

Croissance linéaire

I. Suites numériques

I.1 Généralités sur les suites

Une suite numérique est une **succession infinie de réels**. Une suite numérique est donc une fonction définie sur l'ensemble des **entiers naturels** $\mathbb{N}$.

Une suite numérique (u_n) définie à partir du rang p est une fonction qui à chaque entier $n \geq p$ associe un réel, noté u_n . Cette suite est aussi notée $(u_n)_{n \geq p}$ ou simplement u .

u_n est appelé le **terme général** de la suite ou le **terme d'indice n** , ou encore **terme de rang n** .
 u_p est le **terme initial** ou le **premier terme** de la suite.

Attention !

- u_{n+1} est le terme d'indice $n+1$. C'est le terme qui suit le terme d'indice n , c'est-à-dire u_n . On ne doit pas le confondre avec $u_n + 1$ qui est la somme de u_n , le terme d'indice n , et de 1.
- u_{n-1} est le terme d'indice $n-1$. Il précède le terme u_n .

Une suite numérique (u_n) peut être représentée par un **nuage de points** de coordonnées $(n; u_n)$.

I.2 Mode de génération d'une suite numérique

Première façon : suite définie par une formule explicite

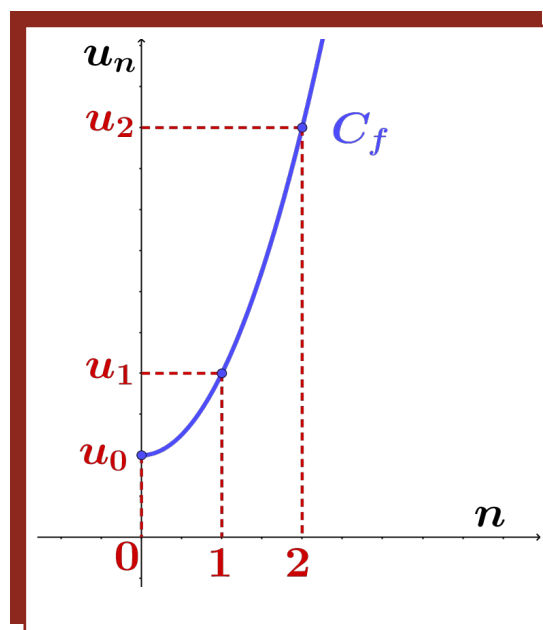
On définit la suite (u_n) par une expression du type $u_n = f(n)$, où f est une fonction numérique.

Remarques

- Une suite (u_n) est définie de **façon explicite** quand le terme u_n est exprimé en fonction de n .
- Avec cette définition, on peut donc calculer n'importe quel terme de la suite à partir de son indice.

Représentation graphique

Graphiquement, les termes de la suite (u_n) sont les ordonnées des points $A_n(n; u_n)$ d'abscisses entières de la courbe C_f .



Deuxième façon : suite définie par une formule de récurrence

On donne la valeur du premier terme de la suite et un procédé appelé **relation de récurrence** qui permet de calculer un terme à partir du précédent. On définit alors la suite (u_n) par une expression du type $u_{n+1} = f(u_n)$, où f est une fonction numérique.

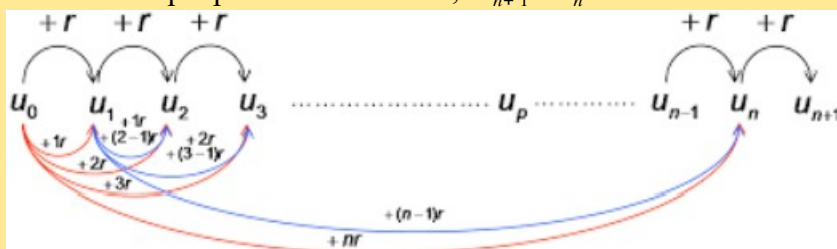
I.3 Sens de variations

- Une suite (u_n) est **croissante** à partir du rang p si pour tout $n \geq p$, $u_{n+1} \geq u_n$. Cela signifie que le terme d'après est plus grand que le précédent.
- Une suite (u_n) est **décroissante** à partir du rang p si pour tout $n \geq p$, $u_{n+1} \leq u_n$. Cela signifie que le terme d'après est plus petit que le précédent.
- Une suite (u_n) est **constante** lorsque pour tout n , $u_{n+1} = u_n$.

