Probabilités conditionnelles et indépendance

I. Généralités

• Une **expérience aléatoire** est une expérience dont le résultat dépend du hasard. Chacun des résultats possibles s'appelle **éventualité** ou **issue**. L'ensemble Ω (ou E) de tous les résultats possibles d'une expérience aléatoire s'appelle l'**univers** de l'expérience.
• Un **événement** A est une partie de l'univers Ω (un événement peut donc être constitué de zéro, une ou plusieurs issues de Ω).
• Un **événement élémentaire** est une partie de Ω qui ne contient qu'une seule issue.
• L'**événement contraire** de A, noté $\overline{A}$, est la partie constituée de toutes les issues de Ω qui ne sont pas dans A.

• $P(\varnothing)=0$ et $P(\Omega)=1$.
• La probabilité d'un événement A, notée $\mathbf{P(A)}$, est la **somme des probabilités des événements élémentaires inclus dans A**.
• Pour tout événement A, on a $0\leqslant P(A)\leqslant 1$.
• La somme des probabilités des événements élémentaires vaut 1.
• La probabilité de l'événement contraire d'un événement A est : $P(\overline{A})=1-P(A)$.

• Si $\Omega=\{e_1;e_2;\ldots;e_n\}$ et si à chaque issue e_i on associe un nombre $P(e_i)$ tel que $0\leqslant P(e_i)\leqslant 1$ et $P(e_1)+P(e_2)+\ldots+P(e_n)=1$, on dit que l'on a défini une **loi de probabilité** sur Ω.
• Lorsque tous les événements élémentaires d'une expérience aléatoire ont la même probabilité, on dit alors qu'ils sont **équiprobables**. On parle d'**expérience équiprobable** ou de **loi équirépartie**.

• L'événement « **A et B** », noté $A\cap B$, s'appelle l'**intersection** des événements A et B.
Il est réalisé lorsque **les deux événements sont réalisés simultanément**.
• L'événement « **A ou B** », noté $A\cup B$, s'appelle la **réunion** des événements A et B.
Il est réalisé lorsqu'**au moins l'un des deux événements est réalisé**.
• Deux événements A et B sont dits **incompatibles** si $A\cap B=\varnothing$.

Soit A un événement d'un univers Ω. Pour une loi équirépartie, on a :

$$P(A)=\frac{\text{nombre d'éléments de A}}{\text{nombre d'éléments de }\Omega}=\frac{\text{nombre de cas favorables à A}}{\text{nombre de cas possibles}}$$

Soit A et B deux événements d'un univers Ω.
• $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$.
• Si A et B sont **incompatibles**, $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$.

II. Probabilités conditionnelles

Soit A et B deux événements d'un univers Ω avec $P(A)\neq 0$.
La **probabilité conditionnelle** que l'événement B se réalise sachant que l'événement A est réalisé est notée $P_A(B)$, et elle est définie par : $P_A(B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}$.

La probabilité $P_A(B)$ vérifie bien $0\leqslant P_A(B)\leqslant 1$ et $P_A(B)+P_A(\overline{B})=1$.

Soit A et B deux événements d'un univers Ω avec $P(A)\neq 0$ et $P(B)\neq 0$. Alors :
$$P(A)\times P_A(B)=P(B)\times P_B(A)$$

Utilisation de tableaux
Les tableaux à double entrées permettent une présentation claire de certaines expériences aléatoires et facilitent le calcul des probabilités conditionnelles.

	B	$\overline{\mathbf{B}}$	**Total**
A	$P(A\cap B)$	$P(A\cap\overline{B})$	$P(A)$
$\overline{\mathbf{A}}$	$P(\overline{A}\cap B)$	$P(\overline{A}\cap\overline{B})$	$P(\overline{A})$
Total	$P(B)$	$P(\overline{B})$	1

- $P(A\cap B)$ se lit à l'intersection de la ligne A et de la colonne B .
- $P(A)$ (respectivement $P(B)$) se lit sur la dernière colonne (respectivement la dernière ligne).
- $P_A(B)$ (ou $P_B(A)$) s'obtient en calculant le quotient des deux probabilités adéquates :

$$P_A(B)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)} \text{ et } P_B(A)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

Exemple
Un club sportif rassemble 180 membres répartis en juniors et seniors. On compte 135 seniors dont 81 hommes. Il y a 27 garçons parmi les seniors.
En choisissant une femme au hasard, calculer la probabilité d'avoir une juniore.

