

✨ Corrigé du baccalauréat Métropole 11 mai 2022 ✨

Sujet 1

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

Le sujet propose 4 exercices

Le candidat choisit 3 exercices parmi les 4 et **ne doit traiter que ces 3 exercices**

EXERCICE 1 (7 points)

Thèmes : fonctions et suites

Partie A

1. a. La fonction f est continue et dérivable sur $[0 ; 10]$. En utilisant les règles de dérivation d'un produit, on obtient :

$$f'(t) = 3e^{-0,5t+1} + 3t \times -0,5e^{-0,5t+1} = e^{-0,5t+1} (-3 + 3t) = 3(t-1)e^{-0,5t+1}$$
 Donc $\forall t \in [0 ; 10], f'(t) = 3(-0,5t+1)e^{-0,5t+1}$
- b. $\forall t \in [0 ; 10], e^{-0,5t+1} > 0$ donc $f'(t)$ a le même signe que $-0,5t+1$.
 $-0,5t+1 \geq 0 \iff t \leq 2$.
 Dans le tableau : $f(0) = 0, f(2) = 6e^0 = 6$ et $f(10) = 30e^{-5+1} = 30e^{-4}$.
 D'où le tableau de variation de f :

x	0	2	10
$f'(x)$		+	0 -
$f(x)$	0	6	$30e^{-4}$

- c. Le maximum de la fonction f est atteint pour $t = 2$, et $f(2) = 6$. La dose maximale de 6 mg sera atteinte au bout de 2 heures.
2. a. Sur l'intervalle $[0 ; 2]$, la fonction f est continue et strictement croissante à valeurs dans $[0 ; 6]$. Or $5 \in [0 ; 6]$, donc d'après le corollaire du TVI (théorème des valeurs intermédiaires), l'équation $f(t) = 5$ admet une unique solution, notée α , dans l'intervalle $[0 ; 2]$.
 À la calculatrice, $\alpha \approx 1,02$.
- b. D'après le tableau de variations, $f(t) \geq 5 \iff t \in [\alpha ; \beta]$. De plus $\beta - \alpha = 2,44$ (heures).
 Donc le traitement sera efficace pendant 2,44 heures soit environ 146 minutes.

Partie A

1. Au bout d'une heure, la quantité de médicament dans le sang diminue de 30 %, donc il en reste 70 %. Puis on en injecte à nouveau 1,8 mg. Sachant que $u_0 = 2$, alors $u_1 = 0,70 \times 2 + 1,8 = 3,2$. Au bout d'une heure, la quantité de médicament dans le sang sera de 3,2 mg.

2. Soi $n \in \mathbb{N}$. u_n désigne la quantité de médicament dans le sang au bout de n heures. Une heure plus tard, il ne restera que 70 % de la quantité précédente (70 % de u_n), puis on en ajoute 1,8 mg par injection.
Donc $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 0,7 \times u_n + 1,8$.

3. a. Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq u_{n+1} < 6$.

Initialisation : $u_0 = 2$ et $u_1 = 3,2$. Donc $u_0 \leq u_1 < 6$. L'initialisation est vérifiée.

Hérédité : on suppose que si $n \in \mathbb{N}$, alors $u_n \leq u_{n+1} < 6$.

Montrons que $u_{n+1} \leq u_{n+2} < 6$.

$$u_n \leq u_{n+1} < 6 \iff 0,7 \times u_n \leq 0,7 \times u_{n+1} < 0,7 \times 6 \iff 0,7u_n \leq 0,7u_{n+1} < 4,2$$

$$\text{donc } 0,7u_n + 1,8 \leq 0,7u_{n+1} + 1,8 < 4,2 + 1,8 \iff 0,7u_n + 1,8 \leq 0,7u_{n+1} + 1,8 < 6.$$

Donc $u_{n+1} \leq u_{n+2} < 6$. L'hérédité est démontrée.

Conclusion : La proposition est vraie au rang 0 et si elle est vraie au rang n , elle l'est aussi au rang $n+1$.

D'après l'axiome de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq u_{n+1} < 6$.

