

Probabilités conditionnelles et indépendance

I. Généralités

- Une **expérience aléatoire** est une expérience dont le résultat dépend du hasard. Chacun des résultats possibles s'appelle **éventualité** ou **issue**. L'ensemble Ω (ou E) de tous les résultats possibles d'une expérience aléatoire s'appelle l'**univers** de l'expérience.
- Un **événement** A est une partie de l'univers Ω (un événement peut donc être constitué de zéro, une ou plusieurs issues de Ω).
- Un **événement élémentaire** est une partie de Ω qui ne contient qu'une seule issue.
- L'**événement contraire** de A , noté $\bar{A}$, est la partie constituée de toutes les issues de Ω qui ne sont pas dans A .

- $P(\emptyset)=0$ et $P(\Omega)=1$.
- La probabilité d'un événement A , notée $P(A)$, est la **somme des probabilités des événements élémentaires inclus dans A** .
- Pour tout événement A , on a $0 \leq P(A) \leq 1$.
- La somme des probabilités des événements élémentaires vaut 1.
- La probabilité de l'événement contraire d'un événement A est : $P(\bar{A})=1-P(A)$.

- Si $\Omega=\{e_1; e_2; \dots; e_n\}$ et si à chaque issue e_i on associe un nombre $P(e_i)$ tel que $0 \leq P(e_i) \leq 1$ et $P(e_1)+P(e_2)+\dots+P(e_n)=1$, on dit que l'on a défini une **loi de probabilité** sur Ω .
- Lorsque tous les événements élémentaires d'une expérience aléatoire ont la même probabilité, on dit alors qu'ils sont **équiprobables**. On parle d'**expérience équiprobable** ou de **loi équirépartie**.

- L'événement « **A et B** », noté $A \cap B$, s'appelle l'**intersection** des événements A et B . Il est réalisé lorsque **les deux événements sont réalisés simultanément**.
- L'événement « **A ou B** », noté $A \cup B$, s'appelle la **réunion** des événements A et B . Il est réalisé lorsqu'**au moins l'un des deux événements est réalisé**.
- Deux événements A et B sont dits **incompatibles** si $A \cap B = \emptyset$.

Soit A un événement d'un univers Ω . Pour une loi équirépartie, on a :

$$P(A) = \frac{\text{nombre d'éléments de } A}{\text{nombre d'éléments de } \Omega} = \frac{\text{nombre de cas favorables à } A}{\text{nombre de cas possibles}}$$

Soit A et B deux événements d'un univers Ω .

- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.
- Si A et B sont **incompatibles**, $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

II. Probabilités conditionnelles

Soit A et B deux événements d'un univers Ω avec $P(A) \neq 0$.

La **probabilité conditionnelle** que l'événement B se réalise sachant que l'événement A est

réalisé est notée $P_A(B)$, et elle est définie par : $P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$.

La probabilité $P_A(B)$ vérifie bien $0 \leq P_A(B) \leq 1$ et $P_A(B) + P_A(\bar{B}) = 1$.

Soit A et B deux événements d'un univers Ω avec $P(A) \neq 0$ et $P(B) \neq 0$. Alors :

$$P(A) \times P_A(B) = P(B) \times P_B(A)$$

Utilisation de tableaux

Les tableaux à double entrées permettent une présentation claire de certaines expériences aléatoires et facilitent le calcul des probabilités conditionnelles.

	B	$\bar{B}$	Total
A	$P(A \cap B)$	$P(A \cap \bar{B})$	$P(A)$
$\bar{A}$	$P(\bar{A} \cap B)$	$P(\bar{A} \cap \bar{B})$	$P(\bar{A})$
Total	$P(B)$	$P(\bar{B})$	1

- $P(A \cap B)$ se lit à l'intersection de la ligne A et de la colonne B .
- $P(A)$ (respectivement $P(B)$) se lit sur la dernière colonne (respectivement la dernière ligne).
- $P_A(B)$ (ou $P_B(A)$) s'obtient en calculant le quotient des deux probabilités adéquates :

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \text{ et } P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Exemple

Un club sportif rassemble 180 membres répartis en juniors et seniors. On compte 135 seniors dont 81 hommes. Il y a 27 garçons parmi les seniors.

En choisissant une femme au hasard, calculer la probabilité d'avoir une juniore.

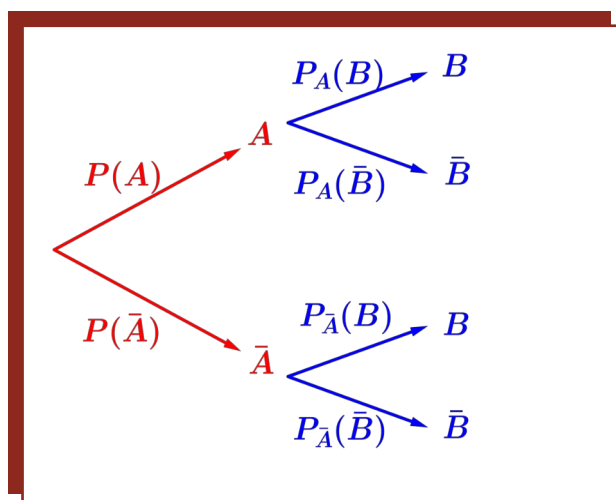
	J	S	Total
H	$\frac{27}{180} = 0,15$	$\frac{81}{180} = 0,45$	$0,15 + 0,45 = 0,6$
F	0,1	0,3	0,4
Total	0,25	$\frac{135}{180} = 0,75$	1

Ainsi $P_F(J) = \frac{P(F \cap J)}{P(F)} = \frac{0,1}{0,4} = 0,25$.