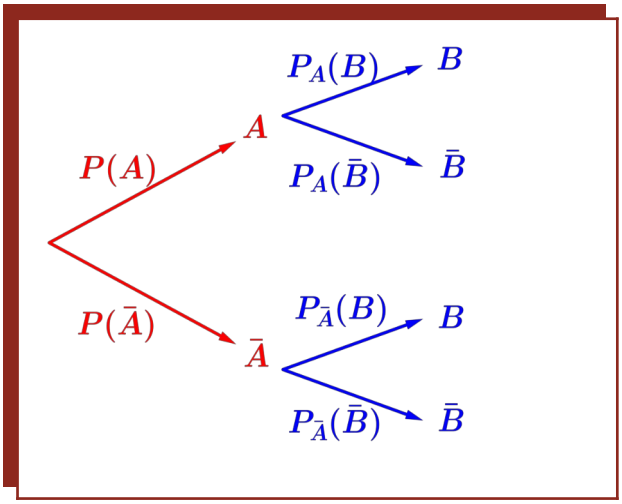
	J	**S**	**Total**
H	$\frac{27}{180}=0,15$	$\frac{81}{180}=0,45$	$0,15+0,45=0,6$
F	$0,1$	$0,3$	$0,4$
Total	$0,25$	$\frac{135}{180}=0,75$	1

Ainsi $P_F(J)=\dfrac{P(F\cap J)}{P(F)}=\dfrac{0,1}{0,4}=0,25$.

III. Arbre pondéré et calculs de probabilité

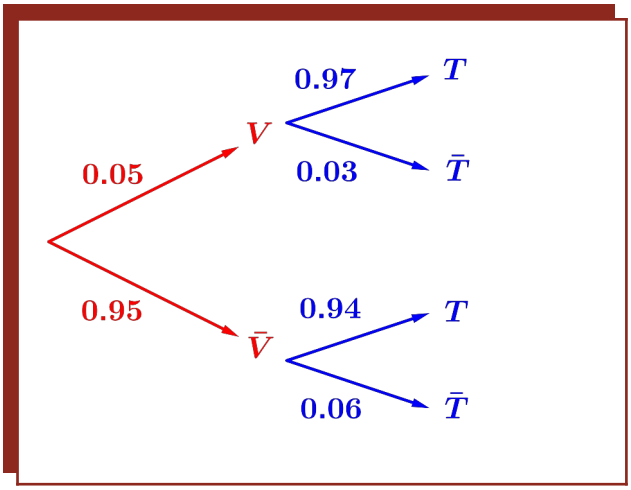
• La probabilité de l'événement correspondant à un chemin est obtenue en multipliant les probabilités portées par ses branches.
• La somme des probabilités sur les branches partant d'un même nœud est égale à 1.
• La probabilité de l'événement correspondant à plusieurs chemins est obtenue en additionnant les probabilités de chacun de ces chemins (**formule des probabilités totales**).

Le cas le plus fréquent correspond à la partition la plus simple (A et $\overline{A}$). Si on connaît les probabilité de B et $\overline{B}$ par l'intermédiaire de A et $\overline{A}$, on a l'arbre suivant :



• Le produit des probabilités inscrites sur chaque branche d'un chemin donne la probabilité de l'intersection des événements placés sur ce chemin.
$P(A\cap B)=P(A)\times P_A(B)$
• La somme des probabilités inscrites sur les branches issues d'un même nœud est égale à 1 (loi des nœuds).
$P_A(B)+P_{\overline{A}}(B)=1$
• La probabilité d'un événement E est la somme des probabilités des chemins qui aboutissent à E.
$P(B)=P(A\cap B)+P(\overline{A}\cap B)$
$=P(A)\times P_A(B)+P(\overline{A})\times P_{\overline{A}}(B)$

Exemple
Dans un pays, il y a 5% de la population contaminée par le coronavirus. On dispose d'un test de dépistage de ce virus qui a les propriétés suivantes
• La probabilité qu'une personne contaminée ait un test positif est de $0,97$ (sensibilité du test).
• La probabilité qu'une personne non contaminée ait un test négatif est de $0,94$ (spécificité du test). On fait passer un test à une personne choisie au hasard dans cette population.
On note les événements suivants :
V :« la personne est contaminée par le virus »
T :« le test est positif »



