

Sommaire

I. Nombres et calculs.....	2
• Arithmétique et calcul numérique.....	2
• Calcul littéral.....	5
• Ensembles de nombres, intervalles et inégalités.....	8
• Système d'équations.....	10
II. Fonctions.....	11
• Généralités sur les fonctions.....	11
• Fonctions affines.....	15
• Signe d'une fonction et inéquations.....	17
• Fonctions de référence.....	19
III. Géométrie.....	22
• Repérage dans le plan.....	22
• Vecteurs du plan.....	25
• Colinéarité de vecteurs.....	29
• Équations de droite.....	31
IV. Probabilités.....	35
V. Statistiques.....	39
• Proportions et pourcentages.....	39
• Statistiques à une et deux variables.....	41
• Échantillonnage et estimation.....	45

Arithmétique et calcul numérique

I. Multiples, diviseurs et nombres premiers

I.1 Multiples et diviseurs

Soit a et b deux entiers relatifs. On dit que a est un diviseur de b lorsqu'il existe un entier relatif k tel que $b=ka$. On peut alors dire que :

- b est un **multiple** de a .
- a **divise** b .
- b est **divisible** par a .

Soit a un entier relatif. Si b et b' sont deux multiples de a , alors $b+b'$ est multiple de a .

Soit a un entier relatif. Alors :

- a est **pair** lorsqu'il existe un entier relatif p tel que $a=2p$.
- a est **impair** lorsqu'il existe un entier relatif p tel que $a=2p+1$.

Soit a un entier relatif. Si a est impair alors a^2 est impair.

Remarque

Si a est pair, alors a^2 est pair.

I.2 Nombres premiers

Un entier naturel non nul est dit **premier** lorsqu'il possède exactement deux diviseurs distincts qui sont 1 et lui-même.

Tout nombre entier peut se décomposer de manière unique sous la forme d'un produit de nombres entiers.

On dit que deux nombres sont **premiers entre eux** s'ils ne possèdent aucun autre diviseur en commun que -1 et 1 .

Une fraction est **irréductible** si le numérateur et le dénominateur n'admettent qu'un seul diviseur en commun qui est 1.

II. Fractions

• Dans un calcul littéral, l'écriture $\frac{a}{b}$ n'a de sens que si $b \neq 0$.

• Le signe « moins » dans un quotient : $-\frac{a}{b} = \frac{-a}{b} = \frac{a}{-b}$.

• Égalité :

$$\begin{aligned} \triangleright \frac{ac}{bc} &= \frac{a}{b} & \triangleright \frac{a}{b} &= \frac{c}{d} \text{ équivaut à } ad = bc & \triangleright \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} &= \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc} \end{aligned}$$

• Addition, soustraction avec dénominateur commun : $\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}$ et $\frac{a}{b} - \frac{c}{b} = \frac{a-c}{b}$.

• Addition, soustraction avec dénominateur différent : $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} + \frac{cb}{bd} = \frac{ad+cb}{bd}$.

III. Puissances

$$\begin{aligned} &\bullet a^0 = 1 & \bullet a^m \times a^n &= a^{m+n} & \bullet \text{ si } a \neq 0, \frac{a^m}{a^n} &= a^{m-n} & \bullet (a^m)^n &= a^{m \times n} \\ &\bullet \text{ si } a \neq 0, a^{-n} &= \frac{1}{a^n} & \bullet a^n \times b^n &= (ab)^n & \bullet \text{ si } b \neq 0, \frac{a^n}{b^n} &= \left(\frac{a}{b}\right)^n \end{aligned}$$

IV. Écriture scientifique

L'écriture scientifique d'un nombre décimal a est $b \times 10^n$ où b est un nombre décimal compris entre 1 et 10 (10 exclu) et n un entier relatif.

V. Carré

- Deux nombres réels opposés ont le même carré : Pour tout nombre a , on a $(-a)^2 = a^2$.
- Pour tous nombres réels a et b , on a $a^2 b^2 = (ab)^2$ et si $b \neq 0$, $\frac{a^2}{b^2} = \left(\frac{a}{b}\right)^2$.

VI. Racine carrée

Soit a un nombre réel positif. La racine carrée de a est l'unique nombre réel positif dont le carré est égal à a . Pour tout $a \geq 0$, $(\sqrt{a})^2 = a$.

Un **carré parfait** est le carré d'un nombre entier.

Soit a un nombre réel. Alors :

- Si $a \geq 0$, alors $\sqrt{a^2} = a$.
- Si $a \leq 0$, alors $\sqrt{a^2} = -a$.

Soit a et b deux nombres réels positifs. On a alors :

- $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$.
- Si $b \neq 0$, $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$.
- Si a et b sont positifs, $\sqrt{a+b} < \sqrt{a} + \sqrt{b}$.

Remarque

Par convention, on ne laisse jamais de radical, c'est-à-dire de racine carrée au dénominateur. Pour « supprimer » ce radical, il suffit de multiplier le numérateur et le dénominateur par ce même radical.

Ensemble de nombres, intervalles et inégalités

I. Ensemble de nombres

- L'ensemble des **nombres entiers naturels** est noté $\mathbb{N}$.

$$\mathbb{N} = \{0; 1; 2; 3; 4 \dots\}$$

- L'ensemble des **nombres entiers relatifs** est noté $\mathbb{Z}$.

$$\mathbb{Z} = \{\dots -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3 \dots\}$$

- L'ensemble des **nombres décimaux** est noté $\mathbb{D}$.

$\mathbb{D}$ est l'ensemble des nombres qui peuvent s'écrire sous la forme $\frac{a}{10^n}$ où $n \in \mathbb{N}$. Ces nombres s'écrivent avec un nombre fini de chiffres après la virgule.

- L'ensemble des **nombres rationnels** est noté $\mathbb{Q}$.

$\mathbb{Q}$ est l'ensemble des nombres qui peuvent s'écrire sous la forme d'un quotient $\frac{p}{q}$ avec p un entier relatif, q un entier relatif non nul et tel que la fraction $\frac{p}{q}$ est irréductible.

- L'ensemble des **nombres réels** est noté $\mathbb{R}$.

$\mathbb{R}$ est l'ensemble de tous les nombres que nous utiliserons.

- L'**ensemble vide** se note $\emptyset$.

$\emptyset$ est l'ensemble qui ne contient aucun nombre.

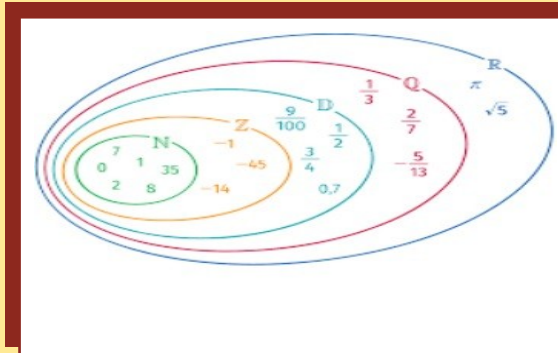
Tous les éléments de $\mathbb{N}$ appartiennent à $\mathbb{Z}$.

On dit que $\mathbb{N}$ est inclus dans $\mathbb{Z}$.

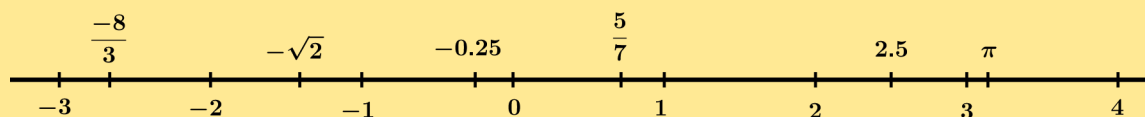
On note $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$.

On a donc aussi les inclusions suivantes :

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$



Tout nombre réel est représenté par l'abscisse d'un point sur la **droite numérique**.



- Le nombre $\frac{1}{3}$ n'est pas un nombre décimal.

- Le nombre $\sqrt{2}$ est irrationnel.

Soit n un entier. $\sqrt{n}$ est un entier dans le cas où n est un **carré parfait**, sinon un irrationnel.

II. Intervalles

L'ensemble des nombres réels compris, au sens large, entre deux nombres a et b est noté $[a; b]$. C'est un **intervalle** qui désigne ici tous les nombres réels x tels que $a \leq x \leq b$. Les nombres a et b sont appelés les **bornes** de l'intervalle.

Notation	Nombres x	Représentation sur un axe
$[a; b]$	$a \leq x \leq b$	
$]a; b[$	$a < x < b$	
$[a; b[$	$a \leq x < b$	
$]a; b]$	$a < x \leq b$	
$[a; +\infty[$	$a \leq x$	
$]a; +\infty[$	$a < x$	
$] -\infty; b]$	$x \leq b$	
$] -\infty; b[$	$x < b$	

Remarques

- $-\infty$ et $+\infty$ se lisent respectivement « moins l'infini » et « plus l'infini ». Le crochet est toujours vers l'extérieur en $-\infty$ et $+\infty$.
- On dit qu'un intervalle est **fermé** si ses extrémités appartiennent à l'intervalle.
- On dit qu'un intervalle est **ouvert** si ses extrémités n'appartiennent pas à l'intervalle.
- L'ensemble $\mathbb{R}$ est aussi un intervalle et peut se noter $] -\infty; +\infty[$. $\mathbb{R}$ est un intervalle ouvert.
- $\mathbb{R}^+$ désigne l'ensemble des nombres réels positifs ou nuls. On le note également $[0; +\infty[$.
- $\mathbb{R}^-$ désigne l'ensemble des nombres réels négatifs ou nuls. On le note également $] -\infty; 0]$.

III. Intersection et réunion

- L'**intersection** de deux ensembles A et B est l'ensemble des éléments qui appartiennent à A et à B . On note $A \cap B$.
- La **réunion** de deux ensembles A et B est l'ensemble des éléments qui appartiennent à A ou à B . On note $A \cup B$.

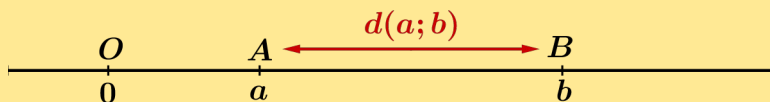
Attention !

