Probabilités conditionnelles

I. Expérience aléatoire et événement

Une **expérience aléatoire** est une expérience dont le résultat dépend du hasard. Chacun des résultats possibles s'appelle **éventualité** ou **issue**. L'ensemble Ω (ou E) de tous les résultats possibles d'une expérience aléatoire s'appelle l'**univers** de l'expérience.

• Un **événement** A est une partie de l'univers Ω (un événement peut donc être constitué de zéro, une ou plusieurs issues de Ω).
• Un **événement élémentaire** est une partie de Ω qui ne contient qu'une seule issue.
• Un **événement impossible** est un événement qui n'est réalisé par aucune issue.
• Un **événement certain** est un événement qui est réalisé par toutes les issues.
• L'**événement contraire** de A, noté $\overline{A}$, est la partie constituée de toutes les issues de Ω qui ne sont pas dans A.

Donner une **loi de probabilité** associée à une expérience aléatoire c'est en donner toutes les issues et attribuer une probabilité à chacune d'elles de sorte que la somme des probabilités des issues est égale à 1. On peut présenter les résultats sous la forme d'un tableau.

II. Probabilité d'un événement

II.1 Loi des grands nombres

On a simulé n lancers d'un dé équilibré à 6 faces et noté le nombre de fois que le chiffre 4 est sorti. Le tableau suivant résume les résultats obtenus.

Nombre de lancers *n*	10	50	100	500	1000	10000	100000
Nombre de 4 obtenu	3	10	19	76	161	1681	16649
Fréquence d'apparition du chiffre 4	$0{,}3$	$0{,}2$	$0{,}19$	$0{,}15$	$0{,}161$	$0{,}1681$	$0{,}16649$

Si le dé est bien équilibré, le chiffre 4 a une chance sur 6 de sortir, soit $\frac{1}{6}\approx 0{,}166\ldots$.

On peut remarquer que la fréquence d'apparition du chiffre 4 se rapproche de cette valeur théorique quand le nombre de lancers augmente.

Lors d'une expérience répétée n fois, les fréquences obtenues d'un événement A de l'expérience se rapprochent d'une valeur théorique lorsque n devient grand. Cette valeur s'appelle **probabilité de l'événement $\mathbf{A}$** et est notée $\mathbf{P(A)}$.

II.2 Calculs de probabilité

La probabilité d'un événement A est la **somme des probabilités des événements élémentaires inclus dans A**.

- Pour tout événement A, on a $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$.
- La **somme des probabilités des événements élémentaires est égale à 1**.

Remarques

- La probabilité de l'événement certain vaut 1. On la note $P(\Omega)=1$ (ou $P(E)=1$).
- La probabilité de l'événement vide vaut 0. On la note $P(\emptyset)=0$.

Lorsque tous les événements élémentaires d'une expérience aléatoire ont la même probabilité, on dit alors qu'ils sont **équiprobables**. On parle d'**expérience équiprobable** ou de **loi équirépartie.**

Lors d'une expérience aléatoire ayant n issues équiprobables :

- La probabilité de chaque événement élémentaire est $\frac{1}{n}$.
- La probabilité d'un événement A est $P(A)=\frac{\text{nombre d'issues favorables à } A}{\text{nombre total d'issues}}$.

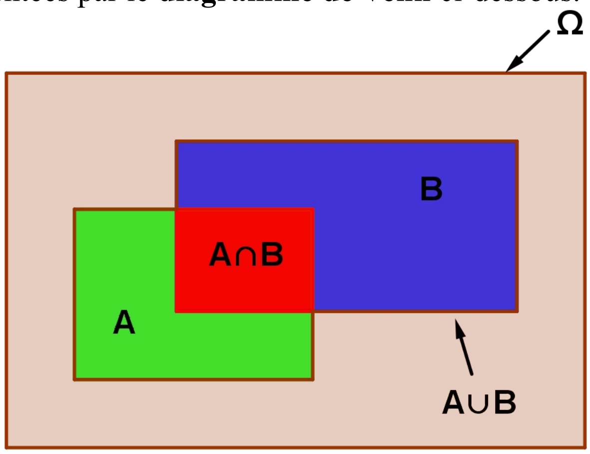
III.3 Événement contraire

La probabilité de l'**événement contraire** d'un événement A est : $P(\overline{A})=1-P(A)$

