Croissance linéaire

I. Suites numériques

I.1 Généralités sur les suites

Une suite numérique est une **succession infinie de réels**. Une suite numérique est donc une fonction définie sur l'ensemble des **entiers naturels** $\mathbb{N}$.

Une suite numérique (u_n) définie à partir du rang p est une fonction qui à chaque entier $n \geqslant p$ associe un réel, noté u_n . Cette suite est aussi notée $(u_n)_{n \geqslant p}$ ou simplement u .
u_n est appelé le **terme général** de la suite ou le **terme d'indice n**, ou encore **terme de rang n** .
u_p est le **terme initial** ou le **premier terme** de la suite.

Attention !
• u_{n+1} est le terme d'indice $n+1$. C'est le terme qui suit le terme d'indice n , c'est-à-dire u_n . On ne doit pas le confondre avec u_n+1 qui est la somme de u_n , le terme d'indice n , et de 1.
• u_{n-1} est le terme d'indice $n-1$. Il précède le terme u_n .

Une suite numérique (u_n) peut être représentée par un **nuage de points** de coordonnées $(n;u_n)$.

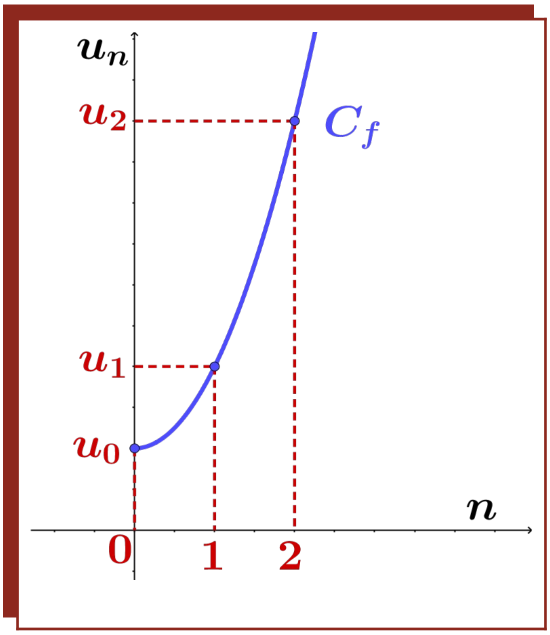
I.2 Mode de génération d'une suite numérique

Première façon : suite définie par une formule explicite

On définit la suite (u_n) par une expression du type $u_n=f(n)$, où f est une fonction numérique.

Remarques
• Une suite (u_n) est définie de **façon explicite** quand le terme u_n est exprimé en fonction de n .
• Avec cette définition, on peut donc calculer n'importe quel terme de la suite à partir de son indice.

Représentation graphique
Graphiquement, les termes de la suite (u_n) sont les ordonnées des points $A_n(n;u_n)$ d'abscisses entières de la courbe C_f .



Deuxième façon : suite définie par une formule de récurrence

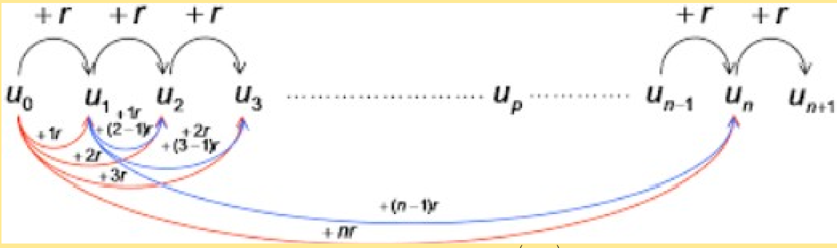
On donne la valeur du premier terme de la suite et un procédé appelé **relation de récurrence** qui permet de calculer un terme à partir du précédent. On définit alors la suite (u_n) par une expression du type $u_{n+1}=f(u_n)$, où f est une fonction numérique.

I.3 Sens de variations

• Une suite (u_n) est **croissante** à partir du rang p si pour tout $n\geqslant p$, $u_{n+1}\geqslant u_n$. Cela signifie que le terme d'après est plus grand que le précédent.
• Une suite (u_n) est **décroissante** à partir du rang p si pour tout $n\geqslant p$, $u_{n+1}\leqslant u_n$. Cela signifie que le terme d'après est plus petit que le précédent.
• Une suite (u_n) est **constante** lorsque pour tout n, $u_{n+1}=u_n$.