Dans le langage usuel, le mot « ou » signifie le plus souvent un choix obligatoire, comme « fromage ou dessert ». On parle de « ou » **exclusif**. En mathématique, le symbole $\cup$ propose un choix qui n'est pas exclusif : « un nombre appartient à $A \cup B$ » ne signifie pas « ce nombre appartient soit à A , soit à B » mais « ce nombre appartient au moins à A ou à B ». Dans ce cas, le nombre peut éventuellement appartenir aux deux ensembles. On parle de « ou » **inclusif**.

IV. Valeur absolue

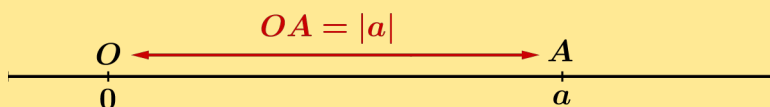
- La **valeur absolue** d'un réel x est le nombre noté $|x|$ qui est égal au nombre x si x est positif, et au nombre $-x$ si x est négatif. Autrement dit :
 - Si $x \geq 0$, alors $|x| = x$
 - Si $x \leq 0$, alors $|x| = -x$
- Pour tout réel x , $\sqrt{x^2} = |x|$.

La **distance** entre deux réels a et b est la distance entre les points d'abscisses a et b sur la droite réelle munie d'un repère $(O; I)$. On la note $d(a; b)$.

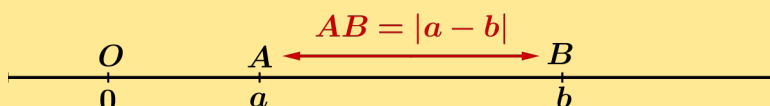


Pour tous réels a et b , on a :

- $d(a; 0) = |a|$.

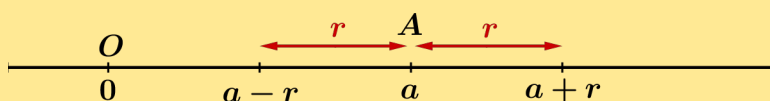


- $d(a; b) = |a - b|$.



Si un intervalle peut s'écrire sous la forme $[a - r; a + r]$ où a et r sont deux réels strictement positifs, alors on a : $x \in [a - r; a + r] \Leftrightarrow |x - a| \leq r$.

Dans ce cas, a est appelé **centre de l'intervalle** et r **rayon de l'intervalle**.



Calcul littéral

I. Développement et factorisation

Développer un produit de facteurs, c'est l'écrire sous la forme d'une somme.

Pour tous nombres a , b , c , d et k , on a :

- $k(a + b) = ka + kb$
- $k(a - b) = ka - kb$
- $(a + b)(c - d) = ac - ad + bc - bd$

II. Identités remarquables

Pour tous nombres réels a et b , on a :

- $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
- $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

III. Équations, inégalités et inéquations

- Une équation (respectivement une inéquation) est une égalité (respectivement une inégalité) dans laquelle est **présente une inconnue (ou des inconnues)**.
- Un nombre est **solution d'une équation** (respectivement **d'une inéquation**) si, en substituant ce nombre à l'inconnue, on obtient **une égalité** (respectivement **une inégalité**) **vraie**.

- Résoudre une équation (respectivement une inéquation), c'est déterminer **toutes les solutions de l'équation** (respectivement de l'**inéquation**).
- Deux équations (respectivement deux inéquations) sont **équivalentes** si elles ont les **mêmes solutions**.

- **La multiplication et la division** des deux membres d'une inégalité **par un même nombre strictement négatif change l'ordre de comparaison**.
- Les autres opérations ne modifient pas l'ordre.

Modéliser un problème par une inéquation, c'est **écrire une inéquation en lien avec les contraintes exposées par le problème**.

IV. Quelques résolutions d'équations

Équation produit nul

Un produit est nul si et seulement si au moins l'un de ses facteurs est nul :

$$A \times B = 0 \Leftrightarrow A = 0 \text{ ou } B = 0$$

Équation quotient nul

Un quotient est nul si et seulement si son numérateur est nul et son dénominateur non nul :

$$\frac{A}{B} = 0 \Leftrightarrow A = 0 \text{ et } B \neq 0$$

Équation carrée

Soit a un nombre réel. On considère l'équation $x^2 = a$ dans $\mathbb{R}$. Alors :

- Si $a < 0$, l'équation n'admet aucune solution.
- Si $a = 0$, l'équation admet $x = 0$ comme unique solution.
- Si $a > 0$, l'équation admet deux solutions $x = \sqrt{a}$ et $x = -\sqrt{a}$.

Équation racine carrée

Soit a un nombre réel. On considère l'équation $\sqrt{x} = a$ dans $\mathbb{R}$. Alors :

- Si $a < 0$, l'équation n'admet aucune solution.
- Si $a \geq 0$, l'équation admet une unique solution $x = a^2$.

Équation inverse

Soit a un nombre réel. On considère l'équation $\frac{1}{x} = a$ dans $\mathbb{R}$. Alors :

- Si $a = 0$, l'équation n'admet aucune solution.
- Si $a \neq 0$, l'équation admet une unique solution $x = \frac{1}{a}$.

Système d'équations

Résoudre un système linéaire de deux équations à deux inconnues x et y revient à déterminer tous les couples $(x; y)$ qui vérifient les deux équations en même temps.

I. Système d'équations

Soit a, b, c, a', b' et c' des réels.

Résoudre le système d'équations à deux inconnues $\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a'x + b'y + c' = 0 \end{cases}$ c'est trouver tous les couples $(x; y)$ de nombres réels vérifiant simultanément les deux équations du système.

On appelle **couple solution** $(x; y)$ tout couple de réels x et y solutions simultanément des deux équations qui composent un système.

Soit a, b, c, a', b' et c' des réels et soit le système d'équations à deux inconnues suivant :

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a'x + b'y + c' = 0 \end{cases}$$

- Si les droites sont sécantes, le système admet **un seul couple solution**.
- Si les droites sont strictement parallèles, le système n'admet **aucune solution**.
- Si les droites sont confondues, le système possède **une infinité de solutions**.

II. Méthode de substitution

Cette méthode consiste à **isoler une inconnue** :

- On isole une inconnue dans une des deux équations du système.
- On la remplace dans l'autre équation afin d'obtenir une nouvelle équation avec une seule inconnue.
- On résout cette nouvelle équation.
- On remplace l'inconnue trouvée dans l'une des deux équations du système afin de trouver la seconde inconnue.
- On donne l'ensemble des solutions du système.

III. Méthode par combinaison linéaire

Cette méthode consiste à **multiplier les deux équations par des nombres** de telle manière qu'en additionnant les équations membre membre, une inconnue s'élimine. Ainsi, il n'y plus qu'à résoudre une équation à une seule inconnue. Pour trouver la deuxième inconnue, on remplace l'inconnue trouvée dans l'une des deux équations.

On l'appelle aussi la **méthode du pivot de Gauss**.

Généralités sur les fonctions

I. Définitions

- Définir une fonction f sur l'ensemble D consiste à associer, à chaque réel x de D , un **unique nombre** réel y .
- D s'appelle l'**ensemble de définition** (ou **domaine de définition**) de la fonction f .
- y s'appelle l'**image** de x par la fonction f et se note $f(x)$.
- x est un **antécédent** de y par la fonction f .

II. Différentes façons de définir une fonction

Soit f une fonction, D son ensemble de définition et $x \in D$.

L'**expression algébrique** de la fonction f donne directement $f(x)$ en fonction de la variable x .

Soit f une fonction, D son ensemble de définition et $x \in D$.

Un **tableau de valeurs** de la fonction f donne, sur la première ligne (ou colonne), différentes valeurs de la variable x et, en vis-à-vis sur la deuxième ligne (ou colonne), les images $f(x)$ qui leur sont associées.

Antécédent x						
Image $f(x)$						

La **courbe représentative** de la fonction f dans un repère est l'ensemble des points de coordonnées $(x; f(x))$ (ou $(x; y)$) où x parcourt le domaine de définition D de la fonction f . Elle est souvent notée C_f .

L'**équation de cette courbe représentative** est $y = f(x)$.

Un point M de coordonnées $(x; f(x))$ appartient à la courbe représentative C_f d'une fonction si et seulement si x appartient à D et $y = f(x)$.

Méthode algébrique

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x - 5$.

- Déterminer une image

L'image de 7 par la fonction f est $f(7) = 3 \times 7 - 5 = 21 - 5 = 16$.

- Déterminer un antécédent

L'antécédent de 4 par la fonction f est tel que $f(x) = 4$.

On a $f(x) = 4 \Leftrightarrow 3x - 5 = 4 \Leftrightarrow 3x = 9 \Leftrightarrow x = 3$. Ainsi l'antécédent de 4 par la fonction f est 3.

- Déterminer si un point appartient à une courbe

Le point $A(1; -2)$ appartient à la courbe C_f représentative de f si et seulement si $f(1) = -2$.

On a $f(1) = 3 \times 1 - 5 = 3 - 5 = -2$. Ainsi $A \in C_f$.

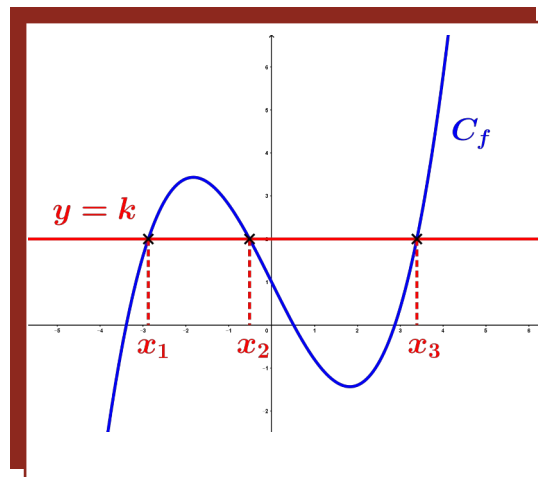
III. Résolution graphique d'équation et d'inéquation

III.1 Résolution d'équation du type $f(x)=k$

Soit f une fonction définie sur un ensemble D et k un réel fixé.

