Phénomènes aléatoires

I. Généralités

• Une **expérience aléatoire** est une expérience dont le résultat dépend du hasard. Chacun des résultats possibles s'appelle **éventualité** ou **issue**. L'ensemble Ω (ou E) de tous les résultats possibles d'une expérience aléatoire s'appelle l'**univers** de l'expérience.
• Un **événement** A est une partie de l'univers Ω (un événement peut donc être constitué de zéro, une ou plusieurs issues de Ω).
• Un **événement élémentaire** est une partie de Ω qui ne contient qu'une seule issue.
• L'**événement contraire** de A, noté $\overline{A}$, est la partie constituée de toutes les issues de Ω qui ne sont pas dans A.

• $P(\emptyset)=0$ et $P(\Omega)=1$.
• La probabilité d'un événement A, notée $\mathbf{P(A)}$, est la **somme des probabilités des événements élémentaires inclus dans** $\mathbf{A}$.
• Pour tout événement A, on a $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$.
• La somme des probabilités des événements élémentaires vaut 1.
• La probabilité de l'événement contraire d'un événement A est : $P(\overline{A})=1-P(A)$.

Lorsque tous les événements élémentaires d'une expérience aléatoire ont la même probabilité, on dit alors qu'ils sont **équiprobables**. On parle d'**expérience équiprobable** ou de **loi équirépartie**.

• L'événement « **A et B** », noté $A \cap B$, s'appelle l'**intersection** des événements A et B.
Il est réalisé lorsque **les deux événements sont réalisés simultanément**.
• L'événement « **A ou B** », noté $A \cup B$, s'appelle la **réunion** des événements A et B.
Il est réalisé lorsqu'**au moins l'un des deux événements est réalisé**.
• Deux événements A et B sont dits **incompatibles** si $A \cap B=\emptyset$.

Soit A un événement d'un univers Ω. Pour une loi équirépartie, on a :

$$P(A)=\frac{\text{nombre d'éléments de } A}{\text{nombre d'éléments de } \Omega}=\frac{\text{nombre de cas favorables à } A}{\text{nombre de cas possibles}}$$

Soit A et B deux événements d'un univers Ω.
• $P(A \cup B)=P(A)+P(B)-P(A \cap B)$.
• Si A et B sont **incompatibles**, $P(A \cup B)=P(A)+P(B)$.

II. Probabilités conditionnelles

Soit A et B deux événements d'un univers Ω avec $P(A) \neq 0$.
La **probabilité conditionnelle** que l'événement B se réalise sachant que l'événement A est réalisé est notée $P_A(B)$, et elle est définie par : $P_A(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$.

La probabilité $P_A(B)$ vérifie bien $0 \leqslant P_A(B) \leqslant 1$ et $P_A(B) + P_A(\overline{B}) = 1$.

Soit A et B deux événements d'un univers Ω avec $P(A) \neq 0$ et $P(B) \neq 0$. Alors :

$$P(A) \times P_A(B) = P(B) \times P_B(A)$$

Utilisation de tableaux
Les tableaux à double entrées permettent une présentation claire de certaines expériences aléatoires et facilitent le calcul des probabilités conditionnelles.

	B	$\overline{\mathbf{B}}$	**Total**
A	$P(A \cap B)$	$P(A \cap \overline{B})$	$P(A)$
$\overline{\mathbf{A}}$	$P(\overline{A} \cap B)$	$P(\overline{A} \cap \overline{B})$	$P(\overline{A})$
Total	$P(B)$	$P(\overline{B})$	1

- $P(A \cap B)$ se lit à l'intersection de la ligne A et de la colonne B.
- $P(A)$ (respectivement $P(B)$) se lit sur la dernière colonne (respectivement la dernière ligne).
- $P_A(B)$ (ou $P_B(A)$) s'obtient en calculant le quotient des deux probabilités adéquates :

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \quad \text{et} \quad P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Exemple
Un club sportif rassemble 180 membres répartis en juniors et seniors. On compte 135 seniors dont 81 hommes. Il y a 27 garçons parmi les seniors.
En choisissant une femme au hasard, calculer la probabilité d'avoir une juniore.

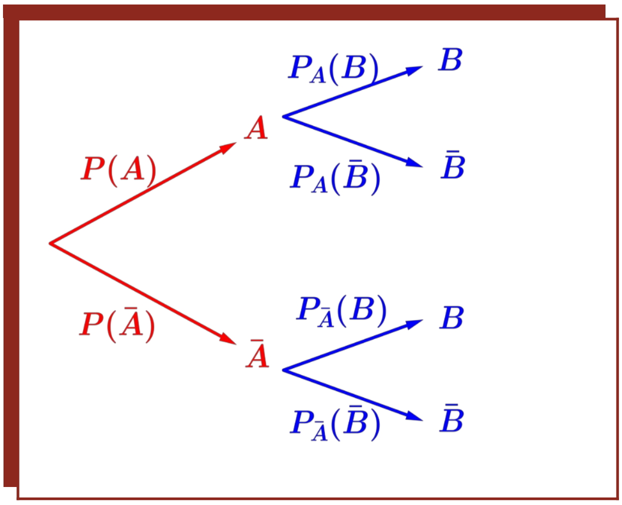
	J	**S**	**Total**
H	$\dfrac{27}{180} = 0,15$	$\dfrac{81}{180} = 0,45$	$0,15 + 0,45 = 0,6$
F	$0,1$	$0,3$	$0,4$
Total	$0,25$	$\dfrac{135}{180} = 0,75$	1

