l'effectif total. On la note f_i et on a $f_i = \frac{n_i}{N}$ (on multiplie par 100 si on veut un résultat en pourcentage).
- Le **mode** (ou **classe modale**) de la série est la valeur (ou la classe) du caractère ayant le plus grand effectif.

Remarques

- Une fréquence est toujours un nombre compris entre 0 et 1 (entre 0 et 100% si on donne les fréquences en pourcentage).
- Une série statistique apparaîtra ainsi généralement sous la forme d'un tableau donnant les effectifs pour chacune des valeurs possibles du caractère, celles-ci étant classées par ordre croissant.

Variable x_i	x_1	x_2	...	x_p
Effectif n_i	n_1	n_2	...	n_p

Effectif total : $N = n_1 + n_2 + \dots + n_p$.

La somme de toutes les fréquences est toujours égale à 1.

II. Croisement de deux variables catégorielles

Lorsque l'on s'intéresse à un sujet, il est fréquent de recueillir plusieurs données ou caractères. Il est parfois intéressant de ne pas regarder chaque caractère indépendamment, mais d'essayer d'établir une éventuelle corrélation entre ces deux caractères. C'est le rôle des statistiques.

II.1 Tableau croisé d'effectifs

Lorsqu'une série statistique étudie simultanément deux caractères X et Y , on dit qu'il s'agit d'une série statistique à deux variables (ou double) que l'on note $(X; Y)$.
 Les valeurs prises par le caractère X sont notées $(x_1; x_2; \dots; x_n)$.
 Les valeurs prises par le caractère Y sont notées $(y_1; y_2; \dots; y_n)$.

Un tableau croisé d'effectifs est un tableau dans lequel les valeurs d'un caractère sont présentées en ligne et celles de l'autre caractère sont présentées en colonne :

- On note n_{ij} l'effectif correspondant au couple $(x_i; y_j)$ et N l'effectif total.
- À l'intersection d'une ligne et d'une colonne, on indique le nombre d'individus présentant simultanément la valeur du premier caractère correspondant à la ligne et la valeur du deuxième caractère correspondant à la colonne.
- L'**effectif marginal** d'une valeur d'un caractère est le nombre d'individus de la population présentant cette valeur du caractère.

X \ Y	y_1	...	y_j	...	y_m	Total
x_1	n_{11}		n_{1j}		n_{1m}	Effectif de x_1
...						
x_i	n_{i1}		n_{ij}		n_{im}	Effectif de x_i
...						
x_k	n_{k1}		n_{ki}		n_{km}	Effectif de x_k
Total	Effectif de y_1		Effectif de y_i		Effectif de y_m	N

II.2 Tableau des fréquences par rapport à l'effectif global

Un tableau des fréquences par rapport à l'effectif global se présente de la même manière qu'un tableau croisé d'effectifs. Il permet d'étudier simultanément les fréquences de deux caractères avec l'un des caractères présenté en ligne et l'autre en colonne.

- On note f_{ij} la fréquence correspondant au couple $(x_i; y_j)$ et on a $f_{ij} = \frac{n_{ij}}{N}$.
- La **fréquence marginale** d'une valeur d'un caractère est le quotient de l'effectif marginal de cette valeur par l'effectif total de la population.

X \ Y	y_1	...	y_j	...	y_m	Total
x_1	$f_{11} = \frac{n_{11}}{N}$		$f_{1j} = \frac{n_{1j}}{N}$		$f_{1m} = \frac{n_{1m}}{N}$	Fréquence de x_1
...						
x_i	$f_{i1} = \frac{n_{i1}}{N}$		$f_{ij} = \frac{n_{ij}}{N}$		$f_{im} = \frac{n_{im}}{N}$	Fréquence de x_i
...						
x_k	$f_{k1} = \frac{n_{k1}}{N}$		$f_{kj} = \frac{n_{kj}}{N}$		$f_{km} = \frac{n_{km}}{N}$	Fréquence de x_k
Total	Fréquence de y_1		Fréquence de y_i		Fréquence de y_m	1

II.3 Tableau des fréquences conditionnelles

Si on fixe une valeur de l'un des deux caractères, on obtient une série à une variable appelée série conditionnelle. On peut donc obtenir un tableau des effectifs de cette série à une variable correspondant à une colonne du tableau croisé d'effectifs.

Une **fréquence conditionnelle** se calcule donc par rapport au caractère fixé, c'est-à-dire suivant la ligne ou la colonne du tableau croisé d'effectifs.

On repart du tableau croisé d'effectif puis on fixe x_i . On obtient donc le tableau des effectifs de la variable Y.

Y	y_1	...	y_j	...	y_m	Total
Effectifs des Y	n_{i1}		n_{ij}		n_{im}	$n = \text{effectif des Y pour } x_i$

On peut donc construire le tableau des fréquences conditionnelles du caractère Y par rapport à x_i .

Y	y_1	...	y_j	...	y_m	Total
Fréquences des Y	f_{i1}		f_{ij}		f_{im}	1