III. Arbre pondéré et calculs de probabilité

- La probabilité de l'événement correspondant à un chemin est obtenue en multipliant les probabilités portées par ses branches.
- La somme des probabilités sur les branches partant d'un même nœud est égale à 1.
- La probabilité de l'événement correspondant à plusieurs chemins est obtenue en additionnant les probabilités de chacun de ces chemins (**formule des probabilités totales**).

Le cas le plus fréquent correspond à la partition la plus simple (A et $\bar{A}$). Si on connaît les probabilités de B et $\bar{B}$ par l'intermédiaire de A et $\bar{A}$, on a l'arbre suivant :



- Le produit des probabilités inscrites sur chaque branche d'un chemin donne la probabilité de l'intersection des événements placés sur ce chemin.

$$P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$$
- La somme des probabilités inscrites sur les branches issues d'un même nœud est égale à 1 (loi des nœuds).

$$P_A(B) + P_A(\bar{B}) = 1$$
- La probabilité d'un événement E est la somme des probabilités des chemins qui aboutissent à E .

$$P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B)$$

$$= P(A) \times P_A(B) + P(\bar{A}) \times P_{\bar{A}}(B)$$

Exemple

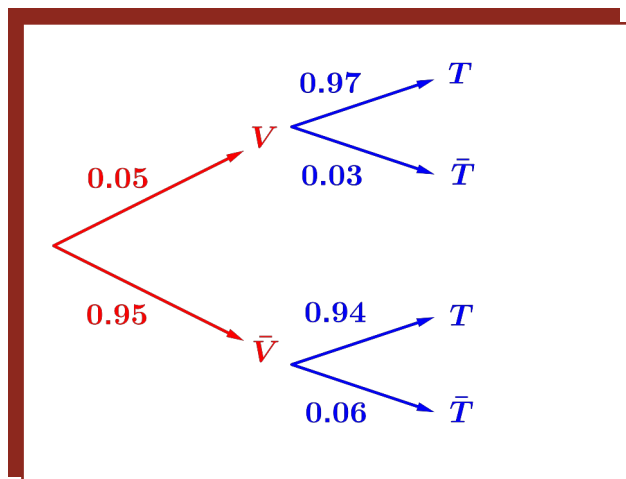
Dans un pays, il y a 5% de la population contaminée par le coronavirus. On dispose d'un test de dépistage de ce virus qui a les propriétés suivantes

- La probabilité qu'une personne contaminée ait un test positif est de 0,97 (sensibilité du test).
- La probabilité qu'une personne non contaminée ait un test négatif est de 0,94 (spécificité du test). On fait passer un test à une personne choisie au hasard dans cette population.

On note les événements suivants :

V : « la personne est contaminée par le virus »

T : « le test est positif »



- La probabilité que le test soit positif est :

$$P(T) = P(V \cap T) + P(\bar{V} \cap T)$$

$$= 0,05 \times 0,97 + 0,95 \times 0,94$$

$$= 0,9415$$

- La probabilité que la personne soit contaminée sachant que le test est positif est :

$$P_T(V) = \frac{P(V \cap T)}{P(T)}$$

$$= \frac{0,05 \times 0,97}{0,9415}$$

$$= 0,051514$$

IV. Formule des probabilités totales

Soit n (où $n \geq 2$) événements de probabilités non nulles $A_1, A_2, \dots, A_n$ des sous-ensembles d'un univers Ω . Ces événements forment une **partition de l'univers Ω** (ou un **système complet d'événements**) si :

- Ils sont **disjoints** (ou **incompatibles**) deux à deux, c'est-à-dire que $A_i \cap A_j = \emptyset$ si $i \neq j$;
- $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = \Omega$.

Soit $A_1, A_2, \dots, A_n$ des événements formant une partition de Ω .

Pour tout événement B de Ω , on a :

$$P(B) = P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + \dots + P(A_n \cap B)$$

Ou, de manière équivalente :

$$P(B) = P(A_1) \times P_{A_1}(B) + P(A_2) \times P_{A_2}(B) + \dots + P(A_n) \times P_{A_n}(B)$$

On appelle cette égalité la **formule des probabilités totales**.

V. Indépendance

- Soit A et B deux événements d'un univers Ω .

On dit que A et B sont **indépendants** lorsque $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

- Soit A et B deux événements d'un univers Ω tels que $P(A) \neq 0$.

Les événements A et B sont **indépendants** si et seulement si $P_A(B) = P(B)$.

Soit A et B deux événements d'un univers Ω .

Si A et B sont indépendants, alors il en est de même pour :

- $\bar{A}$ et B
- A et $\bar{B}$
- $\bar{A}$ et $\bar{B}$

En réalisant successivement deux expériences aléatoires telles que les événements associés à la première soit indépendants des événements associés à la seconde, on dit que l'on réalise une **succession de deux épreuves indépendantes**.

- Deux expériences sont dites **indépendantes** si le résultat de l'une n'influe pas sur le résultat de l'autre.
- Deux expériences sont dites **identiques** si elles ont les mêmes issues et les mêmes probabilités pour chaque issue.