Résoudre l'équation $f(x)=k$ consiste à trouver **tous les réels x de D qui ont pour image k par la fonction f** . Ceci revient à déterminer l'ensemble des antécédents de k par f .

Graphiquement, les solutions de $f(x)=k$ sont les **abscisses de tous les points de C_f ayant pour ordonnées k** . On détermine en fait l'ensemble des abscisses des points d'intersection de la courbe C_f avec la droite d'équation $y=k$.

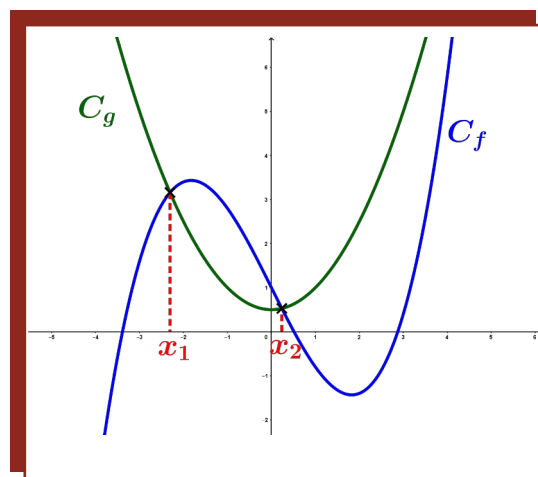


III.2 Résolution d'équation du type $f(x)=g(x)$

Soit f et g deux fonctions définies sur un ensemble D .

Résoudre $f(x)=g(x)$ consiste à déterminer **tous les réels x de D qui ont la même image par f et g** .

Graphiquement, les solutions de $f(x)=g(x)$ sont les **abscisses des points d'intersection des courbes représentatives de f et g** .

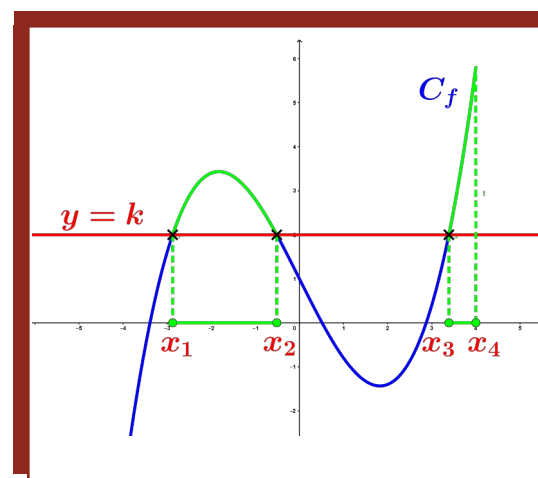


III.3 Résolution d'inéquation

Soit f une fonction définie sur un ensemble D et k un réel fixé.

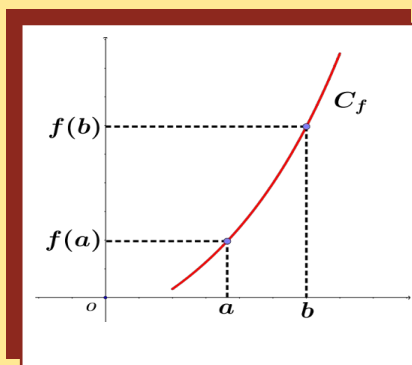
Résoudre l'équation $f(x) \geq k$ consiste à trouver **tous les réels x de D qui ont une image supérieure ou égale à k par la fonction f** .

Graphiquement, les solutions de $f(x) \geq k$ sont les **abscisses de tous les points de C_f ayant une ordonnée supérieure ou égale à k** . On détermine en fait l'ensemble des abscisses des points de la courbe C_f situés au dessus de la droite d'équation $y=k$.

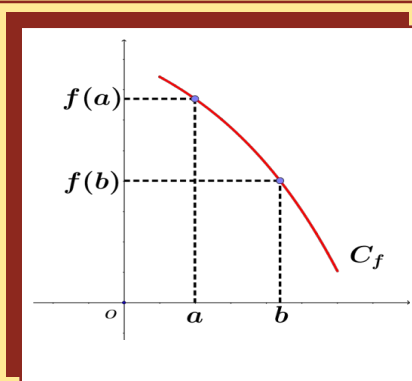


IV. Croissance et décroissance d'une fonction

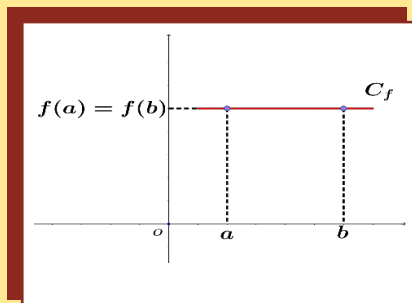
La fonction f est **croissante** sur un intervalle I
 (respectivement **strictement croissante** sur I)
 lorsque, quels que soient les réels a et b de I :
 si $a < b$, alors $f(a) \leq f(b)$
 (respectivement si $a < b$, alors $f(a) < f(b)$)



La fonction f est **décroissante** sur un intervalle I
 (respectivement **strictement décroissante** sur I)
 lorsque, quels que soient les réels a et b de I :
 si $a < b$, alors $f(a) \geq f(b)$
 (respectivement si $a < b$, alors $f(a) > f(b)$).



La fonction f est **constante** sur un intervalle I
 lorsque, quels que soient les réels a et b de I :
 si $a < b$, alors $f(a) = f(b)$



Attention !

Pour définir le sens de variation d'une fonction, il est fondamental de préciser « pour tous réels a et b de I ».

En effet, pour la fonction $f : x \rightarrow x^2$ définie sur $I = [-2; 2]$, on a : $-1 < 2$ et $f(-1) \leq f(2)$.

Donc « il existe a et b tels que $f(a) < f(b)$ ».

Mais cette affirmation n'est pas vraie pour tout a et b de I (par exemple $a = -2$ et $b = 0$) car la fonction f n'est pas croissante sur I .

On dit qu'une fonction est **monotone** si elle est soit croissante, soit décroissante.

V. Tableau de variations et extremum d'une fonction

Pour représenter les variations d'une fonction f , on utilise un tableau avec des flèches représentant la monotonie sur des intervalles les plus grands possibles.

Il faut apparaître les intervalles sur lesquels la fonction est **croissante par une flèche montante** et ceux sur lesquels la fonction est **décroissante par une flèche descendante**. De plus, si on les connaît, on écrit les **images au bout des flèches**.

L'ensemble forme le **tableau de variations** de la fonction f .

Exemple

Pour une fonction f définie sur l'intervalle $[-3; 3,5]$, croissante sur $[-3; -1]$, décroissante sur $[-1; 1]$ puis croissante sur $[1; 3,5]$, le tableau de variations est le suivant :

x	-3	-1	1	$3,5$
$f(x)$	$-2,3$	1	$0,4$	$6,1$

Diagramme du tableau de variations :

```

      -2,3  -->  1  -->  0,4  -->  6,1
    
```

Remarque

Dans un tableau de variations, il est convenu que les flèches obliques indiquent que la fonction est strictement monotone.

Soit une fonction f définie sur un intervalle I et a un réel de I .

- On dit que le réel M est le **maximum** de f sur I , **atteint** en a , si $f(a)=M$ et si pour tout réel x de I , on a $f(x) \leq M$.
- On dit que le réel m est le **minimum** de f sur I , **atteint** en a , si $f(a)=m$ et si pour tout réel x de I , on a $f(x) \geq m$.
- Un **extremum** de f sur I est un **maximum** ou un **minimum** de f sur I .
- On dit que le réel L est un **maximum** (respectivement **minimum**) **local** de f sur I s'il existe un intervalle ouvert J contenu dans I , tel que L est le maximum (respectivement minimum) de f sur J .

Remarques

- Les pluriels de "minimum", "maximum" et "extremum" sont "minima", "maxima" et "extrema".
- On dit que $f(a)$ est le maximum (ou le minimum) de f sur I atteint pour $x=a$.
- On différencie maximum **global** et **local** :

Un maximum **global** correspond à la valeur la plus grande sur tout l'ensemble de définition.

Un maximum **local** correspond à la valeur la plus grande sur une partie de l'ensemble de définition.

Reprenons l'exemple précédent. Il y a deux maximums qui sont 1 et 6,1. 1 est un maximum local alors que 6,1 est un maximum global.

Fonctions affines

Une **fonction affine** est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=ax+b$, où a et b sont deux nombres réels.

Remarques

- Lorsque $b=0$, la fonction f définie par $f(x)=ax$ est une fonction linéaire.
- Lorsque $a=0$, la fonction f définie par $f(x)=b$ est une fonction constante.

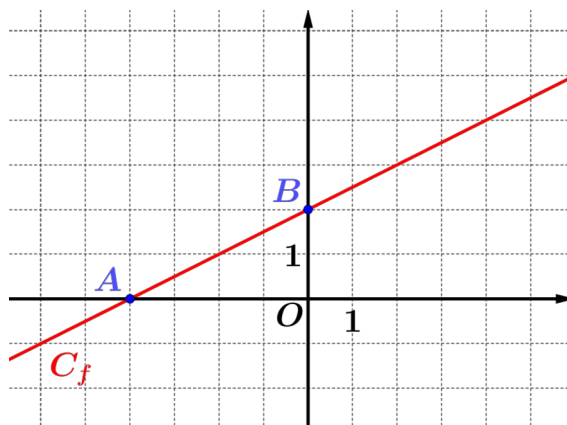
La représentation graphique d'une fonction affine f est une droite. Le réel a s'appelle **coefficient directeur** de la droite et b l'**ordonnée à l'origine**.

Remarques

- Lorsque $b=0$, la droite passe par l'origine du repère.
- Lorsque $a=0$, la droite est parallèle à l'axe des abscisses.