II. Suites arithmétiques

On dit qu'une suite (u_n) est **arithmétique** si, à partir de son premier terme, **chaque terme est obtenu en ajoutant au précédent un même nombre**.
Ainsi, il existe un réel r tel que pour tout entier n, $u_{n+1}=u_n+r$.

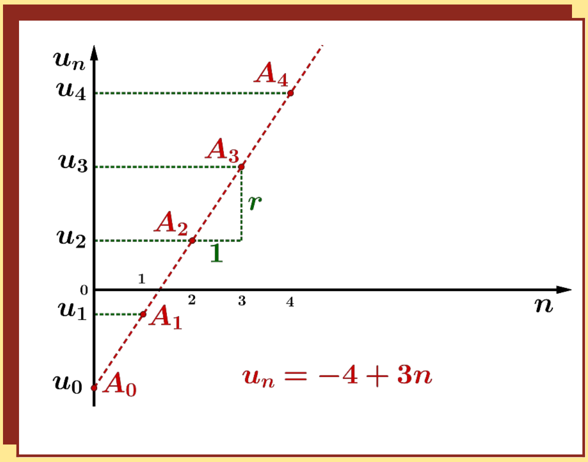


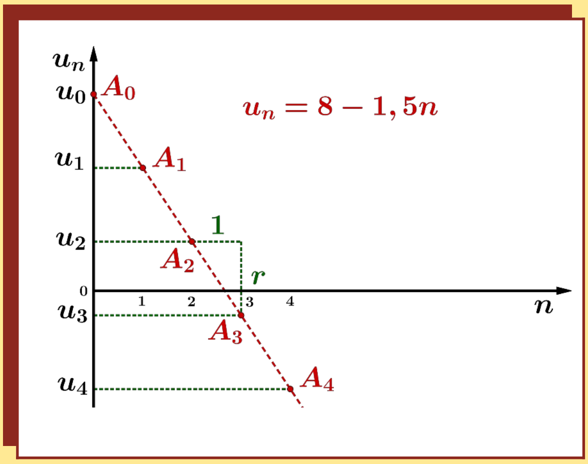
Le nombre r est appelé **raison** de la suite arithmétique (u_n). Il est égal à la différence entre deux termes consécutifs quelconques : pour tout entier n, $r=u_{n+1}-u_n$.

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r.
Pour tous entiers n et p tels que $n\geqslant p$, on a $u_n=u_p+(n-p)r$.
En particulier, pour tout entier n, $u_n=u_0+nr$.

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_p.
• Si $r>0$, alors la suite (u_n) est (strictement) **croissante**.
• Si $r<0$, alors la suite (u_n) est (strictement) **décroissante**.
• Si $r=0$, alors la suite (u_n) est **constante**, égale à u_p.

La représentation graphique d'une suite arithmétique (u_n) est un **ensemble de points isolés alignés de coordonnées** $(n\,;u_n)$.
Ces points sont situés sur une **droite** d'équation $y=rx+u_0$ (le coefficient directeur de la droite est la raison r).





III. Fonctions affines

Une **fonction affine** est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=ax+b$, où a et b sont deux nombres réels.

La représentation graphique d'une fonction affine f est une droite. Le réel a s'appelle **coefficient directeur** de la droite et b l'**ordonnée à l'origine**.