II. Suites arithmétiques

On dit qu'une suite (u_n) est **arithmétique** si, à partir de son premier terme, **chaque terme est obtenu en ajoutant au précédent un même nombre**.

Ainsi, il existe un réel r tel que pour tout entier n , $u_{n+1} = u_n + r$.



Le nombre r est appelé **raison** de la suite arithmétique (u_n) . Il est égal à la différence entre deux termes consécutifs quelconques : pour tout entier n , $r = u_{n+1} - u_n$.

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r .

Pour tous entiers n et p tels que $n \geq p$, on a $u_n = u_p + (n - p)r$.

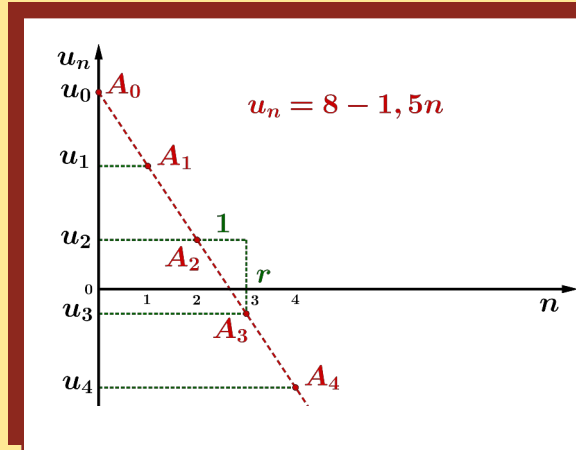
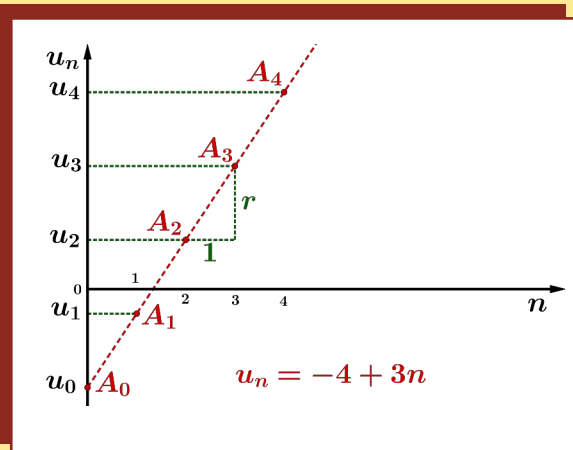
En particulier, pour tout entier n , $u_n = u_0 + nr$.

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_p .

- Si $r > 0$, alors la suite (u_n) est (strictement) **croissante**.
- Si $r < 0$, alors la suite (u_n) est (strictement) **décroissante**.
- Si $r = 0$, alors la suite (u_n) est **constante**, égale à u_p .

La représentation graphique d'une suite arithmétique (u_n) est un **ensemble de points isolés alignés de coordonnées $(n; u_n)$** .

Ces points sont situés sur une **droite** d'équation $y = rx + u_0$ (le coefficient directeur de la droite est la raison r).



III. Fonctions affines

Une **fonction affine** est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax + b$, où a et b sont deux nombres réels.

La représentation graphique d'une fonction affine f est une droite. Le réel a s'appelle **coefficient directeur** de la droite et b l'**ordonnée à l'origine**.