Représentation graphique

La droite représentative d'une fonction affine f passe par les points de coordonnées $A\left(-\frac{b}{a};0\right)$ et $B(0;b)$.

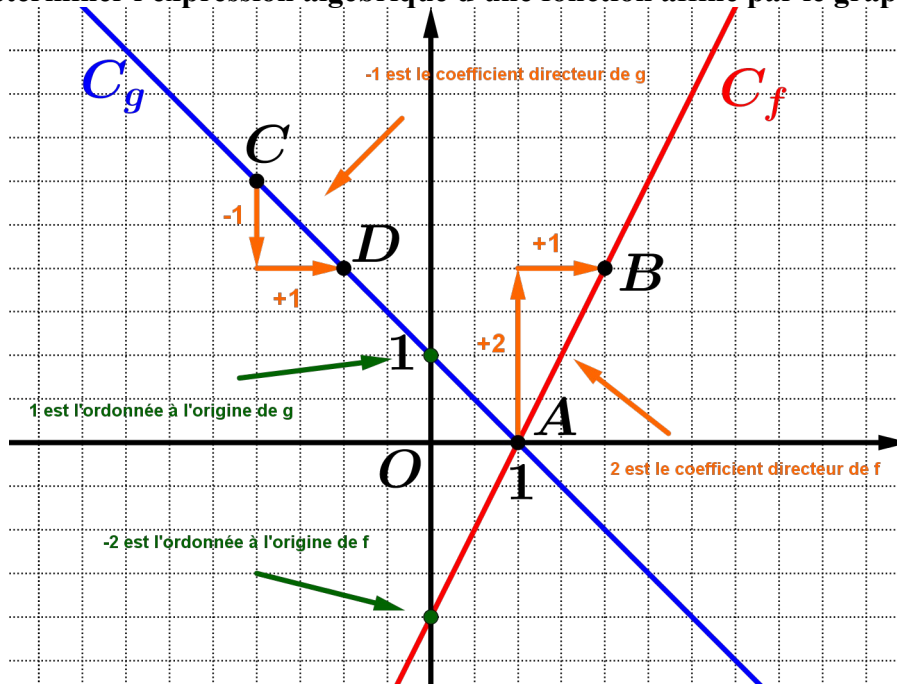


Soit f une fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=ax+b$.

- Si $a > 0$, alors la fonction f est **strictement croissante** sur $\mathbb{R}$. La droite représentative de f est tournée "vers le haut".
- Si $a < 0$, alors la fonction f est **strictement décroissante** sur $\mathbb{R}$. La droite représentative de f est tournée "vers le bas".
- Si $a = 0$, alors la fonction f est **constante** sur $\mathbb{R}$. La droite représentative de f est parallèle à l'axe des abscisses.

Soit f une fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=ax+b$. On a alors, quels que soient les nombres réels x_1 et x_2 distincts l'un de l'autre :

$$a = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Méthode : déterminer l'expression algébrique d'une fonction affine par le graphique

Pour la droite représentative de f :

- Le coefficient directeur est 2.
- L'ordonnée à l'origine est -2 .

Ainsi l'expression algébrique de f est $f(x) = 2x - 2$.

Pour la droite représentative de g :

- Le coefficient directeur est -1 .
- L'ordonnée à l'origine est 1.

Ainsi l'expression algébrique de g est $g(x) = -x + 1$.

Méthode : Déterminer l'expression algébrique d'une fonction affine par le calcul

Dans un repère, la représentation graphique correspondant à une fonction affine f passe par les points $A(-2; 4)$ et $B(3; 1)$. Déterminons par le calcul l'expression algébrique de f .

- On commence par calculer le coefficient directeur a .

$$\text{On a } a = \frac{f(x_B) - f(x_A)}{x_B - x_A} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{1 - 4}{3 - (-2)} = -\frac{3}{3 + 2} = -\frac{3}{5}$$

$$\text{D'où } f(x) = -\frac{3}{5}x + b.$$

- On détermine ensuite l'ordonnée à l'origine b .

Le point B appartient à la courbe représentative de f . Donc ses coordonnées vérifient l'expression algébrique de f .

$$\text{On a alors } f(3) = -\frac{3}{5} \times 3 + b \Leftrightarrow 1 = -\frac{9}{5} + b \Leftrightarrow b = 1 + \frac{9}{5} \Leftrightarrow b = \frac{14}{5}.$$

$$\text{Ainsi, pour tout } x \in \mathbb{R}, f(x) = -\frac{3}{5}x + \frac{14}{5}.$$

Signe d'une fonction et inéquations

I. Étude du signe d'une fonction

Étudier le signe d'une fonction ou d'une expression $f(x)$ revient à déterminer les valeurs de x pour lesquelles $f(x)$ est positif, nul ou négatif. Le signe est souvent présenté sous la forme d'un **tableau de signes**.

Remarque

Le tableau de signe d'une fonction comporte deux lignes :

- Sur la première ligne, on indique les éléments du domaine de définition de la fonction et les éventuelles valeurs de x pour lesquelles la fonction s'annule.
- Sur la deuxième ligne, on crée des cases dans lesquelles on indique le signe de la fonction ainsi que les zéros en dessous des valeurs de x pour lesquelles la fonction s'annule.

II. Étude du signe d'une fonction affine

Soit a et b deux réels tels que $a \neq 0$. La fonction affine f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax + b$ s'annule et change de signe une fois et une seule dans son ensemble de définition en $x = -\frac{b}{a}$.

- Si $a > 0$, alors $f(x) > 0 \Leftrightarrow x > -\frac{b}{a}$.

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$f(x)$	$-$	0	$+$

- Si $a < 0$, alors $f(x) > 0 \Leftrightarrow x < -\frac{b}{a}$.

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$f(x)$	$+$	0	$-$

Remarque

Pour trouver le signe d'une fonction affine, il est aussi possible d'utiliser son sens de variations :

Si $a > 0$, alors la fonction affine est croissante et donc elle est d'abord négative puis positive.

Si $a < 0$, la fonction affine est décroissante et donc elle est d'abord positive puis négative.

III. Signe et opérations

Pour déterminer le signe d'un produit ou d'un quotient de deux fonctions, on construit un tableau de signes à quatre lignes.

- La 1^{ère} ligne indique les éléments de l'ensemble de définition et les valeurs de x pour lesquelles les deux fonctions s'annulent. Les valeurs doivent être placées en respectant l'ordre.
- Les 2^e et 3^e lignes indiquent le signe de chacune des deux fonctions.
- La 4^e ligne se remplit avec la règle des signes d'un produit ou d'un quotient :
 - des facteurs de même signe donnent un produit ou un quotient positif ;
 - des facteurs de signes contraires donnent un produit ou un quotient négatif.

Remarques

- Le tableau de signes peut être constitué de plus de quatre lignes. Par exemple, si l'expression étudiée est un produit de trois facteurs, alors il y aura une ligne supplémentaire dans le tableau.
- Lorsque l'on étudie le signe d'un quotient, il faut faire attention à ce que celui-ci ne s'annule pas. Il y aura donc une valeur interdite et une double barre.
- Lorsque l'on connaît le signe de termes d'une somme, on ne peut pas en général déterminer son signe, sauf si ses les termes sont tous de même signes.

Par exemple, x^2 et 4 sont chacun positifs pour tout réel x , donc $x^2 + 4 \geq 0$.

IV. Signe et inéquations

Étudier le signe d'une expression peut permettre de résoudre une inéquation.

Résolvons l'inéquation $(3x+9)(-x+2) \leq 0$.

- On commence par chercher les valeurs d'annulation de $3x+9$ et $-x+2$.

$$3x+9=0 \Leftrightarrow 3x=-9 \Leftrightarrow x=-3 \text{ et } -x+2=0 \Leftrightarrow -x=-2 \Leftrightarrow x=2.$$

- On détermine le signe de chacune des deux expressions précédentes.

La fonction $x \rightarrow 3x+9$ est croissante, donc elle est d'abord négative puis positive.

La fonction $x \rightarrow -x+2$ est décroissante, donc elle est d'abord positive et négative.

- On réunit ses résultats dans un tableau de signes et on le complète.

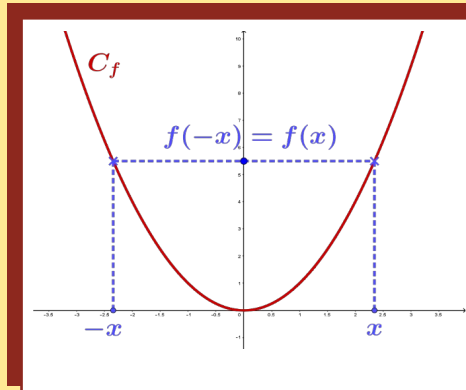
x	$-\infty$	-3	2	$+\infty$
$3x+9$	$-$	0	$+$	$+$
$-x+2$	$+$	$+$	0	$-$
$(3x+9)(-x+2)$	$-$	0	$+$	$-$

Ainsi $(3x+9)(-x+2) \leq 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty; -3] \cup [2; +\infty[$.

Fonctions de référence

I. Fonction carrée

- La **fonction carrée** est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$.
- Elle est **strictement décroissante** sur l'intervalle $]-\infty; 0]$ et **strictement croissante** sur l'intervalle $[0; +\infty[$.
- C'est une fonction **positive** sur $\mathbb{R}$.
- Sa courbe représentative est **symétrique par rapport à l'axe des ordonnées**. Elle est appelée **parabole**.