Variables aléatoires

I. Variables aléatoires

I.1 Variable aléatoire discrète

Soit une expérience aléatoire dont l'univers est l'ensemble Ω .

Une **variable aléatoire** est une fonction définie sur Ω et à valeurs dans $\mathbb{R}$. On la note X .

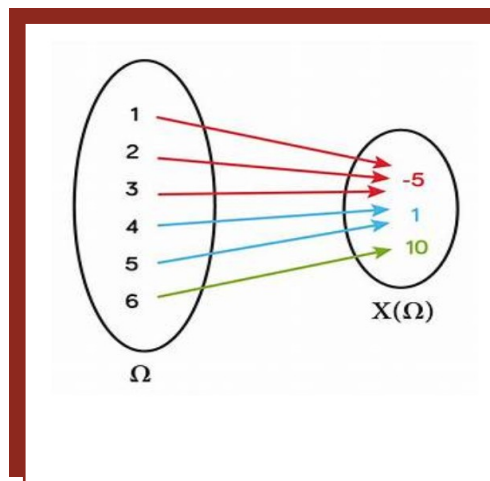
Exemple

On lance un dé équilibré à six faces et on observe le résultat affiché sur la face supérieure.

- « Si le résultat obtenu est 1, 2 ou 3, je perds 5 jetons »
- « Si le résultat obtenu est 4 ou 5, je gagne 1 jeton »
- « Sinon, je gagne 10 jetons »

On peut définir une variable aléatoire X qui décrit les gains de ce jeu. On a donc $X(1)=-5$, $X(2)=-5$, $X(3)=-5$, $X(4)=1$, $X(5)=1$, $X(6)=10$.

On peut représenter la situation par le schéma ci-contre.



I.2 Loi de probabilité d'une variable aléatoire discrète

Soit X une variable aléatoire définie sur l'univers Ω . L'ensemble des valeurs prises par X est $\{x_1; x_2; \dots; x_k\}$, où les valeurs sont rangées par ordre croissant. Le nombre x_i est associé à une ou plusieurs issues de Ω , avec $1 \leq i \leq k$.

- L'événement « $X=x_i$ » est l'ensemble des issues de Ω auxquelles on a associé la valeur x_i .
- L'événement « $X \geq x_i$ » est l'ensemble des issues de Ω auxquelles on a associé une valeur supérieure ou égale à x_i . On définit de même « $X > x_i$ », « $X < x_i$ », et « $X \leq x_i$ ».
- La probabilité de l'événement « $X=x_i$ » est la probabilité de l'événement formé de toutes les issues associées au nombre x_i . On la note $P(X=x_i)$ ou p_i .
- La probabilité de l'événement « $X \geq x_i$ » est la probabilité de l'événement formé de toutes les issues associées au nombre supérieurs ou égaux à x_i . On la note $P(X \geq x_i)$.

Une variable aléatoire X est définie sur l'univers Ω d'une expérience aléatoire.

Notons $\{x_1; x_2; \dots; x_k\}$ l'ensemble des valeurs prises par X .

La loi de probabilité de X est la fonction qui à chaque valeur x_i lui associe sa probabilité notée $P(X=x_i)$. On la représente sous forme d'un tableau de valeurs :

x_i	x_1	x_2	...	x_n
$P(X=x_i)$	$P(X=x_1)$	$P(X=x_2)$	...	$P(X=x_n)$

On a $p_1 + p_2 + \dots + p_n = \sum_{i=1}^k p_i = 1$ ou $P(X=x_1) + P(X=x_2) + \dots + P(X=x_n) = \sum_{i=1}^n P(X=x_i) = 1$.

II. Espérance, variance et écart-type

- L'**espérance** mathématique de la variable aléatoire X est le réel noté $E(X)$ défini par :

$$E(X) = \sum_{i=1}^n p_i x_i = p_1 x_1 + p_2 x_2 + \dots + p_n x_n$$

L'espérance représente la valeur moyenne que prend X si on répète un grand nombre de fois l'expérience aléatoire.

- La **variance** de la variable aléatoire X est le réel positif noté $V(X)$ défini par :

$$V(X) = \sum_{i=1}^n p_i (x_i - E(X))^2 = p_1 (x_1 - E(X))^2 + p_2 (x_2 - E(X))^2 + \dots + p_n (x_n - E(X))^2$$

- L'**écart-type** de la variable aléatoire X est définie comme la racine carrée de la variance :

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

Remarques

- La loi des grands nombres nous permet d'interpréter l'espérance et l'écart-type de la loi de probabilité de X . Elle nous dit en effet qu'en répétant un grand nombre de fois l'expérience, les fréquences observées se rapprochent de la probabilité théorique. En conséquence, la moyenne des résultats obtenus se rapproche de l'espérance de la loi de probabilité de X . L'espérance est donc la moyenne que l'on peut espérer en répétant l'expérience un grand nombre de fois.
De même pour l'écart-type, qui est un paramètre de dispersion pour une série statistique, il peut être interprété comme un paramètre de dispersion « espérée » pour la loi de probabilité de X .
Pour le jeu proposé en exemple, l'espérance de $-0,5$ signifie que l'on peut « espérer » ou « craindre » perdre en moyenne $0,5$ jeton par partie (ou perdre 1 jeton toutes les 2 parties).
Mais avec une moyenne égale à $-0,5$, l'écart-type d'environ $5,41$ exprime le fait que le risque d'obtenir un gain négatif (une perte) est important.
- Si X représente le gain d'un jeu d'argent, si on a $E(X)=0$ alors on dit que le jeu est équitable.