Remarques

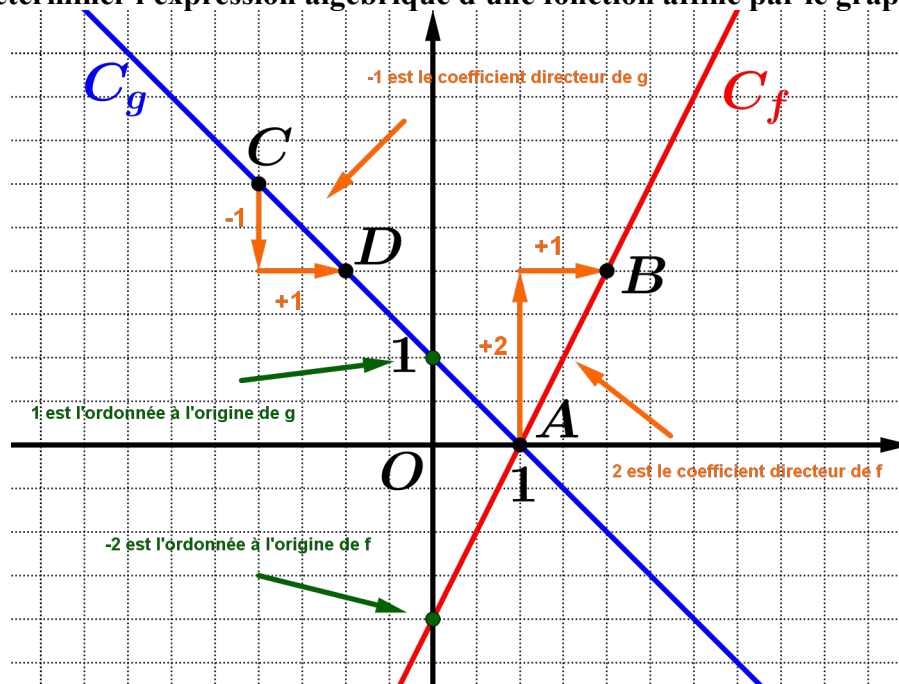
- Lorsque $b=0$, la fonction f définie par $f(x) = ax$ est une fonction linéaire. La droite passe alors par l'origine du repère.
- Lorsque $a=0$, la fonction f définie par $f(x) = b$ est une fonction constante. La droite est alors parallèle à l'axe des abscisses.

Soit f une fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax + b$.

- Si $a > 0$, alors la fonction f est **strictement croissante** sur $\mathbb{R}$. La droite représentative de f est tournée "vers le haut".
- Si $a < 0$, alors la fonction f est **strictement décroissante** sur $\mathbb{R}$. La droite représentative de f est tournée "vers le bas".
- Si $a = 0$, alors la fonction f est **constante** sur $\mathbb{R}$. La droite représentative de f est parallèle à l'axe des abscisses.

Soit f une fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax + b$. On a alors, quels que soient les nombres réels x_1 et x_2 distincts l'un de l'autre :
$$a = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Méthode : déterminer l'expression algébrique d'une fonction affine par le graphique



Pour la droite représentative de f :

- Le coefficient directeur est 2.
- L'ordonnée à l'origine est -2.

Ainsi l'expression algébrique de f est $f(x) = 2x - 2$.

Pour la droite représentative de g :

- Le coefficient directeur est -1.
- L'ordonnée à l'origine est 1.

Ainsi l'expression algébrique de g est $g(x) = -x + 1$.

IV. Phénomène discret ou continu de croissance linéaire

Définition 13

- Une suite caractérise un **phénomène discret** car la variable n est un entier naturel qui prend donc des valeurs isolées.
- Une fonction dont la variable (généralement x ou t) prend ses valeurs dans un intervalle de $\mathbb{R}$ qui caractérise un **phénomène continu**.

Définition 14

La **croissance d'un phénomène est linéaire** lorsque le taux d'accroissement de la suite ou de la fonction qui la caractérise est constant.

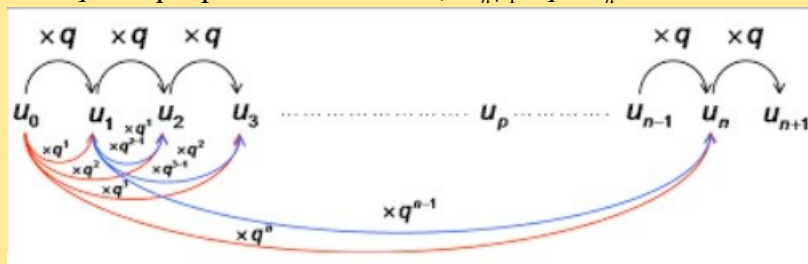
- Si le phénomène est discret, une croissance linéaire peut être modélisée par une suite arithmétique.
- Si le phénomène est continu, une croissance linéaire peut être modélisée par une fonction affine.

Croissance exponentielle

I. Suites géométriques

On dit qu'une suite (u_n) est **géométrique** si, à partir de son premier terme, **chaque terme est obtenu en multipliant le précédent par un même nombre**.

Ainsi, il existe un réel q tel que pour tout entier n , $u_{n+1} = q \times u_n$.