III. Réunion et intersection d'événements

- L'événement « **A et B** », noté $A \cap B$, s'appelle l'**intersection** des événements A et B.
Il est réalisé lorsque **les deux événements sont réalisés simultanément**.
- L'événement « **A ou B** », noté $A \cup B$, s'appelle la **réunion** des événements A et B.
Il est réalisé lorsqu'**au moins l'un des deux événements est réalisé**.

Ces situations sont représentées par le **diagramme de Venn** ci-dessous.



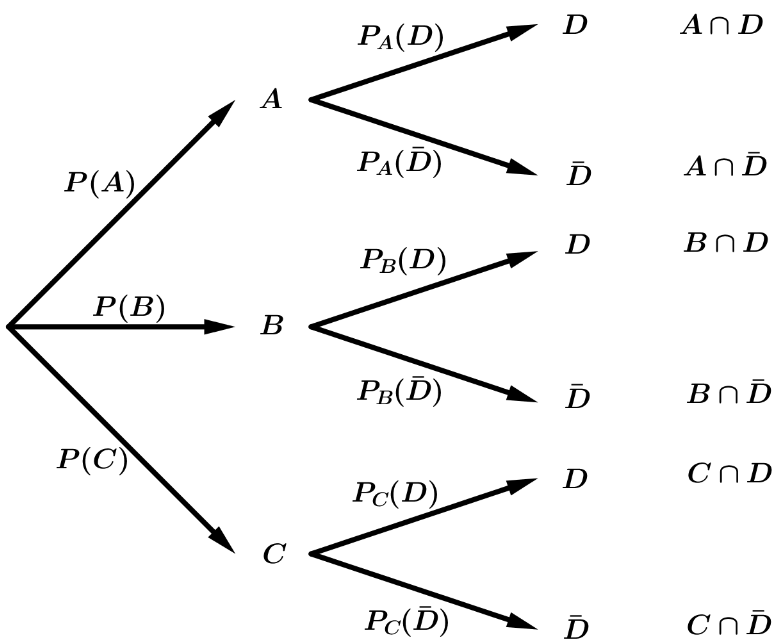
Soit A et B deux événements d'une même expérience aléatoire. On a alors :
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Si l'événement $A \cap B$ ne contient aucun élément (c'est-à-dire que $A \cap B = \emptyset$), on dit que les événements A et B sont **incompatibles** (ou **disjoints**).

Si deux événements A et B sont **incompatibles**, alors $P(A \cap B) = 0$.
Pour conséquence, on en déduit que $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Remarque
A et $\overline{A}$ sont incompatibles car $A \cap \overline{A} = \emptyset$.

IV. Règles d'utilisation d'un arbre de probabilités



Remarque
$P_A(D)$ se lit probabilité de D sachant A. Il s'agit de la probabilité d'avoir l'événement D sachant que l'événement A est réalisé.

Règle 1
La somme des probabilités sur les branches partant d'un même nœud est égale à 1.
Règle 2
La probabilité de l'événement correspondant à un chemin est obtenue en multipliant les probabilités portées par ses branches.
Règle 3
La probabilité de l'événement correspondant à plusieurs chemins est obtenue en additionnant les probabilités de chacun de ces chemins.

V. Probabilités conditionnelles

On appelle **cardinal de A**, noté $\text{Card}(A)$, l'effectif de l'événement A. Autrement dit, $\text{Card}(A)$ est égal au nombre d'issues qui réalisent l'événement A.

Soit A et B deux événements tels que $\text{Card}(A)$ soit non nul.
La **probabilité conditionnelle** que l'événement B se réalise sachant que l'événement A est réalisé est notée $P_A(B)$, et elle est définie par :

$$P_A(B)=\frac{\text{Card}(A\cap B)}{\text{Card}(A)}$$

Remarques

• $P_A(B)$ se lit « probabilité de B sachant A ».