Formule de König-Huygens

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \sum_{i=1}^n p_i x_i^2 - [E(X)]^2 = p_1 x_1^2 + p_2 x_2^2 + \dots + p_n x_n^2 - [E(X)]^2$$

Soit a et b deux réels quelconques. La variable aléatoire Y , dont la loi de probabilité est donnée par le tableau suivant, est notée $aX + b$.

Valeur de Y	$ax_1 + b$	$ax_2 + b$	...	$ax_n + b$
Probabilité	p_1	p_2	...	p_n

On pose $Y = aX + b$.

Soit X une variable aléatoire et a et b deux nombres réels. Alors :

- $E(aX + b) = aE(X) + b$
- $V(aX) = a^2 V(X)$
- $\sigma(aX + b) = |a| \sigma(X)$

Lois discrètes

I. Loi uniforme

Une variable aléatoire X suit la **loi uniforme sur** $\{1; 2; \dots; n\}$ si elle prend pour valeurs les entiers 1 à n de manière équiprobable, c'est-à-dire si $P(X=k) = \frac{1}{n}$ pour tout $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$.

Soit X une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $\{1; 2; \dots; n\}$. Alors on a :

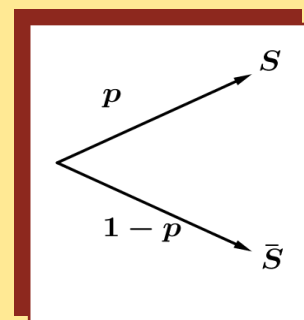
$$\bullet E(X) = \frac{n+1}{2} \quad \bullet V(X) = \frac{n^2-1}{12} \quad \bullet \sigma(X) = \sqrt{\frac{n^2-1}{12}}$$

II. Épreuve, loi et schéma de Bernoulli

II.1 Épreuve de Bernoulli

Une **épreuve de Bernoulli** de paramètre p (compris entre 0 et 1) est une expérience aléatoire comportant deux issues :

- l'une appelée succès, noté S , de probabilité p .
- l'autre appelée échec, noté $\bar{S}$ ou E , de probabilité $q = 1 - p$.



II.2 Loi de Bernoulli

Notons X la variable aléatoire prenant la valeur 1 en cas de succès et la valeur 0 en cas d'échec. On dit que X suit la **loi de Bernoulli** de paramètre p .

Autrement dit, on a $P(X=1) = p$ et $P(X=0) = 1 - p$.

On peut résumer la loi de Bernoulli par le tableau suivant :

x_i	1	0
$P(X=x_i)$	p	$1-p$

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi de Bernoulli de paramètre p .

- L'espérance de X est $E(X) = p$.
- La variance de X est $V(X) = p(1-p)$.
- L'écart-type de X est $\sigma(X) = \sqrt{p(1-p)}$.

II.3 Schéma de Bernoulli

Soit n un entier naturel et p un réel compris entre 0 et 1.

Un **schéma de Bernoulli** de paramètres n et p est une expérience aléatoire consistant à répéter n fois, de façon **identique et indépendante**, une épreuve de Bernoulli de paramètre p .

III. Coefficients binomiaux et triangle de Pascal

On considère l'arbre associé à un schéma de Bernoulli de paramètres n et p .

Le nombre de chemins dans l'arbre permettant de réaliser k succès est noté $\binom{n}{k}$.

Les nombres $\binom{n}{k}$ sont appelés les **coefficients binomiaux**.

Méthode pour déterminer les coefficients binomiaux avec la calculatrice :

- Casio 35+ et supérieur : Pour calculer $\binom{5}{2}$, dans le menu RUN (calcul), appuyer sur la touche OPTN, puis choisir PROB. Tapez 5, puis choisir nCr, puis taper 2 et EXE.
- TI 82 et supérieur : Pour calculer $\binom{5}{2}$, taper 5, puis appuyer sur la touche MATH, choisir le menu PROB, puis choisir nCr ou Combinaison (version fr), puis taper 2 et ENTER.

Pour tous n et k entiers naturels tels que $1 \leq k \leq n$, on a :

$$\begin{aligned} \triangleright \binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1 & \qquad \triangleright \binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n \end{aligned}$$

Propriété de symétrie

Pour tous n et k entiers naturels tels que $0 \leq k \leq n$, on a $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

Relation de Pascal

Pour tous entiers naturels $n \geq 2$ et k vérifiant $1 \leq k \leq n-1$, $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$.

Remarque

Ces propriétés permettent de tracer le triangle de Pascal.

- $\binom{n}{0} = 1$ assure que la première colonne ne contient que des 1 ;
- $\binom{n}{n} = 1$ assure que la diagonale ne contient que des 1 ;
- $\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}$ permet de déterminer n'importe quel coefficient binomial à partir de deux connus auparavant.

Par exemple, pour $n=5$ et $k=2$, on a

$$\binom{5}{2} = \binom{4}{1} + \binom{4}{2} = 4 + 6 = 10.$$

$n \backslash k$	0	1	2	3	4	5
0	1					
1	1	1				
2	1	2	1			
3	1	3	3	1		
4	1	4	6	4	1	
5	1	5	10	10	5	1

IV. Loi binomiale

Soit un schéma de Bernoulli de paramètres n et p , correspondant à la répétition de n épreuves identiques et indépendantes et dont la probabilité du succès d'une épreuve est p .