Ainsi $P_F(J) = \dfrac{P(F \cap J)}{P(F)} = \dfrac{0,1}{0,4} = 0,25$.

III. Arbre pondéré et calculs de probabilité

• La probabilité de l'événement correspondant à un chemin est obtenue en multipliant les probabilités portées par ses branches.
• La somme des probabilités sur les branches partant d'un même nœud est égale à 1.
• La probabilité de l'événement correspondant à plusieurs chemins est obtenue en additionnant les probabilités de chacun de ces chemins (**formule des probabilités totales**).

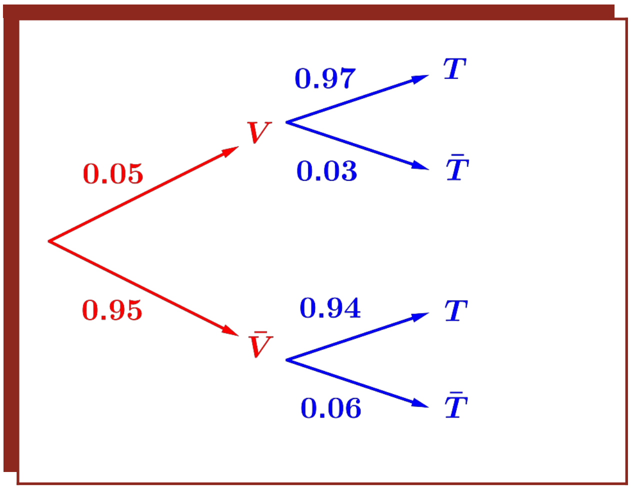
Le cas le plus fréquent correspond à la partition la plus simple (A et $\overline{A}$). Si on connaît les probabilité de B et $\overline{B}$ par l'intermédiaire de A et $\overline{A}$, on a l'arbre suivant :



• Le produit des probabilités inscrites sur chaque branche d'un chemin donne la probabilité de l'intersection des événements placés sur ce chemin.
$P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$
• La somme des probabilités inscrites sur les branches issues d'un même nœud est égale à 1 (loi des nœuds).
$P_A(B) + P_{\overline{A}}(B) = 1$
• La probabilité d'un événement E est la somme des probabilités des chemins qui aboutissent à E .

$$P(B) = P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B)$$
$$= P(A) \times P_A(B) + P(\overline{A}) \times P_{\overline{A}}(B)$$

Exemple
Dans un pays, il y a 5% de la population contaminée par le coronavirus. On dispose d'un test de dépistage de ce virus qui a les propriétés suivantes
• La probabilité qu'une personne contaminée ait un test positif est de $0,97$ (sensibilité du test).
• La probabilité qu'une personne non contaminée ait un test négatif est de $0,94$ (spécificité du test). On fait passer un test à une personne choisie au hasard dans cette population.
On note les événements suivants :
V :« la personne est contaminée par le virus »
T :« le test est positif »



• La probabilité que le test soit positif est :

$$P(T) = P(V \cap T) + P(\overline{V} \cap T)$$
$$= 0,05 \times 0,97 + 0,95 \times 0,94$$
$$= 0,9415$$

• La probabilité que la personne soit contaminée sachant que le test est positif est :

$$P_T(V) = \frac{P(V \cap T)}{P(T)}$$
$$= \frac{0,05 \times 0,97}{0,9415}$$
$$= 0,051514$$

IV. Indépendance

• Soit A et B deux événements d'un univers Ω.
On dit que A et B sont **indépendants** lorsque $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.
• Soit A et B deux événements d'un univers Ω tels que $P(A) \neq 0$.
Les événements A et B sont **indépendants** si et seulement si $P_A(B) = P(B)$.

En réalisant successivement deux expériences aléatoires telles que les événements associés à la première soit indépendants des événements associés à la seconde, on dit que l'on réalise une **succession de deux épreuves indépendantes**.

• Deux expériences sont dites **indépendantes** si le résultat de l'une n'influe pas sur le résultat de l'autre.
• Deux expériences sont dites **identiques** si elles ont les mêmes issues et les mêmes probabilités pour chaque issue.

Dans une succession d'épreuves indépendantes, la probabilité d'une issue est le **produit des probabilités rencontrées sur le chemin** qui conduit à cette issue.