Le nombre q est appelé **raison** de la suite géométrique (u_n) .

Dans le cas où la suite (u_n) ne s'annule pas, q est égal au quotient de deux termes consécutifs

quelconques : pour tout entier n , $q = \frac{u_{n+1}}{u_n}$.

Soit (u_n) une suite géométrique de raison q .

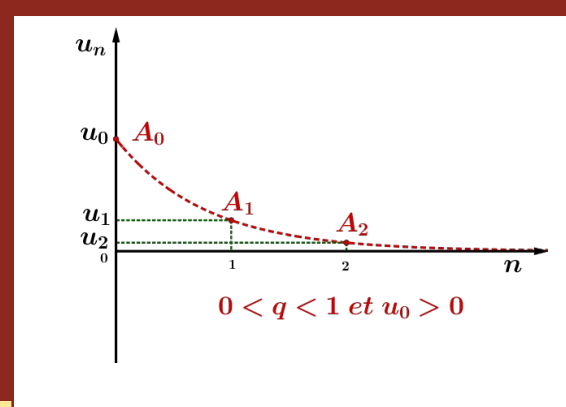
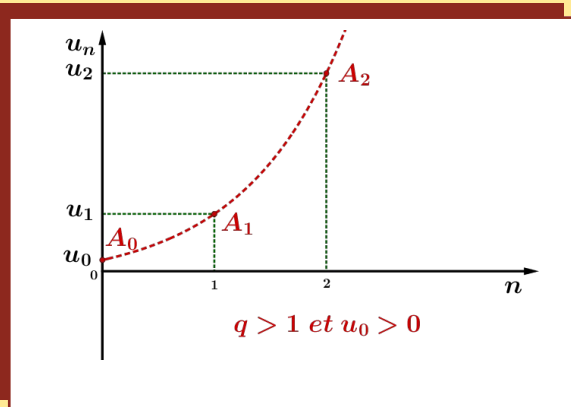
Pour tous entiers n et p tels que $n \geq p$, on a $u_n = u_p \times q^{n-p}$.

En particulier, pour tout entier n , $u_n = u_0 \times q^n$.

Soit (u_n) une suite géométrique de raison q et de premier terme $u_0 > 0$.

- Si $q > 1$, alors la suite (u_n) est (strictement) **croissante**.
- Si $0 < q < 1$, alors la suite (u_n) est (strictement) **décroissante**.
- Si $q = 1$, alors la suite (u_n) est **constante**, égale à u_0 .
- Si $q < 0$, alors la suite (u_n) **n'est pas monotone**.

La représentation graphique d'une suite géométrique (u_n) est un ensemble de points isolés $(n; u_n)$, situés sur une courbe dite **exponentielle**.



Remarque

Si $u_p < 0$, ces sens de variations sont **inversés**.

II. Fonctions exponentielles

Soit a un réel strictement positif. On appelle **fonction exponentielle de base a** la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = a^x$.

Soit a et b deux réels strictement positifs et x et y deux réels. On a :

$$\begin{array}{llll} \bullet a^0 = 1 & \bullet a^1 = a & \bullet a^x \times a^y = a^{x+y} & \bullet \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y} \\ \bullet a^{-x} = \frac{1}{a^x} & \bullet (a^x)^y = a^{xy} & \bullet a^x \times b^x = (ab)^x & \bullet \frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x \end{array}$$

Soit a un réel strictement positif et f une fonction exponentielle de base a définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = a^x$.

- Si $a > 1$, alors la fonction f est strictement **croissante**.
- Si $0 < a < 1$, alors la fonction f est strictement **décroissante**.
- Si $a = 1$, alors la fonction f est **constante**.

Soit a un réel strictement positif et k un réel.

- Si $k > 0$, alors les fonctions $x \rightarrow ka^x$ et $x \rightarrow a^x$ ont le même sens de variation sur $[0; +\infty[$.
- Si $k < 0$, alors les fonctions $x \rightarrow ka^x$ et $x \rightarrow a^x$ ont des sens de variation contraires sur $[0; +\infty[$.

On peut faire l'analogie entre les fonctions exponentielles et les suites géométriques.

Dans $u_n = u(0) \times q^n$, $u(0)$ et q^n sont associés respectivement à k et a^x .