Soit X la variable aléatoire égale au nombre de succès obtenus lors de ces n épreuves.

On dit que X suit la **loi binomiale** de paramètres n et p . On note $X \sim B(n; p)$.

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi binomiale $B(n; p)$.

Pour tout entier $k \in [0; n]$, on a $P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$.

Méthode pour déterminer les probabilités d'une loi binomiale avec la calculatrice :

• Casio 35+ et supérieur : Pour calculer $P(X=20)$ avec X qui suit la loi $B\left(100; \frac{1}{6}\right)$: Choisir le menu STAT, puis DIST, puis BINM, puis Bpd. Rentrez les paramètres ("x" vaut ici 20, "NumTrial" vaut ici 100, et "p" vaut $\frac{1}{6}$). Enfin, sélectionner CALC.

• TI 82 et supérieur : Pour calculer $P(X=20)$ avec X qui suit la loi $B\left(100; \frac{1}{6}\right)$: Appuyer sur 2nd+DISTR (au-dessus de la touche var), puis choisissez binompdf ou binomfdp (version Fr.). Complétez ensuite les paramètres (ici nombre d'essais, probabilité de succès et valeur de x). L'ordre des paramètres est donc n , puis p et enfin k .

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi binomiale $B(n; p)$.

- L'espérance de X est $E(X) = np$.
- La variance de X est $V(X) = np(1-p)$.
- L'écart-type de X est $\sigma(X) = \sqrt{np(1-p)}$.

Représentation graphique

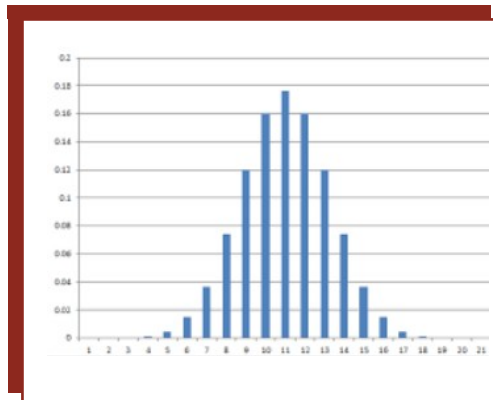
On peut représenter graphiquement une loi binomiale par un diagramme en bâtons en mettant en abscisse les valeurs prises par la variable aléatoire et en ordonnée les probabilités correspondantes. Le diagramme en bâtons est en forme de cloche et est approximativement centré sur son espérance.

Exemple

Le diagramme en bâtons associé à la loi $B(40; 0,5)$, sur lequel k varie de 0 à 40 en abscisses, montre, pour chaque valeur de k , la hauteur de la barre correspondant à $P(X=k)$.

Par exemple, pour $k=10$, la hauteur de la barre est $P(X=10)=0,16$.

Le diagramme est en forme de cloche et est centré en 11. Or l'espérance vaut $E(X)=40 \times 0,5 = 20$, ce qui signifie que cette loi binomiale n'est pas centrée sur son espérance.



Remarque

Pour des variables aléatoires suivant des lois binomiales de même paramètre n , plus p est éloigné de $0,5$ et plus l'écart-type est petit. En conséquence, plus la cloche est « étroite » et « haute ».

V. Échantillonnage

V.1 Intervalle de fluctuation

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi binomiale $B(n; p)$.

Soit α un réel tel que $0 < \alpha < 1$ et a et b deux réels.

$[a; b]$ est un **intervalle de fluctuation au seuil de $1-\alpha$** si et seulement si $P(a \leq X \leq b) \geq 1-\alpha$.

Remarques

- On parle aussi de seuil de confiance, de niveau de confiance ou encore de coefficient de confiance.
- Dans la pratique, on cherchera souvent un intervalle dont l'amplitude est la plus petite possible.
- Selon le contexte, l'intervalle est généralement de la forme $[0; k]$, $[k; n]$ ou $[k; k']$.

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi binomiale $B(n; p)$.

Soit α un réel tel que $0 < \alpha < 1$ et a et b deux réels.

L'intervalle $[a; b]$ tel que a et b soient les plus petits entiers vérifiant $P(X \leq a) > \frac{\alpha}{2}$ et

$P(X \leq b) \geq 1 - \frac{\alpha}{2}$ est un **intervalle de fluctuation centré au seuil de $1-\alpha$** associé à X .

V.2 Intervalle de fluctuation au seuil de 95%

Au sein d'une population, on suppose que la proportion d'un certain caractère est p .

On souhaite juger cette hypothèse. Pour cela, on prélève dans la population au hasard et avec remise (ou sans remise si la population étudiée est très grande), un échantillon de taille n sur lequel on observe une fréquence f de ce caractère.

Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres n et p .
 L'intervalle de fluctuation au seuil de 95% d'une fréquence, sur un échantillon de taille n est :

$$I = \left[\frac{a}{n}; \frac{b}{n} \right]$$
 avec a : le plus petit entier tel que $P(X \leq a) > 0,025$.
 b : le plus petit entier tel que $P(X \leq b) \geq 0,975$.