- **Deux nombres positifs et leurs carrés sont rangés dans le même ordre :**
si $0 \leq a \leq b$ alors $0 \leq a^2 \leq b^2$
- **Deux nombres négatifs et leurs carrés sont rangés dans l'ordre inverse :**
si $a \leq b \leq 0$ alors $0 \leq b^2 \leq a^2$

Soit a un nombre réel. On considère l'équation $x^2 = a$ dans $\mathbb{R}$. Alors :

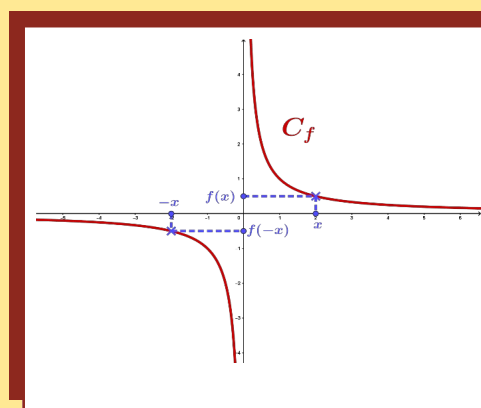
- Si $a < 0$, l'équation n'admet aucune solution.
- Si $a = 0$, l'équation admet $x = 0$ comme unique solution.
- Si $a > 0$, l'équation admet deux solutions $x = -\sqrt{a}$ et $x = \sqrt{a}$.

Soit a un nombre réel. On considère l'inéquation $x^2 \leq a$ dans $\mathbb{R}$. Alors :

- Si $a < 0$, l'inéquation n'admet aucune solution.
- Si $a = 0$, l'inéquation admet $x = 0$ comme unique solution.
- Si $a > 0$, l'inéquation admet l'ensemble solutions $[-\sqrt{a}; \sqrt{a}]$.

II. Fonction inverse

- La **fonction inverse** est la fonction définie sur $]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{x}$.
- Elle est **strictement décroissante** sur $]-\infty; 0[$ et **strictement décroissante** sur $]0; +\infty[$.
- C'est une fonction **négative** sur $]-\infty; 0[$ et **positive** sur $]0; +\infty[$.
- Sa courbe représentative est **symétrique par rapport au centre du repère**. Elle est appelée **hyperbole**.
- La fonction inverse admet une **valeur interdite en 0**.



- Deux nombres positifs et leurs inverses sont rangés dans l'ordre inverse :

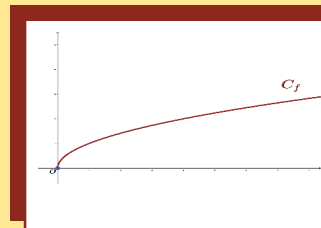
$$\text{si } 0 < a \leq b, \text{ alors } \frac{1}{a} \geq \frac{1}{b}$$

- Deux nombres négatifs et leurs inverses sont rangés dans l'ordre inverse :

$$\text{si } a \leq b < 0, \text{ alors } \frac{1}{a} \geq \frac{1}{b}$$

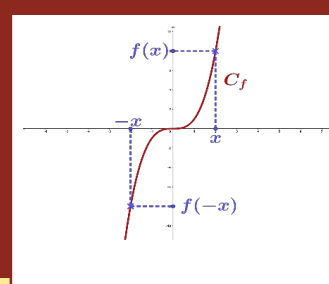
III. Fonction racine carrée

- La **fonction racine carrée** est la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x}$.
- La fonction racine carrée est **strictement croissante** sur $[0; +\infty[$.
- La fonction racine carrée est **positive** sur $[0; +\infty[$.



IV. Fonction cube

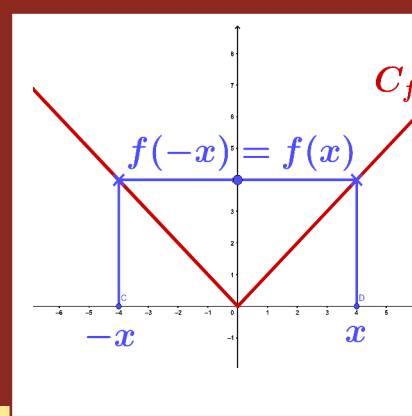
- La **fonction cube** est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3$.
- Elle est **strictement croissante** sur $\mathbb{R}$.
- C'est une fonction **négative** sur $]-\infty; 0[$ et **positive** sur $]0; +\infty[$.
- Sa courbe représentative est **symétrique par rapport au centre du repère**.



Soit a un nombre réel. L'équation $x^3 = a$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$ que l'on appelle **racine cubique** de a et que l'on note $\sqrt[3]{a}$ ou $x = a^{\frac{1}{3}}$.

V. Fonction valeur absolue

- La **fonction valeur absolue** est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = |x|$.
Le nombre $|x|$ est égal au nombre x si x est positif et au nombre $-x$ si x est négatif. Autrement dit :
 - Si $x \geq 0$, alors $|x| = x$
 - Si $x \leq 0$, alors $|x| = -x$
- Elle est **strictement décroissante** sur $]-\infty; 0[$ et **strictement croissante** sur $]0; +\infty[$.
- C'est une fonction **positive** sur $\mathbb{R}$.
- Sa courbe représentative est **symétrique par rapport à l'axe des ordonnées**.



Pour tout réel x , $\sqrt{x^2} = |x|$.

- $|x|=0$ équivaut à $x=0$.
- $|x|=|y|$ équivaut à $x=y$ ou $x=-y$.
- Pour tous réels x et y , on a :
 - $|xy| = |x| \times |y|$
 - si $y \neq 0$, $\left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|}$
 - $|x+y| \leq |x| + |y|$ (**inégalité triangulaire**)

VI. Positions relatives

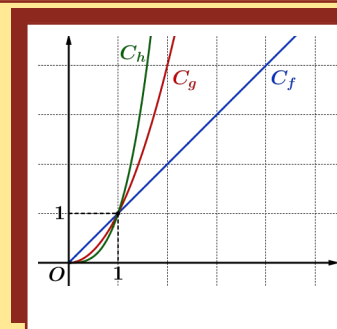
Soit x un nombre réel positif.

- Si $0 \leq x \leq 1$, alors $x^3 \leq x^2 \leq x$

- Si $x \geq 1$, alors $x \leq x^2 \leq x^3$

Soit f , g et h les fonctions définies sur $[0; +\infty[$ par $f(x)=x$, $g(x)=x^2$ et $h(x)=x^3$. On note C_f , C_g et C_h leurs représentations graphiques respectives dans un repère $(O; I, J)$.

- Si $0 \leq x \leq 1$, alors C_g est « en dessous » de C_f qui est « en dessous » de C_h .
- Si $x \geq 1$, alors C_h est « en dessous » de C_f qui est « en dessous » de C_g .



Repérage dans le plan

I. Droites remarquables du triangle et trigonométrie

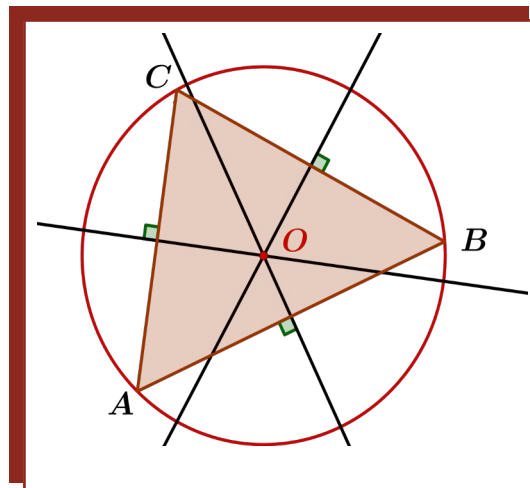
I.1 Médiatrice

Une **médiatrice** d'un triangle est **une droite perpendiculaire à un côté et passant par son milieu**.

Les trois médiatrices d'un triangle sont **concurrentes en un point équidistant de chacun des sommets** du triangle.

On a $OA=OB=OC$.

Ce point est appelé **centre du cercle circonscrit** au triangle.



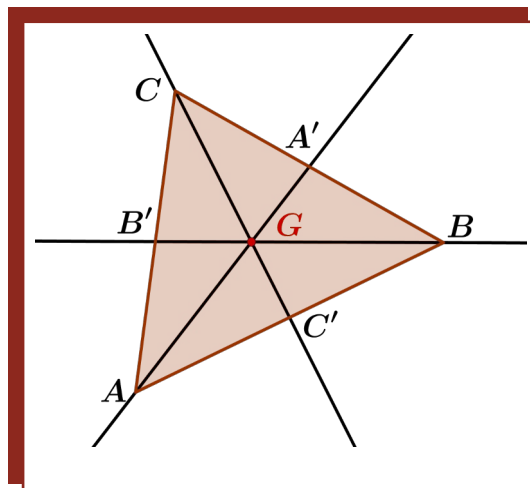
I.2 Médiane

Une **médiane** d'un triangle est **une droite passant par un sommet et le milieu du côté opposé**.

Les trois médianes d'un triangle sont **concurrentes en un point G** appelé **centre de gravité** du triangle.

Ce point G est situé au deux tiers de chaque médiane en partant du sommet :

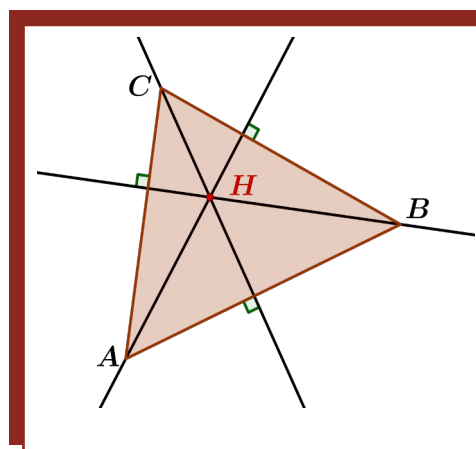
$$AG = \frac{2}{3} AA', \quad BG = \frac{2}{3} BB' \quad \text{et} \quad CG = \frac{2}{3} CC'$$



I.3 Hauteur

Une **hauteur** d'un triangle est **une droite passant par un sommet et perpendiculaire au côté opposé**.

Les trois hauteurs d'un triangle sont **concurrentes en un point** appelé **orthocentre** du triangle. Il est noté H.



I.4 Trigonométrie

Soit ABC un triangle rectangle en A . On définit alors le cosinus, le sinus et la tangente de l'angle $\widehat{ABC}$ de la façon suivante :

- $\cos(\widehat{ABC}) = \frac{\text{côté adjacent}}{\text{hypothénuse}} = \frac{AB}{BC}$
- $\sin(\widehat{ABC}) = \frac{\text{côté opposé}}{\text{hypothénuse}} = \frac{AC}{BC}$
- $\tan(\widehat{ABC}) = \frac{\text{côté opposé}}{\text{côté adjacent}} = \frac{AC}{AB}$

II. Coordonnées dans le plan

Définir un **repère du plan** consiste à choisir trois points non alignés dans un ordre précis : O , I et J . On note ce repère $(O; I, J)$ et :

Le point O est l'**origine** du repère.