On constate alors que les fonctions $x \rightarrow ka^x$ sont le prolongement des suites géométriques dans le cas où l'exposant est réel.

III Racine n-ième et taux d'évolution moyen

Soit c un réel positif. L'équation $x^n = c$ possède **une unique solution réelle positive** qui est $x = c^{\frac{1}{n}}$, que l'on note aussi $\sqrt[n]{c}$, et appelée **racine n-ième**.

Une quantité subit n évolutions de taux global T . Le **taux moyen** de ces n évolutions est le taux t , qui appliqué n fois, est équivalent au taux global T .

Le taux moyen t vérifie l'égalité $(1+t)^n = 1+T$, ou encore $t = (1+T)^{\frac{1}{n}} - 1$.

Modélisation quadratique

I. Fonctions polynômes du second degré

I.1 Définitions

On appelle **fonction polynôme du second degré** (ou **trinôme**) toute fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$ où a , b et c sont des nombres réels et $a \neq 0$. Cette expression est appelée **forme développée** de f .

Soit f la fonction polynôme du second degré définie par $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$.

On dit que la courbe représentative de cette fonction est une **parabole**.

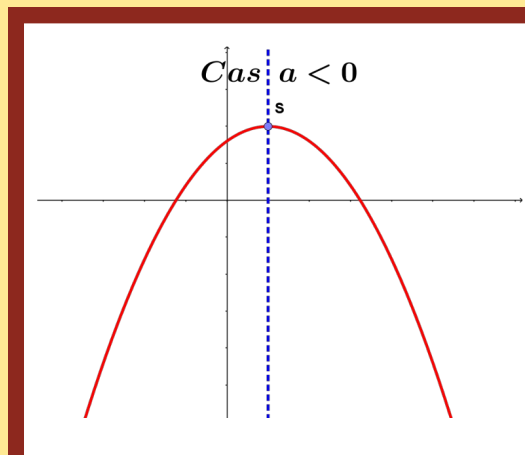
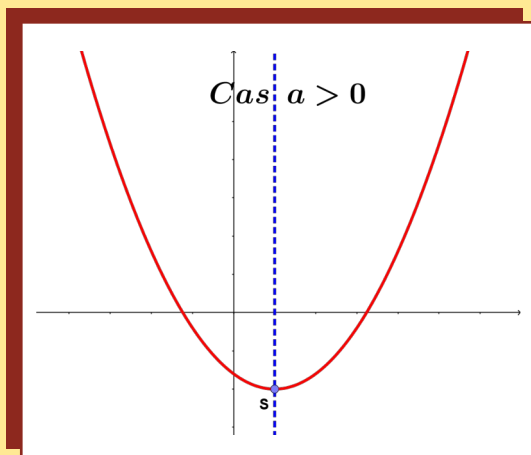
Une parabole a une forme de « U » (« tournée vers le haut ») lorsque a est positif.

A l'inverse, si a est négatif, la parabole a une forme de « pont » (« tournée vers le bas »).

Dans les deux cas, la parabole possède comme **axe de symétrie** la droite d'équation $x = -\frac{b}{2a}$.

On appelle généralement **S le sommet** d'une parabole.

S a pour coordonnées $(\alpha; \beta)$ où $\alpha = -\frac{b}{2a}$ et $\beta = f(\alpha)$.



Méthode : Démontrer qu'une fonction polynôme de degré 2 admet un extremum

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2 - 12x + 23$.

a. Démontrer que pour tout x réel, $f(x) = 2(x-3)^2 + 5$.

b. En déduire que f admet un minimum dont on précisera la valeur.

a. En développant la 2^e expression, on obtient :

$$(2(x-3))^2 + 5 = 2(x^2 - 6x + 9) + 5 = 2x^2 - 12x + 18 + 5 = 2x^2 - 12x + 23 = f(x).$$

b. On regarde le signe de a : $a = 2 > 0$.

La parabole est « tournée vers le haut », donc f admet un minimum.

Or la deuxième expression correspond à la forme canonique, d'où on peut lire la valeur du minimum qui est 5, atteint pour $x = 3$.

I.2 Sens de variations

Soit f une fonction polynomiale du second degré définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$.

• Si $a > 0$, f est strictement décroissante sur $]-\infty; \alpha]$ et strictement croissante sur $[\alpha; +\infty[$. Elle admet comme minimum β en $x = \alpha$.