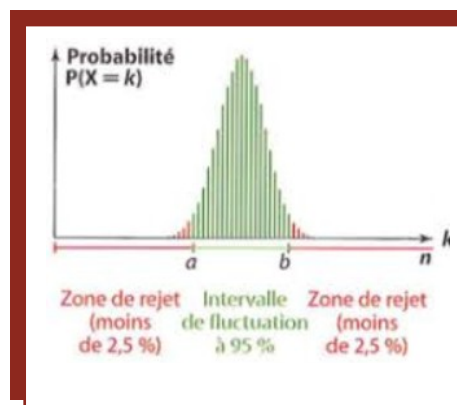
Exemple

Dans le graphique ci-contre, 95% des valeurs se situent entre les réels a et b .

Nécessairement, 5% des valeurs sont

« à l'extérieur ».

Par symétrie, 2,5 % de ces valeurs se situent à gauche de a et 2,5 % à droite de b .



V.3 Prise de décision

On fait l'hypothèse que la proportion d'un caractère dans une population est p .

On veut savoir si l'hypothèse est compatible avec l'échantillon étudié.

Prise de décision

Soit I l'intervalle de fluctuation au seuil de 95% selon la loi binomiale de paramètres n et p et f la fréquence observée du caractère étudié.

- Si $f \notin I$ alors on rejette l'échantillon avec une erreur au seuil de 5%. L'échantillon n'est pas représentatif.
- Si $f \in I$ alors on accepte l'hypothèse au seuil de 95%.

VI. Loi géométrique

VI.1 Définition, probabilité et espérance

On considère une épreuve de Bernoulli pour laquelle la probabilité d'un succès est p et on répète cette épreuve de Bernoulli de manière indépendante jusqu'à l'obtention d'un succès.

Soit X la variable aléatoire égale au nombre d'essais nécessaires pour obtenir un succès.

On dit que X suit la **loi géométrique** de paramètre p . On note $X \sim G(p)$.

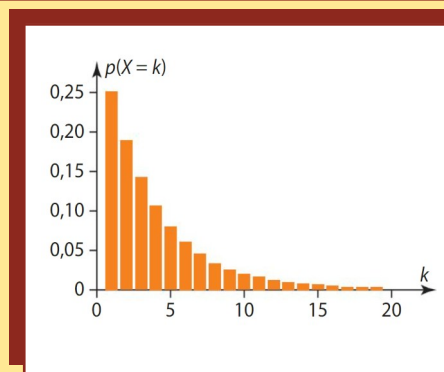
Soit X une variable aléatoire suivant la loi géométrique de paramètre p et $k \in \mathbb{N}^*$. Alors :

- $P(X=k) = p(1-p)^{k-1}$
- $P(X \leq k) = 1 - (1-p)^k$
- $P(X > k) = (1-p)^k$

Soit X une variable aléatoire suivant la loi géométrique de paramètre p et $k \in \mathbb{N}^*$.

Alors l'espérance de X est $E(X) = \frac{1}{p}$.

Pour une variable aléatoire X suivant la loi géométrique $G(p)$, son diagramme en barres associés correspond à une décroissance exponentielle et $P(X=1)$ est la hauteur de la première barre.



VI.2 Loi sans vieillissement

Une variable aléatoire X suit une loi **sans vieillissement** si pour tous entiers naturels non nuls s et t , on a $P_{X>s}(X>s+t) = P(X>t)$.

La loi géométrique est une loi sans vieillissement.

Lois à densité

I. Variables aléatoires à densité

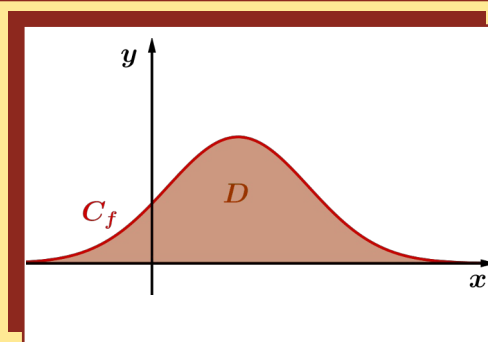
I.1 Variable aléatoire continue

Soit Ω l'univers d'une expérience aléatoire. Une variable aléatoire X définie sur Ω , qui peut prendre comme valeur tous les nombres réels d'un intervalle I de $\mathbb{R}$, est dite **continue**.

I.2 Fonction densité

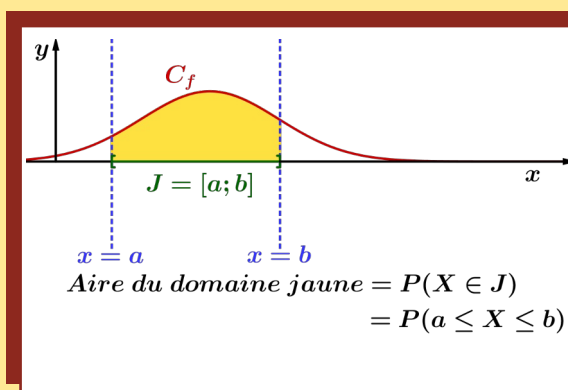
Une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ est appelée **fonction densité**, ou **densité de probabilité**, si :

- f est **positive** sur $\mathbb{R}$.
- f est **continue** sur $\mathbb{R}$ (sauf éventuellement en un nombre fini de points).
- L'**aire du domaine D** , domaine délimité par la courbe représentative C_f de la fonction f dans un repère orthogonal, et par l'axe des abscisses, est **égale à 1**.