La droite (OI) est l'**axe des abscisses** et le point I donne l'unité sur cet axe.

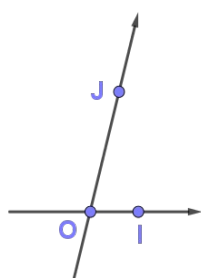
La droite (OJ) est l'**axe des ordonnées** et le point J donne l'unité sur cet axe.

Si le triangle OIJ n'a aucune propriété particulière, le repère $(O; I, J)$ est dit **quelconque**.

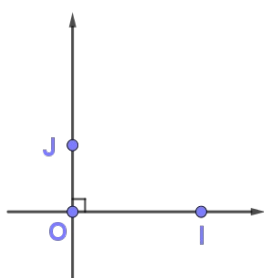
Si le triangle OIJ est rectangle en O , le repère $(O; I, J)$ est dit **orthogonal**. Les axes du repère sont alors perpendiculaires.

Si le triangle OIJ est isocèle en O , le repère $(O; I, J)$ est dit **normé**. L'unité est la même sur les deux axes.

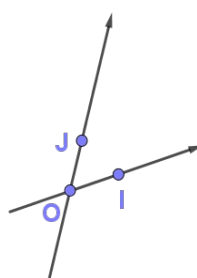
Si le triangle OIJ est rectangle isocèle en O , le repère $(O; I, J)$ est dit **orthonormé**. Les axes du repère sont alors perpendiculaires et l'unité est la même sur les deux axes.



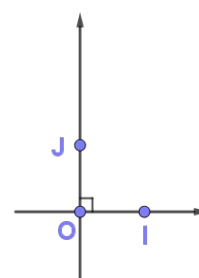
Repère quelconque



Repère orthogonal



Repère normé



Repère orthonormé

On considère un repère $(O; I, J)$ du plan et un point M .

- En traçant la parallèle à (OJ) passant par M , on obtient sur l'axe (OI) l'**abscisse** x_M du point M .
- En traçant la parallèle à (OI) passant par M , on obtient sur l'axe (OJ) l'**ordonnée** y_M du point M .
- Le couple de réels $(x_M; y_M)$ est appelé **coordonnées** du point M dans le repère $(O; I, J)$.

III. Coordonnées du milieu d'un segment

On considère dans le plan muni d'un repère $(O; I, J)$ les points $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$.
Le **milieu du segment** $[AB]$ a pour coordonnées $\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}\right)$.

IV. Distance entre deux points dans un repère orthonormé

On considère dans le plan muni d'un **repère orthonormé** $(O; I, J)$ les points $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$. La **distance** entre les points A et B est :

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

Remarques

- Il faut impérativement que le repère soit orthonormé pour pouvoir utiliser cette propriété.
- D'après la propriété, on a $AB^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2$.

Soit A , B et C trois points distincts du plan. **Les points A , B et C sont alignés** dans cet ordre si et seulement si $AC = AB + BC$.

Vecteurs du plan

I. Notion de vecteur

I.1 Translation et vecteur associé

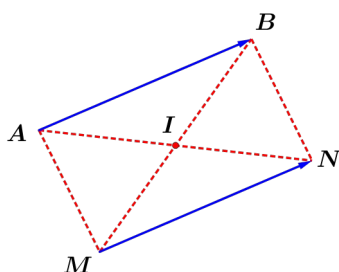
Soit A et B deux points distincts.

La **translation qui transforme A en B** associe à tout point M du plan l'unique point N tel que **$ABNM$ est un parallélogramme**.

On dit alors que N est l'image de M par la translation qui transforme A en B .

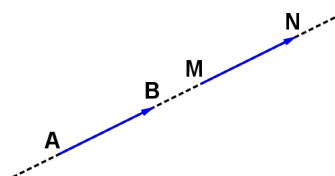
Cette translation est aussi appelée **translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$** .

1^{er} cas : $M \notin (AB)$



$ABNM$ est un **parallélogramme**

2^e cas : $M \in (AB)$



$ABNM$ est un **parallélogramme aplati**

Remarques

- Pour le vecteur $\overrightarrow{AB}$: A s'appelle l'**origine** et B l'**arrivée**
- Un vecteur peut être défini par :
 - une **direction** (ici la droite (AB))
 - un **sens** (ici de A vers B)
 - une **norme** (aussi appelée longueur du vecteur, ici AB)

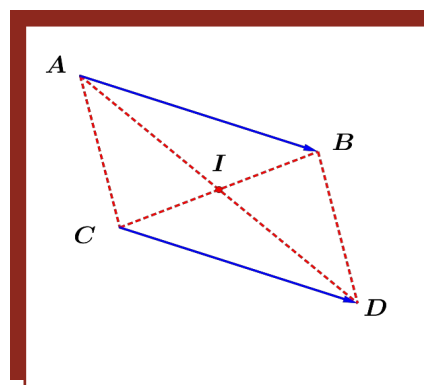
« Le point N est l'image de M par la **translation** qui transforme A en B » équivaut à « $[AN]$ et $[BM]$ se coupent en leur milieu ».

I.2 Égalité de deux vecteurs

On dit que deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont **égaux** si la translation qui transforme A en B transforme C en D . On note $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ si et seulement si $[AD]$ et $[BC]$ **se coupent en leur milieu**.

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ si et seulement si $ABDC$ est un **parallélogramme**.



$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} \text{ si et seulement si } M = B.$$

Représentant d'un vecteur

Il y a une infinité de vecteurs égaux à $\overrightarrow{AB}$.

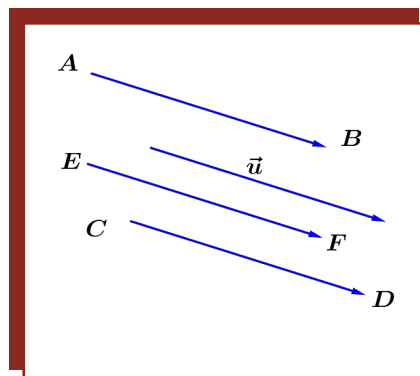
Si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{EF}$, alors on dit que

$\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{EF}$ sont des

représentants d'un même vecteur que

l'on peut noter avec une seule lettre

($\vec{u}$ par exemple), sans préciser l'origine et l'arrivée.



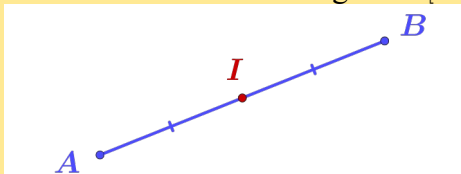
I.3 Vecteur nul et vecteur opposé

- On appelle **vecteur nul**, noté $\vec{0}$, le vecteur associé à la translation qui transforme A en A, B en B, etc. On a $\overrightarrow{AA} = \overrightarrow{BB} = \vec{0}$.
- $\overrightarrow{AB} = \vec{0}$ si et seulement si $A = B$.

On appelle **opposé** du vecteur $\overrightarrow{AB}$, noté $\overrightarrow{BA}$, le vecteur associé à la translation qui transforme B en A. On a $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$.

I.4 Caractérisation du milieu

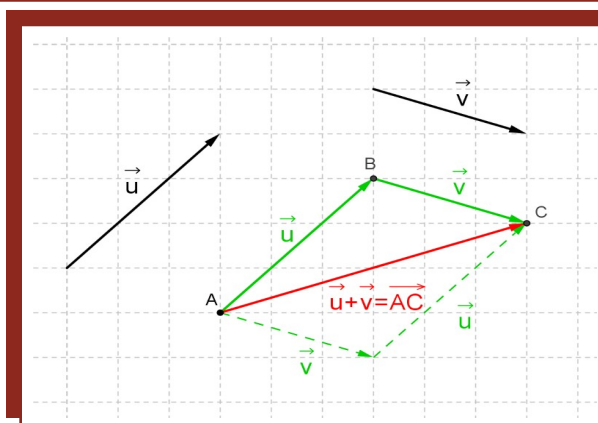
Soit A et B deux points distincts. I est le milieu du segment $[AB]$ si et seulement si $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$.



II. Somme de vecteurs

II.1 Vecteur somme

La **somme** de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le vecteur associé à la translation résultant de l'enchaînement de vecteur $\vec{u}$ et de vecteur $\vec{v}$. On note ce vecteur $\vec{u} + \vec{v}$.



Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$, on a :

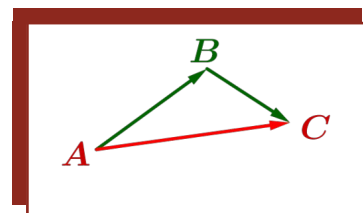
$$\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u} \quad \bullet \quad \vec{u} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{u} = \vec{u}$$

Pour la somme, l'ordre n'a pas d'importance.

$$\bullet \quad \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}$$

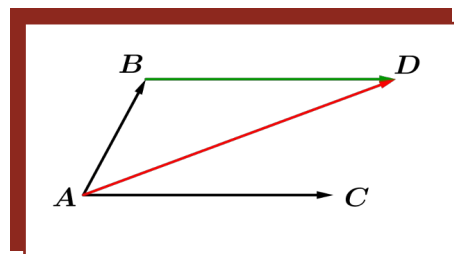
II.2 Relation de Chasles

Pour tous points A , B et C , on a : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.



III.3 Règle du parallélogramme

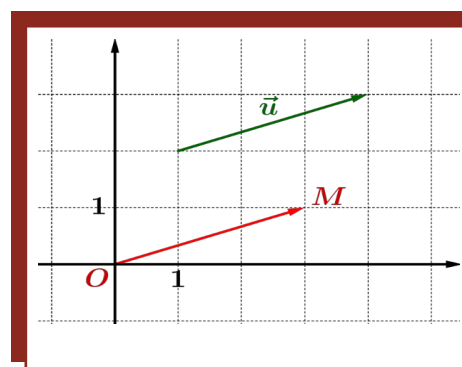
Soit A , B et C trois points distincts.
 $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$ si et seulement si $ABDC$ est un **parallélogramme**.