- b. Nous venons de montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq u_{n+1} < 6$. Cela signifie que la suite (u_n) est croissante et majorée par 6. Donc d'après le théorème de convergence monotone, la suite (u_n) converge vers une limite finie notée ℓ .

- c. La suite (u_n) converge vers ℓ donc ℓ est l'unique solution de l'équation $\ell = 0,7\ell + 1,8$ (théorème du point fixe).

$$\ell = 0,7\ell + 1,8 \iff 0,3\ell = 1,8 \iff \ell = 6. \text{ Donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 6$$

4. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = -u_n + 6$.

- a. $\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = -u_{n+1} + 6 = -(0,7 \times u_n + 1,8) + 6 = -0,7u_n + 4,2 = 0,7 \left(-u_n + \frac{4,2}{0,7} \right)$
 $= 0,7(-u_n + 6) = 0,7v_n$.

Donc $\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = 0,7v_n$ donc la suite (v_n) est géométrique de raison 0,7 et de premier terme $v_0 = -u_0 + 6 = 4$.

- b. $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = v_0 \times 0,7^n = 4 \times 0,7^n$.

De plus $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = -u_n + 6$ donc $u_n = -v_n + 6 = 6 - 4 \times 0,7^n$.

- c. $u_n \geq 5,5 \iff 6 - 4 \times 0,7^n \geq 5,5 \iff -4 \times 0,7^n \geq -0,5 \iff 0,7^n \leq \frac{-0,5}{-4}$
 $\iff \ln(0,7^n) \leq \ln\left(\frac{1}{8}\right) \iff n \times \ln(0,7) \leq -\ln(8) \iff n \geq -\frac{\ln(8)}{\ln(0,7)}$ car $\ln(0,7) < 0$

$$\text{Donc } n \geq -\frac{2\ln(2)}{\ln(0,7)}. \text{ À la calculatrice : } -\frac{2\ln(2)}{\ln(0,7)} \approx 5,83 \text{ donc } n \geq 6.$$

Cela signifie que $u_6 \geq 5,5$. Il faudra donc au total 7 injections (de l'injection initiale u_0 à la 7^e qui correspond à u_6).

EXERCICE 2 (7 points)

Thème : géométrie dans l'espace.

1. a. La droite $\mathcal{D}$ dont une représentation paramétrique est
$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - t \\ z = 2 + 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

a pour vecteur directeur $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

b. Si B appartient à la droite $\mathcal{D}$ alors $\exists t \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\begin{cases} -1 = 1+2t \\ 3 = 2-t \\ 0 = 2+2t \end{cases} \iff \begin{cases} 2t = -2 \\ -t = 1 \\ 2t = -2t \end{cases} \iff t = -1. \text{ Donc } B \in \mathcal{D}.$$

c. On a $A(-1; 1; 3)$ et $B(-1; 3; 0)$. Donc $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$.

$$\text{Alors } \overrightarrow{AB} \cdot \vec{u} = 0 \times 2 + 2 \times (-1) + (-3) \times 2 = -8$$

2. a. Le plan $\mathcal{P}$ passant par A est orthogonal à la droite $\mathcal{D}$. Donc $\mathcal{P}$ a pour vecteur normal le vecteur $\vec{u}$ (vecteur directeur de $\mathcal{D}$).

Son équation cartésienne sera de la forme $ax + by + cz + d = 0$, où $(a; b; c)$ sont les coordonnées d'un vecteur normal au plan.

En prenant comme vecteur normal à $\mathcal{P}$ le vecteur $\vec{u}$, on obtient : $\mathcal{P}$:

$2x - y + 2z + d = 0$. Or $A \in \mathcal{P}$ donc $-2 - 1 + 6 + d = 0$ donc $d = -3$. Donc $\mathcal{P}$ a pour équation $2x - y + 2z - 3 = 0$

b. Le projeté orthogonal de A sur la droite $\mathcal{D}$, noté H , est l'unique point d'intersection de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{D}$. Résolvons donc le système suivant :

$$\begin{cases} 2x - y + 2z - 3 = 0 \\ x = 1 + 2t \\ y = 2 - t \\ z = 2 + 2t \end{cases} \text{ . On remplace } x, y \text{ et } z \text{ dans la première équation :}$$

$$2x - y + 2z - 3 = 0 \iff 2(1 + 2t) - (2 - t) + 2(2 + 2t) - 3 = 0 \iff 2 + 4t - 2 + t + 4 + 4t = 0 \iff 9t + 1 = 0 \iff t = -\frac{1}{9}.$$