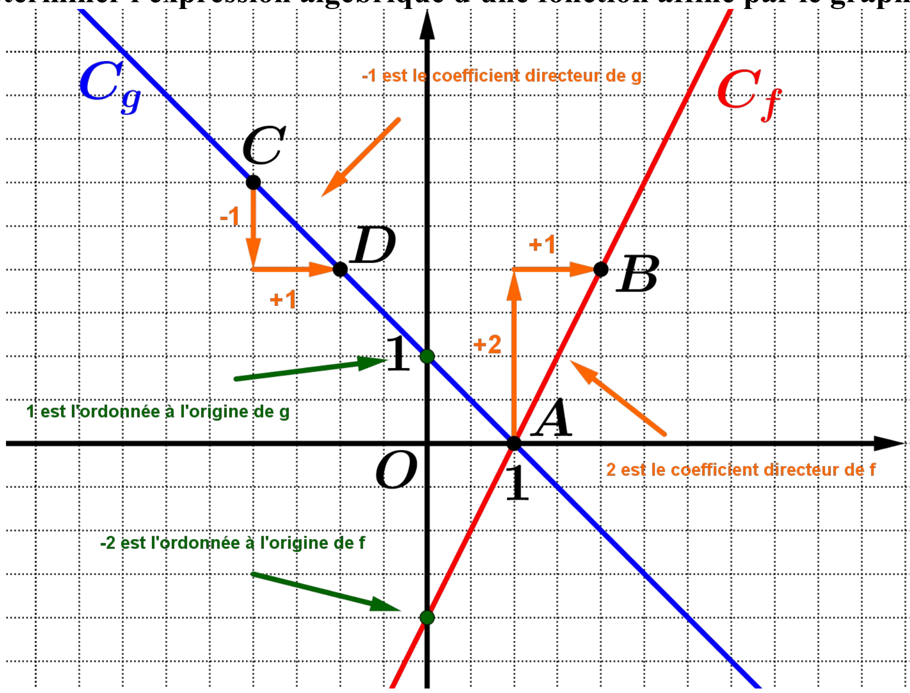
Remarques

• Lorsque $b=0$, la fonction f définie par $f(x)=ax$ est une fonction linéaire. La droite passe alors par l'origine du repère.
• Lorsque $a=0$, la fonction f définie par $f(x)=b$ est une fonction constante. La droite est alors parallèle à l'axe des abscisses.

Soit f une fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=ax+b$.
• Si $a>0$, alors la fonction f est **strictement croissante** sur $\mathbb{R}$. La droite représentative de f est tournée "vers le haut".
• Si $a<0$, alors la fonction f est **strictement décroissante** sur $\mathbb{R}$. La droite représentative de f est tournée "vers le bas".
• Si $a=0$, alors la fonction f est **constante** sur $\mathbb{R}$. La droite représentative de f est parallèle à l'axe des abscisses.

Soit f une fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=ax+b$. On a alors, quels que soient les nombres réels x_1 et x_2 distincts l'un de l'autre : $a=\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$.

Méthode : déterminer l'expression algébrique d'une fonction affine par le graphique



Pour la droite représentative de f :
• Le coefficient directeur est 2.
• L'ordonnée à l'origine est -2 .
Ainsi l'expression algébrique de f est $f(x)=2x-2$.
Pour la droite représentative de g :
• Le coefficient directeur est -1 .
• L'ordonnée à l'origine est 1.
Ainsi l'expression algébrique de g est $g(x)=-x+1$.

IV. Phénomène discret ou continu de croissance linéaire

Définition 13

• Une suite caractérise un **phénomène discret** car la variable n est un entier naturel qui prend donc des valeurs isolées.
• Une fonction dont la variable (généralement x ou t) prend ses valeurs dans un intervalle de $\mathbb{R}$ qui caractérise un **phénomène continu**.

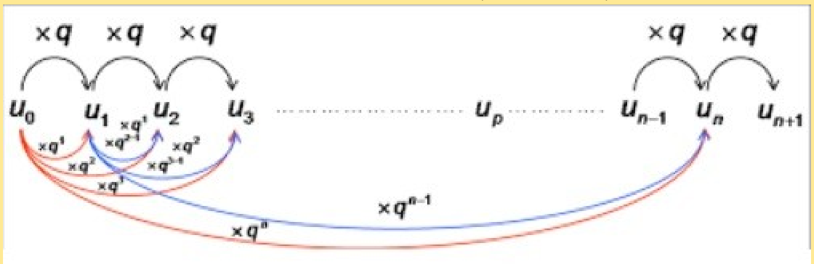
Définition 14

La **croissance d'un phénomène est linéaire** lorsque le taux d'accroissement de la suite ou de la fonction qui la caractérise est constant.
• Si le phénomène est discret, une croissance linéaire peut être modélisée par une suite arithmétique.
• Si le phénomène est continu, une croissance linéaire peut être modélisée par une fonction affine.