• La probabilité que le test soit positif est :
$P(T)=P(V\cap T)+P(\overline{V}\cap T)$
$=0,05\times 0,97+0,95\times 0,94$
$=0,9415$

• La probabilité que la personne soit contaminée sachant que le test est positif est :
$P_T(V)=\dfrac{P(V\cap T)}{P(T)}$
$=\dfrac{0,05\times 0,97}{0,9415}$
$=0,051514$

IV. Formule des probabilités totales

Soit n (où $n \geqslant 2$) événements de probabilités non nulles A_1, A_2, …, A_n des sous-ensembles d'un univers Ω. Ces événements forment une **partition de l'univers** Ω (ou un **système complet d'événements**) si :
• Ils sont **disjoints** (ou **incompatibles**) **deux à deux**, c'est-à-dire que $A_i \cap A_j = \varnothing$ si $i \neq j$;
• $A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n = \Omega$.

Soit A_1, A_2, …, A_n des événements formant une partition de Ω.
Pour tout événement B de Ω, on a :

$$P(B) = P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + \ldots + P(A_n \cap B)$$

Ou, de manière équivalente :

$$P(B) = P(A_1) \times P_{A_1}(B) + P(A_2) \times P_{A_2}(B) + ... + P(A_n) \times P_{A_n}(B)$$

On appelle cette égalité la **formule des probabilités totales**.

V. Indépendance

• Soit A et B deux événements d'un univers Ω.
On dit que A et B sont **indépendants** lorsque $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.
• Soit A et B deux événements d'un univers Ω tels que $P(A) \neq 0$.
Les événements A et B sont **indépendants** si et seulement si $P_A(B) = P(B)$.

Soit A et B deux événements d'un univers Ω.
Si A et B sont indépendants, alors il en est de même pour :
• $\overline{A}$ et B • A et $\overline{B}$ • $\overline{A}$ et $\overline{B}$

En réalisant successivement deux expériences aléatoires telles que les événements associés à la première soit indépendants des événements associés à la seconde, on dit que l'on réalise une **succession de deux épreuves indépendantes**.

• Deux expériences sont dites **indépendantes** si le résultat de l'une n'influe pas sur le résultat de l'autre.
• Deux expériences sont dites **identiques** si elles ont les mêmes issues et les mêmes probabilités pour chaque issue.

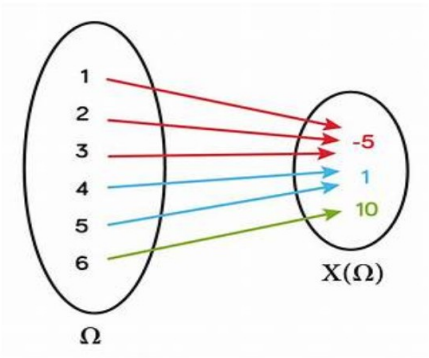
Variables aléatoires

I. Variables aléatoires

I.1 Variable aléatoire discrète

Soit une expérience aléatoire dont l'univers est l'ensemble Ω.
Une **variable aléatoire** est une fonction définie sur Ω et à valeurs dans $\mathbb{R}$. On la note X.

Exemple
On lance un dé équilibré à six faces et on observe le résultat affiché sur la face supérieure.
• « Si le résultat obtenu est 1, 2 ou 3, je perds 5 jetons »
• « Si le résultat obtenu est 4 ou 5, je gagne 1 jeton »
• « Sinon, je gagne 10 jetons »
On peut définir une variable aléatoire X qui décrit les gains de ce jeu. On a donc $X(1)=-5$, $X(2)=-5$, $X(3)=-5$, $X(4)=1$, $X(5)=1$, $X(6)=10$.
On peut représenter la situation par le schéma ci-contre.



I.2 Loi de probabilité d'une variable aléatoire discrète

Soit X une variable aléatoire définie sur l'univers Ω. L'ensemble des valeurs prises par X est $\{x_1;x_2;\ldots;x_k\}$, où les valeurs sont rangées par ordre croissant. Le nombre x_i est associé à une ou plusieurs issues de Ω, avec $1\leqslant i\leqslant k$.