On remplace la valeur de t dans les trois dernières équations :

$$\begin{cases} x = 1 + 2 \times -\frac{1}{9} = \frac{7}{9} \\ y = 2 - \left(-\frac{1}{9}\right) = \frac{19}{9} \\ z = 2 + 2 \times \left(-\frac{1}{9}\right) = \frac{16}{9} \end{cases} \text{ . Donc } H\left(\frac{7}{9}; \frac{19}{9}; \frac{16}{9}\right).$$

c. Déterminons les coordonnées de $\overrightarrow{AH}$ avec $A(-1; 1; 3)$ et $H\left(\frac{7}{9}; \frac{19}{9}; \frac{16}{9}\right)$:

$$\overrightarrow{AH} \begin{pmatrix} \frac{16}{9} \\ \frac{10}{9} \\ -\frac{11}{9} \end{pmatrix}.$$

$$\text{Donc } \|\overrightarrow{AH}\| = \sqrt{\left(\frac{16}{9}\right)^2 + \left(\frac{10}{9}\right)^2 + \left(-\frac{11}{9}\right)^2} = \frac{\sqrt{477}}{9} = \frac{\sqrt{53}}{3}$$

3. a. Les points H et B appartiennent à $\mathcal{D}$, donc le vecteur $\overrightarrow{HB}$ est un vecteur directeur de $\mathcal{D}$, tout comme $\vec{u}$. Donc les vecteurs $\overrightarrow{HB}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires donc $\exists k \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{HB} = k \times \vec{u}$.

- b. D'après les propriétés du produit scalaire, et en utilisant la relation de Chasles, $\overrightarrow{AB} \cdot \vec{u} = (\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HB}) \cdot \vec{u} = \overrightarrow{AH} \cdot \vec{u} + \overrightarrow{HB} \cdot \vec{u}$.

Or les points A et H appartiennent au plan $\mathcal{P}$ normal à la droite $\mathcal{D}$, donc tout vecteur de $\mathcal{P}$ est orthogonal à tout vecteur de $\mathcal{D}$ donc $\overrightarrow{AH} \perp \vec{u}$ donc $\overrightarrow{AH} \cdot \vec{u} = 0$.

$$\text{Donc } \overrightarrow{AB} \cdot \vec{u} = \overrightarrow{HB} \cdot \vec{u} = k \times \vec{u} \cdot \vec{u} = k \vec{u}^2 = k \|\vec{u}\|^2 \text{ donc } k = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \vec{u}}{\|\vec{u}\|^2}.$$

- c. On a $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ donc $\|\vec{u}\| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2} = \sqrt{9} = 3$ et $\overrightarrow{AB} \cdot \vec{u} = -8$ donc

$$k = \frac{-8}{3^2} = -\frac{8}{9}.$$

Donc en posant $H(x; y; z)$ et $B(-1; 3; 0)$ alors $\overrightarrow{BH} \begin{pmatrix} -1-x \\ 3-y \\ -z \end{pmatrix}$.

$$\text{De plus } \overrightarrow{HB} = k \times \vec{u} = -\frac{8}{9} \times \vec{u} \text{ donc } \begin{cases} -1-x &= -\frac{8}{9} \times 2 \\ 3-y &= -\frac{8}{9} \times (-1) = \frac{19}{9} \\ -z &= -\frac{8}{9} \times 2 \end{cases}$$

Donc $x = \frac{16}{9} - 1 = \frac{7}{9}$, $y = 3 - \frac{8}{9} = \frac{19}{9}$ et $z = \frac{16}{9}$. On retrouve les coordonnées du point H .