Croissance exponentielle

I. Suites géométriques

On dit qu'une suite (u_n) est **géométrique** si, à partir de son premier terme, **chaque terme est obtenu en multipliant le précédent par un même nombre**.
Ainsi, il existe un réel q tel que pour tout entier n, $u_{n+1}=q\times u_n$.

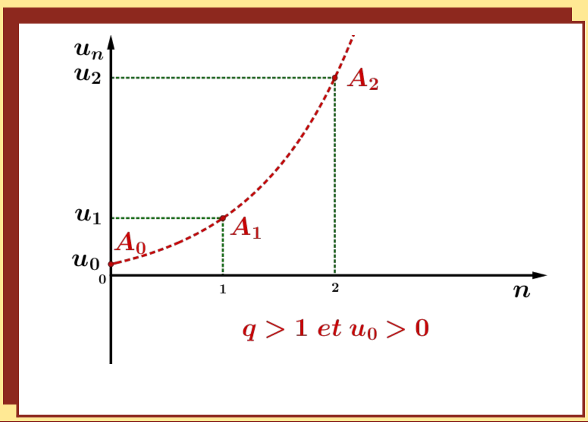


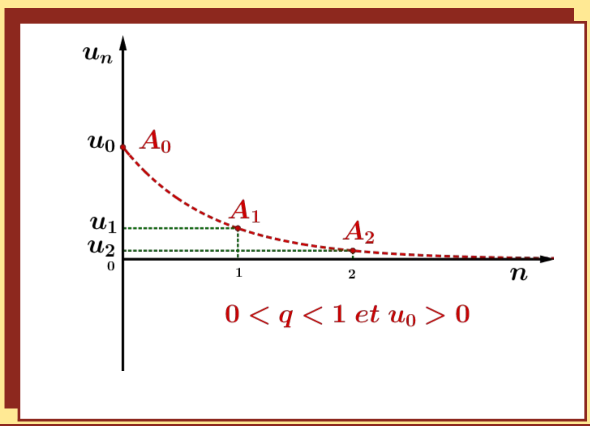
Le nombre q est appelé **raison** de la suite géométrique (u_n).
Dans le cas où la suite (u_n) ne s'annule pas, q est égal au quotient de deux termes consécutifs quelconques : pour tout entier n, $q=\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$.

Soit (u_n) une suite géométrique de raison q.
Pour tous entiers n et p tels que $n\geqslant p$, on a $u_n=u_p\times q^{n-p}$.
En particulier, pour tout entier n, $u_n=u_0\times q^n$.

Soit (u_n) une suite géométrique de raison q et de premier terme $u_p>0$.
- Si $q>1$, alors la suite (u_n) est (strictement) **croissante**.
- Si $0<q<1$, alors la suite (u_n) est (strictement) **décroissante**.
- Si $q=1$, alors la suite (u_n) est **constante**, égale à u_p.
- Si $q<0$, alors la suite (u_n) **n'est pas monotone**.

La représentation graphique d'une suite géométrique (u_n) est **un ensemble de points isolés** $(\boldsymbol{n};\boldsymbol{u_n})$, situés sur une courbe dite **exponentielle**.





Remarque
Si $u_p < 0$, ces sens de variations sont **inversés**.

II. Fonctions exponentielles

Soit a un réel strictement positif. On appelle **fonction exponentielle de base a** la fonction f définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f(x)=a^x$.

Soit a et b deux réels strictement positifs et x et y deux réels. On a :

- $a^0=1$
- $a^1=a$
- $a^x\times a^y=a^{x+y}$
- $\dfrac{a^x}{a^y}=a^{x-y}$
- $a^{-x}=\dfrac{1}{a^x}$
- $(a^x)^y=a^{xy}$
- $a^x\times b^x=(ab)^x$
- $\dfrac{a^x}{b^x}=\left(\dfrac{a}{b}\right)^x$

Soit a un réel strictement positif et f une fonction exponentielle de base a définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f(x)=a^x$.
• Si $a>1$, alors la fonction f est strictement **croissante**.
• Si $0<a<1$, alors la fonction f est strictement **décroissante**.
• Si $a=1$, alors la fonction f est **constante**.

Soit a un réel strictement positif et k un réel.
• Si $k>0$, alors les fonctions $x \rightarrow ka^x$ et $x \rightarrow a^x$ ont le même sens de variation sur $[0\,;+\infty[$.
• Si $k<0$, alors les fonctions $x \rightarrow ka^x$ et $x \rightarrow a^x$ ont des sens de variation contraires sur $[0\,;+\infty[$.