• Si la probabilité de l'événement B est également non nulle, on peut définir la probabilité conditionnelle que l'événement A se réalise sachant que l'événement B est réalisé, notée $P_B(A)$ et définie par :

$$P_B(A)=\frac{\text{Card}(A\cap B)}{\text{Card}(B)}$$

Répétition d'épreuves indépendantes et variables aléatoires

I. Modèle associé à une expérience aléatoire à deux épreuves indépendantes

En réalisant successivement deux expériences aléatoires telles que les événements associés à la première soit indépendants des événements associés à la seconde, on dit que l'on réalise une **succession de deux épreuves indépendantes**.

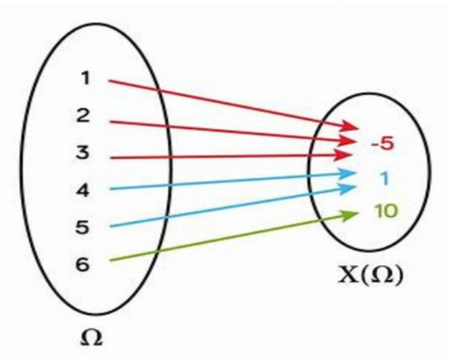
• Deux expériences sont dites **indépendantes** si le résultat de l'une n'influe pas sur le résultat de l'autre.
• Deux expériences sont dites **identiques** si elles ont les mêmes issues et les mêmes probabilités pour chaque issue.

II. Variables aléatoires

II.1 Variable aléatoire discrète

Soit une expérience aléatoire dont l'univers est l'ensemble Ω .
Une **variable aléatoire** est une fonction définie sur Ω et à valeurs dans $\mathbb{R}$. On la note X .

Exemple
On lance un dé équilibré à six faces et on observe le résultat affiché sur la face supérieure.
• « Si le résultat obtenu est 1, 2 ou 3, je perds 5 jetons »
• « Si le résultat obtenu est 4 ou 5, je gagne 1 jeton »
• « Sinon, je gagne 10 jetons »
On peut définir une variable aléatoire X qui décrit les gains de ce jeu. On a donc $X(1)=-5$, $X(2)=-5$, $X(3)=-5$, $X(4)=1$, $X(5)=1$, $X(6)=10$.
On peut représenter la situation par le schéma ci-contre.



II.2 Loi de probabilité d'une variable aléatoire discrète

Soit X une variable aléatoire définie sur l'univers Ω . L'ensemble des valeurs prises par X est $\Omega=\{x_1;x_2;\ldots;x_k\}$, où les valeurs sont rangées par ordre croissant. Le nombre x_i est associé à une ou plusieurs issues de Ω , avec $1\leqslant i\leqslant k$.

• L'événement « $X=x_i$ » est l'ensemble des issues de Ω auxquelles on a associé la valeur x_i .
• L'événement « $X\geqslant x_i$ » est l'ensemble des issues de Ω auxquelles on a associé une valeur supérieure ou égale à x_i . On définit de même « $X> x_i$ », « $X< x_i$ », et « $X\leqslant x_i$ ».

La probabilité de l'événement « $X=x_i$ » est la probabilité de l'événement formé de toutes les issues associées au nombre x_i . On la note $P(X=x_i)$ ou p_i .