4. Les points A , H et C appartiennent au plan $\mathcal{P}$. H est le projeté orthogonal de B sur $\mathcal{P}$. Le tétraèdre $BAHC$ a pour base le triangle AHC et pour hauteur BH .

$$\text{Donc } \mathcal{V}_{BAHC} = \frac{1}{3} \times \mathcal{A}_{AHC} \times BH \text{ d'où } \mathcal{A}_{AHC} = \frac{3 \times \mathcal{V}_{BAHC}}{BH}.$$

D'après la question 3. c, $\overrightarrow{HB} = k \times \vec{u} =$ donc $\overrightarrow{HB} \begin{pmatrix} \frac{16}{9} \\ -\frac{8}{9} \\ \frac{16}{9} \end{pmatrix}$ donc

$$HB = \sqrt{\left(\frac{16}{9}\right)^2 + \left(-\frac{8}{9}\right)^2 + \left(\frac{16}{9}\right)^2} = \frac{8}{3}$$

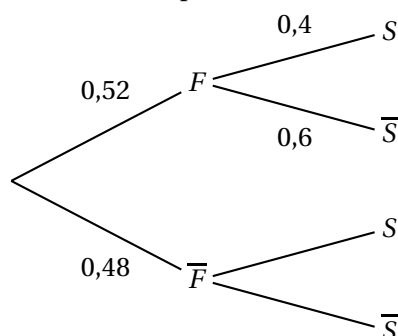
$$\text{Donc } \mathcal{A}_{AHC} = \frac{3 \times \frac{8}{9}}{\frac{8}{3}} = 1 \text{ unité d'aire.}$$

EXERCICE 3 (7 points)

Thèmes : probabilité, loi binomiale.

1. a. L'énoncé nous indique que ce stage a été suivi par 25 % des salariés. Donc $p(S) = 0,25$.

b. L'arbre complété avec les valeurs disponibles :



c. On calcule $p(F \cap S)$: $p(F \cap S) = p_S(F) \times p(S) = 0,4 \times 0,52 = 0,208$

d. On cherche calculer $p_S(F)$. D'après la formule de Bayes,

$$p_S(F) = \frac{p(F \cap S)}{p(S)} = \frac{0,208}{0,25} = 0,832$$

e. Appliquons la formule des probabilités totales : $p(S) = p(S \cap F) + p(S \cap \bar{F})$.

$$\text{Donc } p(S \cap \bar{F}) = p(S) - p(S \cap F) = 0,25 - 0,208 = 0,042.$$

$$\text{Avec la formule de Bayes : } p_{\bar{F}}(S) = \frac{p(S \cap \bar{F})}{p(\bar{F})} = \frac{0,042}{0,48} = 0,00875 < 0,1.$$

L'affirmation du directeur est donc exacte.

2. a. Il s'agit là d'un schéma de Bernoulli : la répétition de 20 expériences aléatoires n'ayant que deux issues, identiques et indépendantes entre elles. X est la variable aléatoire qui compte les succès. X suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 20$ et $p = 0,25$: $X \sim \mathcal{B}(20 ; 0,25)$

b. $p(X = 5) = \binom{20}{5} \times 0,25^5 \times (1 - 0,25)^{20-5} \approx 0,202.$

La probabilité qu'exactement 5 salariés suivent le stage est d'environ 0,202.

c. « proba(5) » calcule pour k allant de 0 à 5, la somme des probabilités $p(X = k)$, Soit $p(X \leq 5)$. À la calculatrice, $p(X \leq 5) \approx 0,617$.

Cela signifie que la probabilité qu'au plus 5 salariés aient effectué le stage, est égale à 0,617.

La probabilité qu'au moins 6 salariés suivent le stage est d'environ 0,617.

d. $p(X \geq 6) = 1 - p(X < 6) = 1 - p(X \leq 5) \approx 1 - 0,617 \approx 0,383$

3. • Premier exemple : supposons qu'il y ait 25 salariés à 1 000 € et 75 à 1 200 €, les premiers ayant fait le stage.

$$\text{Le salaire moyen est égal à } \frac{25 \times 1\,000 + 75 \times 1\,200}{100} = 1\,150 \text{ €}.$$

Après augmentation le salaire moyen passe à :

$$\frac{25 \times 1\,000 \times 1,05 + 75 \times 1\,200 \times 1,02}{100} = 1\,180,50 \text{ €}.$$

L'augmentation moyenne est donc égale à $\frac{1\,180,5}{1\,150} \approx 1,0265$, soit une augmentation d'environ 2,65 %.