On peut faire l'analogie entre les fonctions exponentielles et les suites géométriques.
Dans $u_n=u(0)\times q^n$, $u(0)$ et q^n sont associés respectivement à k et a^x.
On constate alors que les fonctions $x \rightarrow ka^x$ sont le prolongement des suites géométriques dans le cas où l'exposant est réel.

III Racine n-ième et taux d'évolution moyen

Soit c un réel positif. L'équation $x^n=c$ possède **une unique solution réelle positive** qui est $x=c^{\frac{1}{n}}$, que l'on note aussi $\sqrt[n]{c}$, et appelée **racine n-ième**.

Une quantité subit n évolutions de taux global T. Le **taux moyen** de ces n évolutions est le taux t, qui appliqué n fois, est équivalent au taux global T.

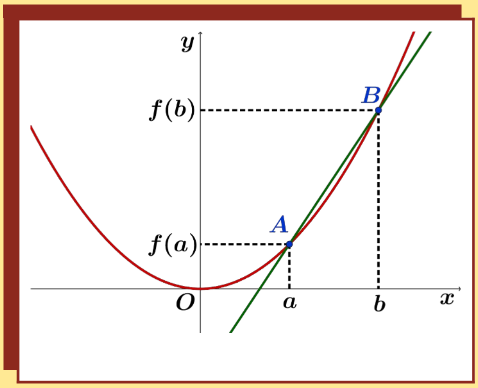
Le taux moyen t vérifie l'égalité $(1+t)^n=1+\mathrm{T}$, ou encore $t=(1+\mathrm{T})^{\frac{1}{n}}-1$.

Variation instantanée

I. Tangente à une courbe

I.1 Sécante à une courbe

Soit f une fonction et C_f sa courbe représentative. On appelle **sécante** à la courbe C_f toute droite passant par deux points A et B distincts de cette courbe.

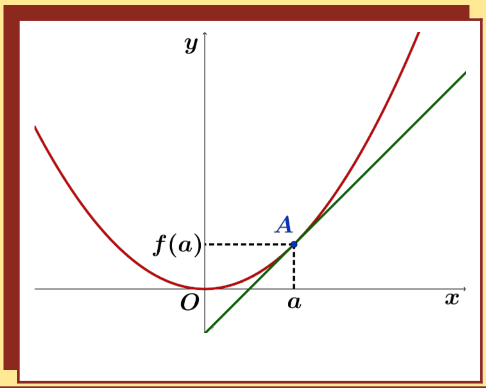


Soit f une fonction définie sur un intervalle I contenant les réels a et b. Le **taux d'accroissement** de la fonction f entre a et b est le réel défini par le quotient $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Le **coefficient directeur** de la sécante (AB) est le taux d'accroissement de f entre a et b.

I.2 Tangente à une courbe

On constate que, lorsque le point B se rapproche du point A, la sécante (AB) tend vers une droite particulière, nommée **tangente** à C_f au point A : aux alentours du point $A(a, f(a))$, elle est semblable à la courbe.



Remarques

• On dit que la tangente à C_f en A « frôle » la courbe autour du point A. C'est la position limite de la sécante quand le point B est confondu avec le point A.
• On nomme généralement T une tangente.
• Une tangente est une droite mais celle-ci ne peut jamais être verticale.

Lorsqu'elle existe, la tangente T à la courbe C_f au point A est **unique**.

II. Nombre dérivé

Soit f une fonction définie sur un intervalle I, $a \in \mathrm{I}$ et A un point de la courbe C_f d'abscisse a. On appelle **nombre dérivé** de la fonction f en a le coefficient directeur de la tangente T à C_f au point A et on le note $f'(a)$.

L'**équation** de la tangente T à la courbe C_f au point A d'abscisse a est :

$$\mathrm{T} : y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

Remarque
Une tangente étant une droite, son équation est de la même forme qu'une fonction affine, c'est-à-dire $y = mx + p$.

III. Modélisation

Soit f une fonction modélisant une évolution.
• Le taux d'accroissement correspond à la **vitesse moyenne**, en valeur absolue, de cette évolution entre a et b.
• $f'(a)$ correspond à la **vitesse instantanée**, en valeur absolue, de cette évolution.