III. Vecteurs et coordonnées

III.1 Coordonnées d'un vecteur

Dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$, les coordonnées d'un vecteur $\vec{u}$ sont les coordonnées du point M tel que $\vec{u} = \overrightarrow{OM}$. Si $M(x; y)$, on note $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ou $\vec{u}(x; y)$.



Deux vecteurs sont **égaux** si et seulement s'ils ont les **mêmes coordonnées** dans un repère.
 Autrement dit, soit deux vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$. $\vec{u} = \vec{v}$ si et seulement si $x = x'$ et $y = y'$.

III.2 Coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$

Soit deux points $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$. Alors $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$.

III.3 Coordonnées du vecteur somme

Dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$, soit deux vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$. Alors $\vec{u} + \vec{v} \begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \end{pmatrix}$.

III.4 Coordonnées du vecteur opposé

Dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$, soit un vecteur $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Alors $-\vec{u} \begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix}$.

III.5 Coordonnées du produit d'un vecteur par un réel

Dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$, soit un vecteur $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et k un réel. Alors $k\vec{u} \begin{pmatrix} kx \\ ky \end{pmatrix}$.

IV. Norme d'un vecteur

Soit un vecteur $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$. La norme du vecteur $\vec{u}$ est la longueur AB . On note $\|\vec{u}\| = \|\overrightarrow{AB}\| = AB$.
Si $\|\vec{u}\| = 1$, le vecteur $\vec{u}$ est dit **unitaire**.

Dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, soit un vecteur $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Alors $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

- $\|\overrightarrow{AB}\| = 0 \Leftrightarrow A = B$.
- Pour tout réel k et tout vecteur $\vec{u}$, $\|k\vec{u}\| = |k| \times \|\vec{u}\|$.

Colinéarité de vecteurs

I. Produit d'un vecteur par un réel

Soit k un nombre réel et $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ un vecteur dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

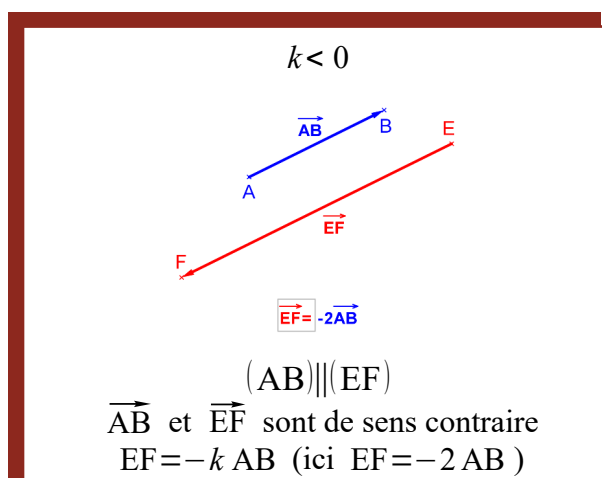
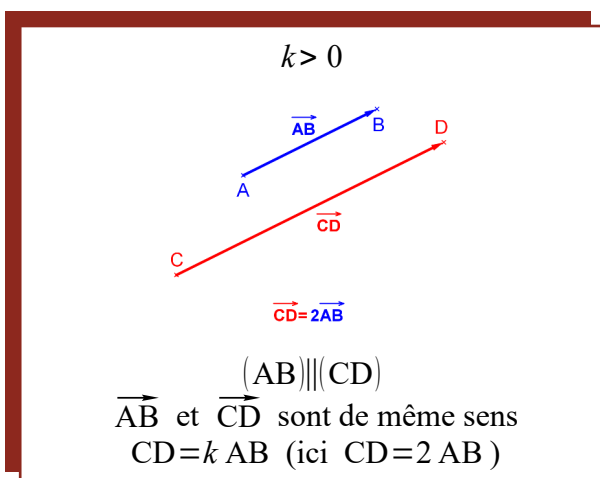
Le vecteur $k\vec{u}$ est le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} kx \\ ky \end{pmatrix}$ dans le même repère.

Soit k et k' deux nombres réels et $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs. On a :

- $k(\vec{u} + \vec{v}) = k\vec{u} + k\vec{v}$.
- $(k + k')\vec{u} = k\vec{u} + k'\vec{u}$.
- $k(k')\vec{u} = kk'\vec{u}$.
- $k\vec{u} = \vec{0}$ si et seulement si $k = 0$ ou $\vec{u} = \vec{0}$.

Le produit d'un vecteur $\vec{u}$ par un nombre réel k est un vecteur, noté $k\vec{u}$ tel que :

- Si $k > 0$, alors $k\vec{u}$ et $\vec{u}$ ont même direction, sont de même sens et $\|k\vec{u}\| = k\|\vec{u}\|$.
- Si $k < 0$, alors $k\vec{u}$ et $\vec{u}$ ont même direction, sont de sens opposé et $\|k\vec{u}\| = -k\|\vec{u}\|$.
- Si $k = 0$, alors $k\vec{u}$ est le vecteur nul.



II. Colinéarité de deux vecteurs

Deux vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{CD}$ sont dits **colinéaires** s'ils ont la **même direction**, donc si $(AB) \parallel (CD)$.

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nul.

Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement s'il existe un réel k non nul tel que $\vec{v} = k\vec{u}$.

Remarques

- Le vecteur nul est colinéaire à tous les vecteurs.
- Dans l'égalité $\vec{v} = k\vec{u}$, k est le **coefficient de colinéarité**.

Deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si **leurs coordonnées sont proportionnelles**.

Dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$, soit les vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$.

On appelle **déterminant** des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ le nombre $\det(\vec{u}, \vec{v}) = xy' - x'y$.

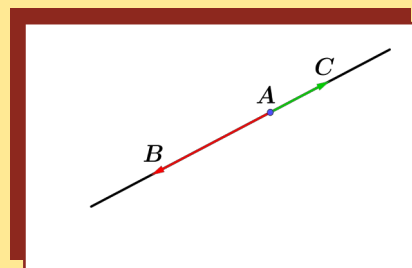
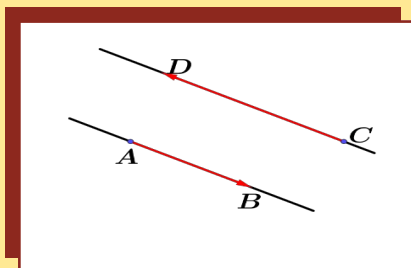
Dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$, soit les vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$.

Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si $\det(\vec{u}, \vec{v}) = 0$.

III. Parallélisme et alignement

• **Deux droites (AB) et (CD) sont parallèles** si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.

• **Trois points A, B et C sont alignés** si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.



IV. Décomposition d'un vecteur

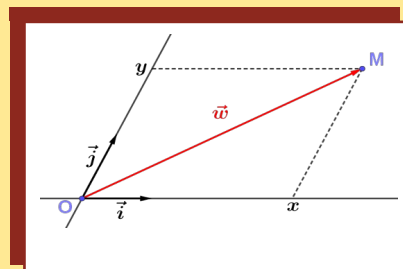
On appelle **base** du plan tout **couple de deux vecteurs non colinéaires**.

Remarque

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non colinéaires forment une base notée $(\vec{u}, \vec{v})$.

• Dire qu'un point M a pour coordonnées $(x; y)$ dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (ou une base $(\vec{i}, \vec{j})$) signifie que $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$.

• Dire qu'un vecteur $\vec{w}$ a pour coordonnées $(x; y)$ dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (ou une base $(\vec{i}, \vec{j})$) signifie que $\vec{w} = x\vec{i} + y\vec{j}$.



Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non colinéaires du plan.

Pour tout vecteur $\vec{w}$ du plan, il existe un unique couple de réels $(a; b)$ tels que $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$.

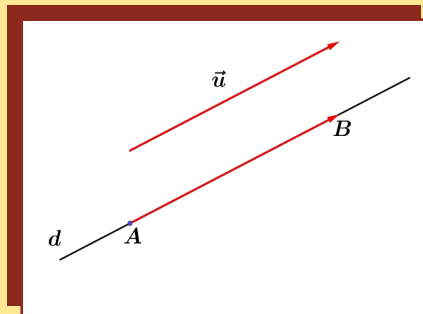
Le couple $(a; b)$ est appelé couple des coordonnées du vecteur $\vec{w}$ dans la base $(\vec{u}, \vec{v})$.

Équations de droite dans le plan

I. Caractérisation analytique d'une droite

I.1 Vecteur directeur

Soit d une droite du plan. Un vecteur $\vec{u}$ est un **vecteur directeur** de la droite d s'il existe deux points distincts A et B tels que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$.
Le vecteur $\vec{u}$ et la droite d ont alors même direction et on dit que $\vec{u}$ **dirige** la droite d .



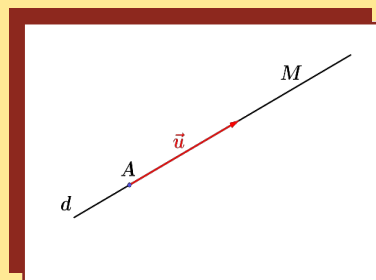
Remarque

Un vecteur directeur d'une droite ne peut pas être nul car les points A et B sont distincts.

Une droite d de vecteur directeur $\vec{u}$ et une droite d' de vecteur directeur $\vec{u}'$ sont parallèles si et seulement si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ sont colinéaires.

Soit $\vec{u}$ un vecteur directeur d'une droite d . Le vecteur $\vec{v}$ est un vecteur directeur de d si et seulement si $\vec{v}$ est non nul et colinéaire à $\vec{u}$.

Soit A un point du plan, $\vec{u}$ un vecteur non nul et d la droite passant par A de vecteur directeur $\vec{u}$.
Un point M appartient à la droite d si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires.