• Si $a < 0$, f est strictement croissante sur $]-\infty; \alpha]$ et strictement décroissante sur $[\alpha; +\infty[$. Elle admet comme maximum β en $x = \alpha$.

Cas $a > 0$

x	$-\infty$	$\alpha = \frac{-b}{2a}$	$+\infty$
f(x)			

Cas $a < 0$

x	$-\infty$	$\alpha = \frac{-b}{2a}$	$+\infty$
f(x)			

La courbe représentative de f dans un repère orthonormé admet pour axe de symétrie la droite d'équation $x = \alpha$ et pour sommet le point de coordonnées $(\alpha; \beta)$.

Méthode : Établir les variations d'une fonction du second degré

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^2 + 4x$.

a. Calculer les coordonnées du sommet de la parabole représentant la fonction f .

b. La fonction f admet-elle un maximum ou un minimum. Justifier.

c. Construire le tableau de variations de f , puis tracer sa courbe représentative dans un repère.

a. On calcule les coordonnées du sommet S :

On a $\alpha = -\frac{b}{2a} = -\frac{4}{2 \times (-1)} = -\frac{4}{-2} = 2$ et $\beta = f(\alpha) = f(2) = -2^2 + 4 \times 2 = -4 + 8 = 4$.

Donc $S(2; 4)$.

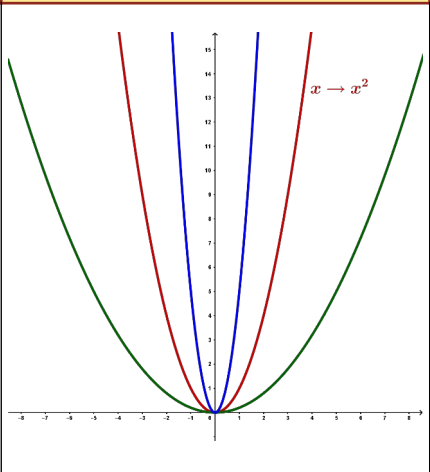
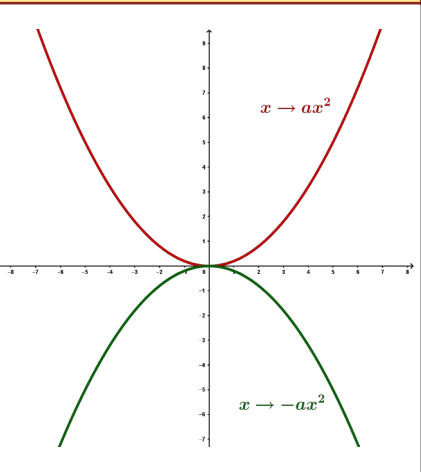
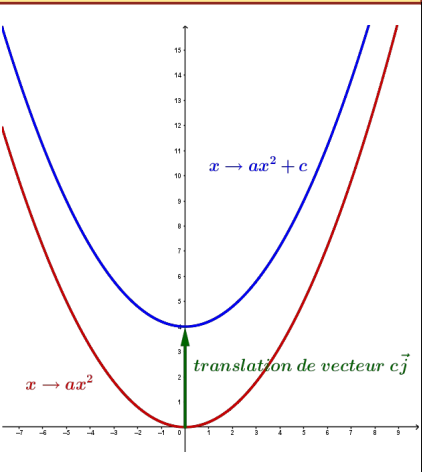
b. On regarde le signe de a : $a = -1 < 0$.

La parabole est « tournée vers le bas », donc f admet un maximum. Ce maximum est 4.

c. Tableau de variations :

x	$-\infty$	2	$+\infty$
f(x)			