- Deuxième exemple : supposons qu'il y ait 25 salariés à 1 200 € et 75 à 1 000 €, les premiers ayant fait le stage.

Le salaire moyen est égal à $\frac{25 \times 1\,200 + 75 \times 1\,000}{100} = 1\,050$ €.

Après augmentation le salaire moyen passe à :

$$\frac{25 \times 1\,200 \times 1,05 + 75 \times 1\,000 \times 1,02}{100} = 1\,080 \text{ €}.$$

L'augmentation moyenne est donc égale à $\frac{1\,080}{1\,050} \approx 1,0285$, soit une augmentation d'environ 2,85 %.

Conclusion : l'augmentation moyenne dépend de la répartition des salaires : on ne peut pas répondre à cette question.

EXERCICE 4 (7 points)

Thèmes : fonctions, convexité, limites.

1. Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{-2x^2 + 3x - 1}{x^2 + 1}$.

$$\text{Pour } x \neq 0, f(x) = \frac{x^2 \left(-2 + \frac{3}{x} - \frac{1}{x^2} \right)}{x^2 \left(1 + \frac{1}{x^2} \right)} = \frac{-2 + \frac{3}{x} - \frac{1}{x^2}}{1 + \frac{1}{x^2}} \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -2.$$

Donc la droite horizontale d'équation $y = -2$ est une asymptote à la courbe représentative de la fonction f .

Réponse c

2. La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ donc admet des primitives. Soit F une primitive de f .

$\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x)$ est de la forme $u'(x) \times e^{u(x)}$, et admet pour primitives les fonctions $x \mapsto e^{u(x)} + k$, $k \in \mathbb{R}$.

En posant $u(x) = x^2$ et $u'(x) = 2x$, et en remarquant que $f(x) = \frac{1}{2} \times 2x e^{x^2}$, on peut donc écrire :

$$\forall x \in \mathbb{R}, F(x) = \frac{1}{2} \times e^{x^2} + k.$$

Sachant que $F(0) = 1$ on en déduit que : $\frac{1}{2} + k = 1$ donc $k = \frac{1}{2}$.

$$\text{Donc } \forall x \in \mathbb{R}, F(x) = \frac{1}{2} e^{x^2} + \frac{1}{2}$$

Réponse d

3. La courbe représentative est celle de la fonction f' . Avec la précision permise par le graphique, on peut affirmer que la fonction f' est croissante sur $] -\infty ; 3]$ et décroissante sur $[3 ; +\infty[$. $[0 ; 2] \subset] -\infty ; 3]$, donc f' est croissante $[0 ; 2]$.

La fonction est donc convexe sur $[0 ; 2]$.

Réponse c

4. La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3e^{-x^2} + 2$ est continue et dérivable. $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) > 0$.

Les primitives de la fonction f , ont pour dérivée f , qui est positive sur $\mathbb{R}$.

Donc les fonctions F sont croissantes sur $\mathbb{R}$.

Réponse a

$$5. \forall x \in]0; +\infty[, f(x) = \frac{2 \ln(x)}{x^2 + 1} = 2 \frac{x^2 \times \frac{\ln(x)}{x^2}}{x^2 \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)} = 2 \frac{\frac{\ln(x)}{x^2}}{1 + \frac{1}{x^2}}.$$

Nous savons que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x^2} = 0$ (croissances comparées) et $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \frac{1}{x^2} = 1$

donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

Réponse d

$$6. \forall x \in \mathbb{R}, (E) \quad e^{2x} + e^x - 12 = 0 \iff (e^x)^2 + e^x - 12 = 0.$$

On pose comme changement de variable : $X = e^x$: $(E) \iff X^2 + X - 12 = 0$. Cette équation a pour solutions $X = -4$ et $X = 3$.

Or $X = e^x > 0$ donc l'unique solution sera celle de l'équation $X = e^x = 3 \iff x = \ln(3)$.

Réponse c