Remarque
Le nombre dérivé peut avoir d'autres interprétations concrètes comme le coût marginal en économie.

Variation globale

I. Étude du signe d'une fonction

I.1 Étude graphique du signe d'une fonction

Étudier le signe d'une fonction ou d'une expression $f(x)$ revient à déterminer les valeurs de x pour lesquelles $f(x)$ est positif, nul ou négatif. Le signe est souvent présenté sous la forme d'un **tableau de signes**.

Remarque
Le tableau de signe d'une fonction comporte deux lignes :
• Sur la première ligne, on indique les éléments du domaine de définition de la fonction et les éventuelles valeurs de x pour lesquelles la fonction s'annule.
• Sur la deuxième ligne, on crée des cases dans lesquelles on indique le signe de la fonction ainsi que les zéros en dessous des valeurs de x pour lesquelles la fonction s'annule.

I.2 Étude du signe d'une fonction affine

Soit a et b deux réels tels que $a \neq 0$. La fonction affine f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=ax+b$ s'annule et change de signe une fois et une seule dans son ensemble de définition en $x=-\frac{b}{a}$.

• Si $a>0$, alors $f(x)>0 \Leftrightarrow x>-\frac{b}{a}$.

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	

• Si $a<0$, alors $f(x)>0 \Leftrightarrow x<-\frac{b}{a}$.

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	

Remarque
Pour trouver le signe d'une fonction affine, il est aussi possible d'utiliser son sens de variations :
Si $a>0$, alors la fonction affine est croissante et donc elle est d'abord négative puis positive.
Si $a<0$, la fonction affine est décroissante et donc elle d'abord positive puis négative.

I.3 Signe et opérations

Pour déterminer le signe d'un produit ou d'un quotient de deux fonctions, on construit un tableau de signes à quatre lignes.
• La $1^{ère}$ ligne indique les éléments de l'ensemble de définition et les valeurs de x pour lesquelles les deux fonctions s'annulent. Les valeurs doivent être placées en respectant l'ordre.
• Les 2^{e} et 3^{e} lignes indiquent le signe de chacune des deux fonctions.
• La 4^{e} ligne se remplit avec la règle des signes d'un produit ou d'un quotient :
‣ des facteurs de même signe donnent un produit ou un quotient positif ;
‣ des facteurs de signes contraires donnent un produit ou un quotient négatif.

Remarques
• Le tableau de signes peut être constitué de plus de quatre lignes. Par exemple, si l'expression étudiée est un produit de trois facteurs, alors il y aura une ligne supplémentaire dans le tableau.
• Lorsque l'on étudie le signe d'un quotient, il faut faire attention à ce que celui-ci ne s'annule pas. Il y aura donc une valeur interdite et une double barre.
• Lorsque l'on connaît le signe de termes d'une somme, on ne peut pas en général déterminer son signe, sauf si ses les termes sont tous de même signes.
Par exemple, x^2 et 4 sont chacun positifs pour tout réel x , donc $x^2+4\geqslant 0$.

I.4 Signe et inéquations

Étudier le signe d'une expression peut permettre de résoudre une inéquation.
Résolvons l'inéquation $(3x+9)(-x+2)\leqslant 0$.
‣ On commence par chercher les valeurs d'annulation de $3x+9$ et $-x+2$.
$3x+9=0 \Leftrightarrow 3x=-9 \Leftrightarrow x=-3$ et $-x+2=0 \Leftrightarrow -x=-2 \Leftrightarrow x=2$.
‣ On détermine le signe de chacune des deux expressions précédentes.
La fonction $x \rightarrow 3x+9$ est croissante, donc elle est d'abord négative puis positive.
La fonction $x \rightarrow -x+2$ est décroissante, donc elle est d'abord positive et négative.
‣ On réunit ses résultats dans un tableau de signes et on le complète.

x	$-\infty$		-3		2		$+\infty$
$3x+9$		$-$	0	$+$		$+$	
$-x+2$		$+$		$+$	0	$-$	
$(3x+9)(-x+2)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Ainsi $(3x+9)(-x+2)\leqslant 0 \Leftrightarrow x\in]-\infty;-3]\cup[2;+\infty[$.