Une variable aléatoire X est définie sur l'univers Ω d'une expérience aléatoire.
Notons $\Omega=\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ l'ensemble des valeurs prises par X.
La loi de probabilité de X est la fonction qui à chaque x_i de Ω lui associe sa probabilité notée $\mathrm{P}(\mathrm{X}=x_i)$. On la représente sous forme d'un tableau de valeurs :

$\boldsymbol{x_i}$	x_1	x_2	…	x_n
$\mathbf{P}(\mathbf{X}=\boldsymbol{x_i})$	$\mathrm{P}(\mathrm{X}=x_1)$	$\mathrm{P}(\mathrm{X}=x_2)$	…	$\mathrm{P}(\mathrm{X}=x_n)$

On a $p_1+p_2+\ldots+p_n=\sum_{i=1}^{k} p_i=1$ ou $\mathrm{P}(\mathrm{X}=x_1)+\mathrm{P}(\mathrm{X}=x_2)+\ldots+\mathrm{P}(\mathrm{X}=x_n)=\sum_{i=1}^{n}\mathrm{P}(\mathrm{X}=x_i)=1$.

II.3 Espérance

L'**espérance** mathématique de la variable aléatoire X est le réel noté $\mathrm{E}(\mathrm{X})$ défini par :

$$\mathrm{E}(\mathrm{X})=\sum_{i=1}^{n} p_i x_i=p_1 x_1+p_2 x_2+\ldots+p_n x_n$$

Remarques

• La loi des grands nombres nous permet d'interpréter l'espérance de la loi de probabilité de X. Elle nous dit en effet qu'en répétant un grand nombre de fois l'expérience, les fréquences observées se rapprochent de la probabilité théorique. En conséquence, la moyenne des résultats obtenus se rapproche de l'espérance de la loi de probabilité de X. L'espérance est donc la moyenne que l'on peut espérer en répétant l'expérience un grand nombre de fois.

Pour le jeu proposé en exemple, l'espérance de $-\frac{1}{2}$ signifie que l'on peut « espérer » ou « craindre » perdre en moyenne $-\frac{1}{2}$ de jeton par partie (ou perdre 1 jeton toutes les 2 parties).

• Si X représente le gain d'un jeu d'argent, si on a $\mathrm{E}(\mathrm{X})=0$, alors on dit que le jeu est équitable.

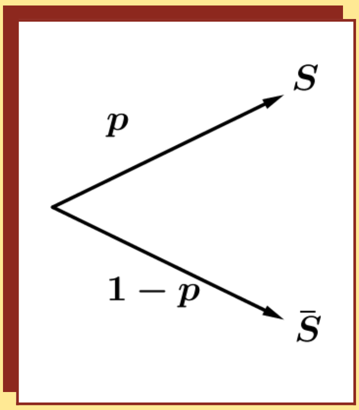
III. Épreuve, loi et schéma de Bernoulli

III.1 Épreuve de Bernoulli

Une **épreuve de Bernoulli** de paramètre p (compris entre 0 et 1) est une expérience aléatoire comportant deux issues :

• l'une appelée **succès**, noté S, de probabilité p.

• l'autre appelée **échec**, noté $\overline{\mathrm{S}}$ ou E, de probabilité $q=1-p$.



III.2 Loi de Bernoulli

Notons X la variable aléatoire prenant la valeur 1 en cas de succès et la valeur 0 en cas d'échec.
On dit que X suit la **loi de Bernoulli** de paramètre p.
Autrement dit, on a $P(X=1)=p$ et $P(X=0)=1-p$.
On peut résumer la loi de Bernoulli par le tableau suivant :

x_i	1	0
$P(X=x_i)$	p	$1-p$

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi de Bernoulli de paramètre p.
L'**espérance** de X est $E(X)=p$.

III.3 Schéma de Bernoulli

Soit n un entier naturel et p un réel compris entre 0 et 1.
Un **schéma de Bernoulli** de paramètres n et p est une expérience aléatoire consistant à répéter n fois, de façon **identique et indépendante**, une épreuve de Bernoulli de paramètre p.

IV. Échantillonnage

IV.1 Simulation d'échantillonnage

Lorsqu'on travaille sur une population de grande taille, il est rarement possible d'avoir accès aux données relatives à l'ensemble de la population. On utilise alors un **échantillon** de cette population.

Un échantillon de taille n est une sélection de n individus choisis au hasard dans un population.

Lorsque l'on répète n fois, de façon indépendante, une expérience aléatoire à deux issues, on obtient une série de n résultats que l'on appelle échantillon de taille n associé à une épreuve de Bernoulli.