• L'événement « $X=x_i$ » est l'ensemble des issues de Ω auxquelles on a associé la valeur x_i.
• L'événement « $X\geqslant x_i$ » est l'ensemble des issues de Ω auxquelles on a associé une valeur supérieure ou égale à x_i. On définit de même « $X> x_i$ », « $X< x_i$ », et « $X\leqslant x_i$ ».
• La probabilité de l'événement « $X=x_i$ » est la probabilité de l'événement formé de toutes les issues associées au nombre x_i. On la note $P(X=x_i)$ ou p_i.
• La probabilité de l'événement « $X\geqslant x_i$ » est la probabilité de l'événement formé de toutes les issues associées au nombre supérieurs ou égaux à x_i. On la note $P(X\geqslant x_i)$.

Une variable aléatoire X est définie sur l'univers Ω d'une expérience aléatoire.
Notons $\{x_1;x_2;\ldots;x_k\}$ l'ensemble des valeurs prises par X.
La loi de probabilité de X est la fonction qui à chaque valeur x_i lui associe sa probabilité notée $P(X=x_i)$. On la représente sous forme d'un tableau de valeurs :

x_i	x_1	x_2	…	x_n
$P(X=x_i)$	$P(X=x_1)$	$P(X=x_2)$	…	$P(X=x_n)$

On a $p_1+p_2+\ldots+p_n=\sum_{i=1}^{k} p_i=1$ ou $P(X=x_1)+P(X=x_2)+\ldots+P(X=x_n)=\sum_{i=1}^{n} P(X=x_i)=1$.

II. Espérance, variance et écart-type

• L'**espérance** mathématique de la variable aléatoire X est le réel noté $E(X)$ défini par :

$$E(X)=\sum_{i=1}^{n} p_i x_i = p_1 x_1 + p_2 x_2 + ... + p_n x_n$$

L'espérance représente la valeur moyenne que prend X si on répète un grand nombre de fois l'expérience aléatoire.

• La **variance** de la variable aléatoire X est le réel positif noté $V(X)$ défini par :

$$V(X)=\sum_{i=1}^{n} p_i (x_i - E(X))^2 = p_1 (x_1 - E(X))^2 + p_2 (x_2 - E(X))^2 + ... + p_n (x_n - E(X))^2$$

• L'**écart-type** de la variable aléatoire X est définie comme la racine carrée de la variance :

$$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}$$

Remarques

• La loi des grands nombres nous permet d'interpréter l'espérance et l'écart-type de la loi de probabilité de X. Elle nous dit en effet qu'en répétant un grand nombre de fois l'expérience, les fréquences observées se rapprochent de la probabilité théorique. En conséquence, la moyenne des résultats obtenus se rapproche de l'espérance de la loi de probabilité de X. L'espérance est donc la moyenne que l'on peut espérer en répétant l'expérience un grand nombre de fois.
De même pour l'écart-type, qui est un paramètre de dispersion pour une série statistique, il peut être interprété comme un paramètre de dispersion « espérée » pour la loi de probabilité de X.
Pour le jeu proposé en exemple, l'espérance de $-0,5$ signifie que l'on peut « espérer » ou « craindre » perdre en moyenne $0,5$ jeton par partie (ou perdre 1 jeton toutes les 2 parties).
Mais avec une moyenne égale à $-0,5$, l'écart-type d'environ $5,41$ exprime le fait que le risque d'obtenir un gain négatif (une perte) est important.

• Si X représente le gain d'un jeu d'argent, si on a $E(X)=0$ alors on dit que le jeu est équitable.

Formule de König-Huygens

$$V(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\sum_{i=1}^{n} p_i x_i^2 - [E(X)^2] = p_1 x_1^2 + p_2 x_2^2 + ... + p_n x_n^2 - [E(X)^2]$$

Soit a et b deux réels quelconques. La variable aléatoire Y, dont la loi de probabilité est donnée par le tableau suivant, est notée $aX+b$.

Valeur de Y	ax_1+b	ax_2+b	...	ax_n+b
Probabilité	p_1	p_2	…	p_n

On pose $Y=aX+b$.

Soit X une variable aléatoire et a et b deux nombres réels. Alors :

- $E(aX+b)=aE(X)+b$
- $V(aX)=a^2V(X)$
- $\sigma(aX+b)=|a|\sigma(X)$