I.3 Probabilité d'un événement

Soit Ω l'univers d'une expérience aléatoire et X une variable aléatoire continue de densité f . La probabilité de l'événement $\{X \in J\}$, où J est un intervalle de $\mathbb{R}$, est notée $P(X \in J)$, et est définie comme l'aire du domaine suivant :

$$\{(x; y); x \in J \text{ et } 0 \leq y \leq f(x)\}$$


Remarque

Par cette définition, la probabilité de l'événement $\{X \in \mathbb{R}\}$ correspond à l'aire du domaine D , aire du domaine délimité par la courbe C_f et l'axe des abscisses. Par la troisième caractéristique de la densité f , cette aire est égale à 1 (donc $\int_D f(x) dx = 1$). On a alors $P(X \in \mathbb{R}) = 1$.

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans un intervalle I qui suit la loi à densité f . Alors : Pour tous réels a et b de I , $P(X \in [a; b]) = P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x) dx$.

Soit X une variable aléatoire qui suit une loi à densité f sur I . Alors :

- $\int_I f(x) dx = 1$.
- Pour tout réel a de I , $P(X=a) = \int_a^a f(x) dx = 0$.
- Pour tout réel a de I , $P(X > a) = 1 - P(X \leq a)$.
- Pour tous réels a et b , $P(a < X < b) = P(X < b) - P(X \leq a)$.
- $P(X \notin J) = 1 - P(X \in J)$.
- Pour tout intervalle J et K inclus dans I , $P(X \in J \cup K) = P(X \in J) + P(X \in K) - P(X \in J \cap K)$.

I.5 Fonction de répartition

Soit X une variable aléatoire continue de densité f dont la courbe représentative est notée C_f . La fonction de répartition associée à la variable aléatoire X est la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$F(x) = P(X \leq x) = P(X \in]a; x])$$

II. Espérance et variance

Soit a et b deux nombres réels distincts tels que $a < b$ et X une variable aléatoire de densité f sur $[a; b]$. Alors l'espérance mathématique et la variance de X sont les réels notés $E(X)$ et $V(X)$ définis par :

$$E(X) = \int_a^b x f(x) dx \text{ et } V(X) = \int_a^b (x - E(X))^2 f(x) dx$$

III. Loi uniforme sur $[0; 1]$

Quand on considère une variable aléatoire donnant un nombre réel choisi au hasard entre 0 et 1, on est dans une situation où la probabilité de chaque issue est la même (équiprobabilité).

Ainsi, dans cette situation on choisira comme densité de probabilité une fonction constante.

On appelle loi uniforme sur $I = [0; 1]$ la loi de densité de probabilité f , où f est la **fonction constante égale à 1** pour tout x de I . On note $X \sim U([0; 1])$.

Soit X une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[0; 1]$. Alors :

$$\forall (c; d \in [0; 1])^2, \text{ tel que } c < d, P(c \leq X \leq d) = \int_c^d dx = [x]_c^d = d - c.$$

IV. Loi uniforme sur $[a; b]$

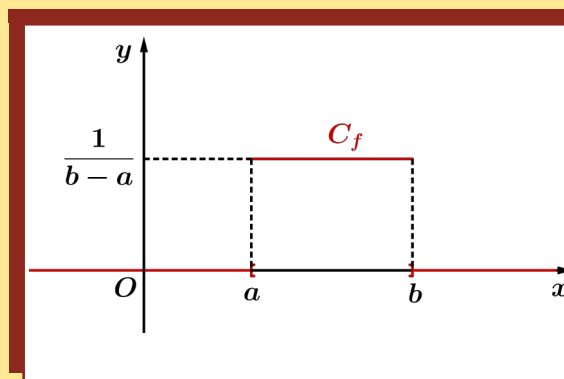
Quand on considère une variable aléatoire donnant un nombre réel choisi au hasard entre a et b , on est dans une situation équiprobable. On choisira donc aussi comme densité de probabilité une fonction constante.

IV.1 Définition

Soit a et b deux réels tels que $a < b$.
On dit qu'une variable aléatoire continue X suit une loi uniforme sur l'intervalle $[a; b]$ si sa densité f est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{si } a \leq x \leq b \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On note $X \sim U([a; b])$.



Soit une variable aléatoire X qui suit une loi uniforme sur $[a; b]$. Alors :

- $\forall x \in [a; b], P(a \leq X \leq x) = \int_a^x \frac{1}{b-a} dt = \frac{x-a}{b-a}$.
- $\forall (c; d) \in [a; b]^2$, tel que $c < d$, $P(c \leq X \leq d) = \int_c^d \frac{1}{b-a} dx = \frac{d-c}{b-a}$.

IV.2 Fonction de répartition

Soit une variable aléatoire X qui suit une loi uniforme sur $[a; b]$. Alors la fonction de répartition de X est la fonction définie sur $[a; b]$ par $F(x) = \frac{x-a}{b-a}$.

IV.3 Espérance et variance

Soit une variable aléatoire X qui suit une loi uniforme sur $[a; b]$.

L'espérance de X est $E(X) = \frac{a+b}{2}$ et la variance de X est $V(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$.