II. Fonction dérivée

Soit une fonction f définie sur un intervalle I .
On dit que f est dérivable sur I si elle est dérivable en tout point x de I .
On appelle fonction dérivée de f et on note f' la fonction qui à chaque x associe $f'(x)$.

Remarque
Toutes les fonctions usuelles vues en première sont dérivables sur leur domaine de définition.

III. Dérivées des fonctions usuelles

Fonction	D_f	Fonction dérivée	$D_{f'}$
$f(x)=k$, $k\in\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x)=0$	$\mathbb{R}$
$f(x)=mx+p$	$\mathbb{R}$	$f'(x)=m$	$\mathbb{R}$
$f(x)=x$	$\mathbb{R}$	$f'(x)=1$	$\mathbb{R}$
$f(x)=x^2$	$\mathbb{R}$	$f'(x)=2x$	$\mathbb{R}$
$f(x)=x^3$	$\mathbb{R}$	$f'(x)=3x^2$	$\mathbb{R}$

IV. Opérations sur les fonctions dérivées

Soit f une **fonction polynomiale** de la forme $f(x)=a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1 x+a_0$ définie sur $\mathbb{R}$ avec $n\in\mathbb{N}$ et $a_n\neq 0$.
La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x)=na_n x^{n-1}+(n-1)a_{n-1}x^{n-2}+\ldots+a_1$.

Fonction	Fonction dérivée
$u+v$	$u'+v'$
$u-v$	$u'-v'$
ku , $k\in\mathbb{R}$	ku'

V. Sens de variation d'une fonction

V.1 Du sens de variation d'une fonction au signe de la dérivée

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I .
- Si f est **croissante** sur I , alors pour tout réel x de I , $\boldsymbol{f'(x)\geqslant 0}$.
- Si f est **décroissante** sur I , alors pour tout réel x de I , $\boldsymbol{f'(x)\leqslant 0}$.
- Si f est **constante** sur I , alors pour tout réel x de I , $\boldsymbol{f'(x)=0}$.

Remarque
Dans de nombreux cas il sera nécessaire de dériver pour étudier les variations d'une fonction, car l'étude du signe de la dérivée sera plus simple que l'étude des variations de la fonction initiale.

V.2 Du signe de la dérivée au sens de variation de la fonction

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I.
• Si pour tout réel x de I, $\boldsymbol{f'(x) \geqslant 0}$, alors la fonction f est **croissante** sur I.
• Si pour tout réel x de I, $\boldsymbol{f'(x) \leqslant 0}$, alors la fonction f est **décroissante** sur I.
• Si pour tout réel x de I, $\boldsymbol{f'(x) = 0}$, alors la fonction f est **constante** sur I.
• Si f' est **strictement positive** (respectivement **strictement négative**) sur I, sauf éventuellement pour un nombre fini de valeurs de x où f' s'annule, alors f est **strictement croissante** (respectivement **strictement décroissante**) sur I.

Remarques
Une flèche dans le tableau de variation d'une fonction f indiquera :
• la stricte croissance ou décroissance de f sur l'intervalle correspondant.
• la continuité (ou absence de rupture) de la courbe C_f sur cet intervalle.

VI. Extremum d'une fonction

Soit une fonction f définie sur un intervalle I et a un réel de I.
• On dit que le réel M est le **maximum** de f sur I, **atteint** en a, si $f(a) = \mathrm{M}$ et si pour tout réel x de I, on a $f(x) \leqslant \mathrm{M}$.
• On dit que le réel m est le **minimum** de f sur I, **atteint** en a, si $f(a) = m$ et si pour tout réel x de I, on a $f(x) \geqslant m$.
• Un **extremum** de f sur I est **un maximum ou un minimum** de f sur I.
• On dit que le réel L est un **maximum** (respectivement **minimum**) **local** de f sur I s'il existe un intervalle ouvert J contenu dans I, tel que L est le maximum (respectivement minimum) de f sur J.

Remarques
• Les pluriels de "minimum", "maximum" et "extremum" sont "minima", "maxima" et "extrema".
• Graphiquement, il s'agit pour le maximum du plus haut "sommet" de la courbe, et pour le minimum du plus bas "sommet" de la courbe.