I.3 Fonctions particulières $x \rightarrow ax^2$ et $x \rightarrow ax^2 + c$

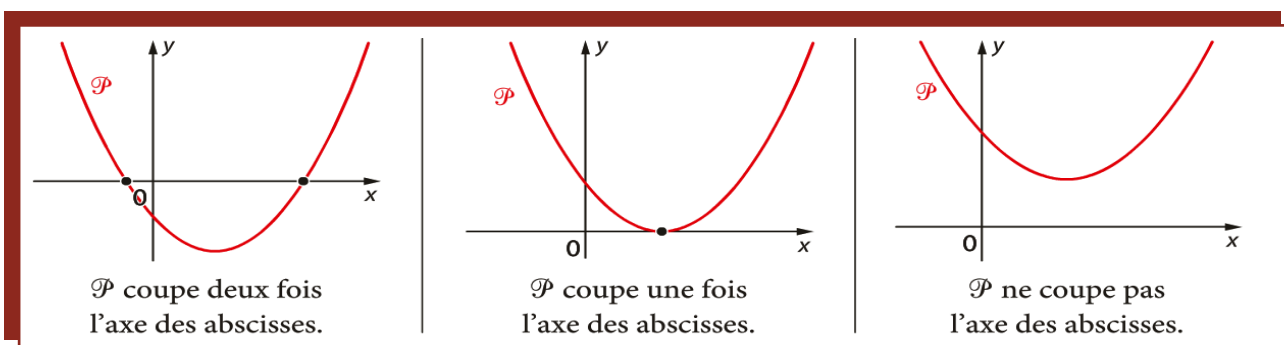
Influence du coefficient a ($a > 0$)	Passage de $a > 0$ à $a < 0$	Influence du coefficient c
		
L'axe de symétrie des différentes courbes est la droite d'équation $x=0$ Cas : $a > 1$ Plus a est grand et plus la courbe « se contracte » Cas : $0 < a < 1$ Plus a est proche de zéro et plus la courbe « s'écarte »	La courbe représentative de la fonction $x \rightarrow -ax^2$ est symétrique à celle de la fonction $x \rightarrow ax^2$ par rapport à l'axe des abscisses	La courbe représentative de la fonction $x \rightarrow ax^2 + c$ s'obtient en effectuant une translation de vecteur $c \vec{j}$ à partir de la courbe représentative de la fonction $x \rightarrow ax^2$

II. Équation du second degré

II.1 Approche graphique

Résoudre l'équation $ax^2 + bx + c = 0$, où $a \neq 0$, c'est trouver, s'il en existe, tous les nombres x qui vérifient cette égalité. De tels nombres sont appelés **solutions de l'équation** ou **racines** du trinôme. Pour trouver le nombre de solutions de cette équation, on peut s'aider de la représentation graphique de la fonction f définie par $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Dans les trois exemples ci-dessous, on peut conjecturer que l'équation admet respectivement deux solutions, une solution et aucune solution.



II.2 Vocabulaire

Une **équation du second degré**, d'inconnue x , est une équation qui peut s'écrire sous la forme $ax^2 + bx + c = 0$ où a , b et c sont des nombres réels, avec $a \neq 0$.

Une solution de cette équation est appelée **racine** du trinôme $ax^2 + bx + c$.

III. Fonctions polynômes du second degré admettant deux racines

III.1 Forme factorisée

Soit f une fonction du second degré de la forme $f(x) = ax^2 + bx + c$, avec $a \neq 0$. On a la factorisation suivante :

- Si f admet **deux racines** x_1 et x_2 , alors on a pour tout réel x , $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$.
- Si f admet **une racine double** x_0 , alors on a pour tout réel x , $f(x) = a(x - x_0)^2$.

Remarque

Si $x_1 = x_2$, alors on dit que f admet une racine double que l'on note x_0 .

La représentation graphique des fonctions de la forme $x \rightarrow a(x - x_1)(x - x_2)$ est une parabole d'axe de symétrie la droite d'équation $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$.

L'abscisse du sommet de la parabole est alors $\alpha = \frac{x_1 + x_2}{2}$.

III.2 Signe d'une fonction polynôme du second degré

Soit la fonction polynomiale $f(x) = ax^2 + bx + c$, avec $a \neq 0$.

- Si f admet deux racines x_1 et x_2 , alors $f(x)$ s'annule pour $x = x_1$ et $x = x_2$ (on suppose que $x_1 < x_2$) et alors :

- le signe de $f(x)$ est **du signe de a** pour x extérieur à l'intervalle des racines ;
- le signe de $f(x)$ est **du signe contraire de celui de a** si x est compris entre les racines.

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$	
$f(x)$	signe de a	0	signe de $-a$	0	signe de a

- Si f admet une racine double, alors $f(x)$ s'annule pour $x = x_0$: **son signe est celui de a** pour tous les réels $x \neq x_0$.

x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
$f(x)$	signe de a	0	signe de a