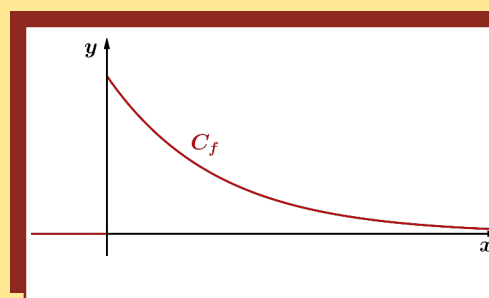
V. Loi exponentielle

V.1 Définition

On dit qu'une variable aléatoire continue X suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ si sa densité f est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

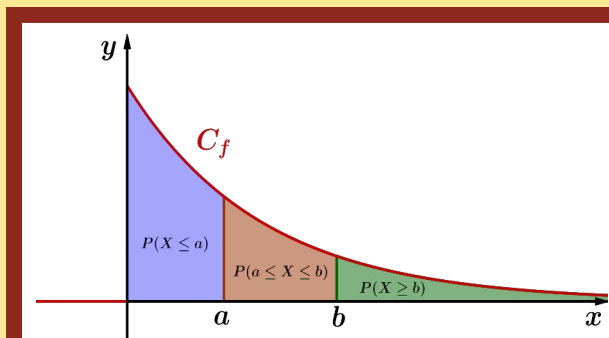
On note $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$.



Soit X une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

Alors, pour tous réels a et b :

- $P(X \leq a) = 1 - e^{-\lambda a}$.
- $P(a \leq X \leq b) = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}$.
- $P(X \geq b) = e^{-\lambda b}$.



V.2 Fonction de répartition

V.2 Fonction de répartition

Soit une variable aléatoire X qui suit la loi exponentielle. Alors la fonction de répartition de X est la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$.

V.3 Espérance

L'espérance d'une variable aléatoire X qui suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ est définie par :

$$E(X) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x t f(t) dt = \frac{1}{\lambda}$$

V.4 Loi sans vieillissement

Absence de mémoire

Une variable aléatoire X à valeurs positives suit une loi sans vieillissement si :

$$\forall t > 0 \text{ et } \forall h > 0, P_{X \geq t}(X \geq t + h) = P(X \geq h)$$

La loi exponentielle est une loi sans mémoire.

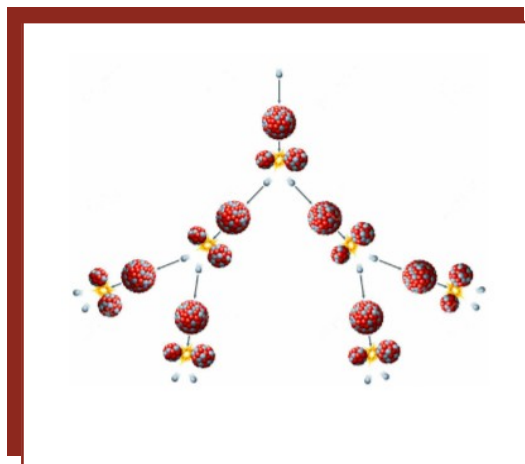
Remarque

On admettra que la loi exponentielle est la seule loi sans mémoire. Autrement dit, toute variable aléatoire à densité sans vieillissement suit une loi exponentielle.

V.5 Application à la physique

La désintégration radioactive est un phénomène aléatoire. c'est à dire que l'on ne peut pas, à l'échelle « microscopique », dire quand un noyau va se désintégrer.

Néanmoins, à l'échelle macroscopique, on a pu établir que la durée de vie d'un noyau radioactif suit une loi de durée de vie sans vieillissement, c'est à dire une loi exponentielle de paramètre λ , λ étant la constante radioactive (en s^{-1}) qui caractérise un radionucléide.



On appelle T la variable aléatoire associée à la durée de vie d'un noyau. La probabilité p qu'un noyau ne soit pas désintégré à l'instant t est donc :

$$p = P(T \geq t) = e^{-\lambda t}$$

Si au départ on compte N_0 noyaux au bout d'un temps t , on en comptera $N(t)$ qui vérifie :

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$$

On appelle demi-vie $t_{1/2}$, le temps nécessaire pour que le nombre de radionucléides soit divisé par deux. On a alors $e^{-\lambda t_{1/2}} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow -\lambda t_{1/2} = \ln\left(\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow -\lambda t_{1/2} = -\ln 2 \Leftrightarrow t_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda}$.

Soit X une variable aléatoire qui suit une loi de durée de vie sans vieillissement.

On appelle demi-vie la durée $t_{1/2}$ tel que $P(X > t_{1/2}) = \frac{1}{2}$. On obtient alors : $t_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda}$.

Remarque

La durée de vie moyenne τ d'un radionucléide est donnée par l'espérance mathématique :

$$\tau = \frac{1}{\lambda} \text{ où } \lambda = \frac{\ln 2}{t_{1/2}} \text{ et donc } \tau = \frac{t_{1/2}}{\ln 2} \approx 1,44 t_{1/2}$$

Soit X une variable aléatoire qui suit une loi de durée de vie sans vieillissement.

La durée de vie moyenne τ est donnée par l'espérance mathématique :

$$\tau = \frac{t_{1/2}}{\ln 2} \approx 1,44 t_{1/2}$$

Remarque

La demi-vie $t_{1/2}$ n'est pas égale à la durée de vie moyenne $\tau = E(X)$ car la courbe de densité de probabilité C_f n'est pas symétrique par rapport à la droite verticale d'équation $x = E(X)$.