Remarque
Simuler un échantillon avec un tableur ou un programme en langage Python permet d'étudier des séries statistiques comportant un très grand nombre de données.

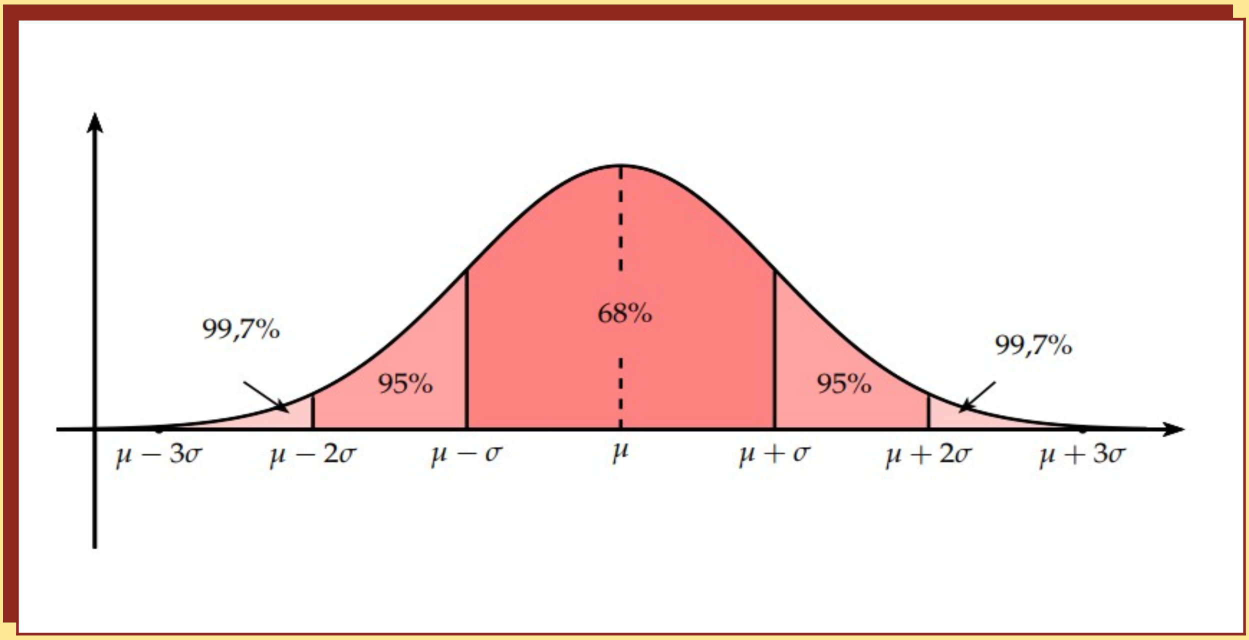
IV.2 Étude des échantillons

Sur plusieurs échantillons de même taille, la fréquence d'un caractère observée varie d'un échantillon à l'autre. C'est ce qu'on appelle la **fluctuation d'échantillonnage**.

Remarque
Plus la taille des échantillons est grande, plus le phénomène de fluctuation diminue. Les fréquences se rapprochent alors de la proportion théorique, c'est-à-dire de la probabilité théorique.

On étudie une simulation de N échantillons de taille n et on note σ l'**écart type** de la série des fréquences obtenues et μ la proportion théorique.

- En moyenne, environ 68% des fréquences sont dans l'intervalle $[\mu-\sigma;\mu+\sigma]$.
- En moyenne, environ 95% des fréquences sont dans l'intervalle $[\mu-2\sigma;\mu+2\sigma]$.
- En moyenne, plus de 99% des fréquences sont dans l'intervalle $[\mu-3\sigma;\mu+3\sigma]$.



L'**écart-type** de la série des fréquences est de l'ordre de $\frac{1}{2\sqrt{n}}$.

Autrement dit, la valeur de σ est proche de $\frac{1}{2\sqrt{n}}$.