I.2 Équation cartésienne d'une droite

Dans un repère du plan, toute droite d admet une équation de la forme $ax + by + c = 0$, où a , b et c sont des réels tels que $(a; b) \neq (0; 0)$ (c'est-à-dire $a \neq 0$ ou $b \neq 0$).
Cette équation est appelée **équation cartésienne** de la droite d .

Remarque

Dire que d admet pour équation $ax + by + c = 0$ signifie qu'un point $M(x; y)$ appartient à la droite d si et seulement si ses coordonnées vérifient cette équation.

Dans un repère du plan, toute équation de la forme $ax + by + c = 0$ où a , b et c sont des réels tels que $(a; b) \neq (0; 0)$ est l'équation d'une droite. Cette droite a pour vecteur directeur $\vec{u} \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$.

Les droites d et d' d'équations respectives $ax + by + c = 0$ et $ax' + by' + c' = 0$ sont parallèles si et seulement si $ab' - a'b = 0$.

II. Équation réduite de droite

Soit $(O; \vec{i}, \vec{j})$ un repère du plan et d une droite du plan.

- Si d est parallèle à l'axe des ordonnées, alors l'équation de d est de la forme $x = c$, où c est un nombre réel. La droite d est alors verticale.
- Si d n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées, alors l'équation de d est de la forme $y = mx + p$, où m et p sont deux nombres réels.

Remarques

- Dans le cas d'une droite d'équation $y = mx + p$, on a $m = -\frac{a}{b}$ et $p = -\frac{c}{a}$.
- Une droite d'équation $y = mx + p$ est la représentation graphique d'une fonction affine.
- Une droite d'équation $x = c$ ne représente pas une fonction.

L'équation $y = mx + p$ s'appelle **équation réduite** de la droite.

Le réel m est appelé le **coefficient directeur** de la droite et le réel p l'**ordonnée à l'origine**.

Remarques

- Toutes les droites ont une équation qui peut s'écrire sous forme d'équation cartésienne.
- Seules les droites non verticales ont une équation qui peut s'écrire sous forme d'une équation réduite.

• Dans le plan muni d'un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$, le vecteur $\vec{u} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite d d'équation $x = c$, où c est un réel.

• Dans le plan muni d'un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$, le vecteur $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite d d'équation réduite $y = mx + p$, où m et p sont des réels.

Soit $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ deux points distincts d'une droite d tel que $x_A \neq x_B$.

Alors la droite d a pour coefficient directeur $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$.

Méthode : Déterminer une équation de droite dont on connaît deux points

Soit $(O; I, J)$ un repère du plan, $A(4; -1)$ et $B(3; 5)$ deux points d'une droite d .

Déterminons une équation de la droite d .

On a $x_A \neq x_B$, donc la droite d n'est pas verticale.

De plus $y_A \neq y_B$, donc la droite d n'est pas horizontale.

Elle est donc de la forme $y = mx + p$.

Le coefficient directeur de d est $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{5 - (-1)}{3 - 4} = \frac{6}{-1} = -6$. D'où $d : y = -6x + p$.

Comme le point A appartient à d , ses coordonnées vérifient l'équation de la droite. On a alors : $y_A = -6x_A + p \Leftrightarrow -1 = -6 \times 4 + p \Leftrightarrow p = 23$. Ainsi $d : y = -6x + 23$.

Soit $(O; I, J)$ un repère du plan, deux droites d et d' d'équations réduites respectives

$y = mx + p$ et $y = m'x + p'$.

- d et d' sont parallèles si et seulement si $m = m'$. Elles sont de plus confondues si $p = p'$.
- d et d' sont sécantes si et seulement si $m \neq m'$.

Remarques

- Deux droites d'équations respectives $x = c$ et $x = c'$ sont toujours parallèles.
- Deux droites d'équations respectives $x = c$ et $y = mx + p$ sont toujours sécantes au point de coordonnées $(c; mc + p)$.

Point d'intersection de deux droites sécantes

Un point appartient à une droite si et seulement si ses coordonnées vérifient l'équation de cette droite. Ainsi, chercher le point d'intersection de deux droites sécantes revient à déterminer les coordonnées $(x; y)$ d'un point vérifiant les équations des deux droites en même temps.

Méthode : Déterminer les coordonnées d'un point d'intersection

Soit les droites $d : y = 4x - 1$ et $d' : y = -x + 2$.

Déterminons le point d'intersection $M(x_M; y_M)$ des droites d et d' .

Le point M est sur d et sur d' . Donc les coordonnées de M vérifient chacune des deux équations.

D'où $4x_M - 1 = -x_M + 2 \Leftrightarrow 5x_M = 3 \Leftrightarrow x_M = \frac{3}{5}$.

On a alors $M\left(\frac{3}{5}; y_M\right)$. Il reste donc à trouver y_M .

Pour cela, on choisit l'une des deux équations et on remplace x par l'abscisse de M .

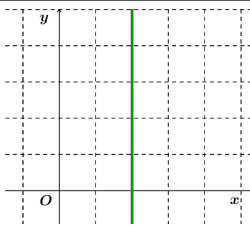
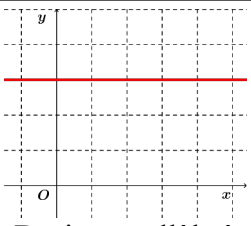
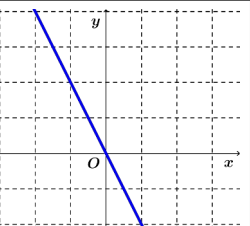
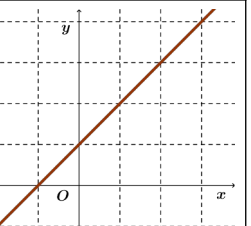
D'où $y_M = -x_M + 2 = -\left(\frac{3}{5}\right) + 2 = -\left(\frac{3}{5}\right) + \frac{10}{5} = \frac{7}{5}$.

Ainsi les coordonnées de M sont $\left(\frac{3}{5}; \frac{7}{5}\right)$.

Soit A , B et C trois points n'ayant pas tous la même abscisse. Les propositions suivantes sont équivalentes :

- A , B et C sont alignés.
- Les droites (AB) et (AC) ont le même coefficient directeur.
- Le point C appartient à la droite (AB) .

III. Synthèse

	Cas où $b=0$ et $a=0$	Cas où $a=0$ et $b=0$	Cas où $c=0$, $a=0$ et $b=0$	Cas où $b=0$, $a=0$ et $b=0$
Équation cartésienne	$ax + 0 + c = 0$ donc $x = -\frac{c}{a}$	$0 + by + c = 0$ donc $y = -\frac{c}{b}$	$ax + by + 0 = 0$ donc $y = -\frac{a}{b}x$	$ax + by + c = 0$ donc $y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$
Équation réduite	$x = \text{constante}$	$y = \text{constante}$	$y = mx$	$y = mx + p$
Représentation graphique	 Droite parallèle à (Oy)	 Droite parallèle à (Ox)	 Droite passant par O	 Autre droite

Probabilités

I. Expérience aléatoire et événement

Une **expérience aléatoire** est une expérience dont le résultat dépend du hasard. Chacun des résultats possibles s'appelle **éventualité** ou **issue**. L'ensemble Ω (ou E) de tous les résultats possibles d'une expérience aléatoire s'appelle l'**univers** de l'expérience.

- Un **événement** A est une partie de l'univers Ω (un événement peut donc être constitué de zéro, une ou plusieurs issues de Ω).
- Un **événement élémentaire** est une partie de Ω qui ne contient qu'une seule issue.
- Un **événement impossible** est un événement qui n'est réalisé par aucune issue.
- Un **événement certain** est un événement qui est réalisé par toutes les issues.
- L'**événement contraire** de A , noté $\overline{A}$, est la partie constituée de toutes les issues de Ω qui ne sont pas dans A .

On appelle **cardinal de** A , noté **Card**(A), l'effectif de l'événement A . Autrement dit, **Card**(A) est égal au nombre d'issues qui réalisent l'événement A .

Donner une **loi de probabilité** associée à une expérience aléatoire c'est en donner toutes les issues et attribuer une probabilité à chacune d'elles de sorte que la somme des probabilités des issues est égale à 1. On peut présenter les résultats sous la forme d'un tableau.

II. Probabilité d'un événement

II.1 Loi des grands nombres

On a simulé n lancers d'un dé équilibré à 6 faces et noté le nombre de fois que le chiffre 4 est sorti. Le tableau suivant résume les résultats obtenus.

Nombre de lancers n	10	50	100	500	1000	10000	100000
Nombre de 4 obtenu	3	10	19	76	161	1681	16649
Fréquence d'apparition du chiffre 4	0,3	0,2	0,19	0,15	0,161	0,1681	0,16649

Si le dé est bien équilibré, le chiffre 4 a une chance sur 6 de sortir, soit $\frac{1}{6} \approx 0,166\dots$

On peut remarquer que la fréquence d'apparition du chiffre 4 se rapproche de cette valeur théorique quand le nombre de lancers augmente.

Lors d'une expérience répétée n fois, les fréquences obtenues d'un événement A de l'expérience se rapprochent d'une valeur théorique lorsque n devient grand. Cette valeur s'appelle **probabilité de l'événement** A et est notée **P**(A).

II.2 Calculs de probabilité

La probabilité d'un événement A est la **somme des probabilités des événements élémentaires inclus dans A** .

- Pour tout événement A , on a $0 \leq P(A) \leq 1$.
- La **somme des probabilités des événements élémentaires vaut 1**.

Remarques

- La probabilité de l'événement certain vaut 1. On la note $P(\Omega)=1$ (ou $P(E)=1$).
- La probabilité de l'événement vide vaut 0. On la note $P(\emptyset)=0$.

Lorsque tous les événements élémentaires d'une expérience aléatoire ont la même probabilité, on dit alors qu'ils sont **équiprobables**. On parle d'**expérience équiprobable** ou de **loi équirépartie**.

Lors d'une expérience aléatoire ayant n issues équiprobables :

- La probabilité de chaque événement élémentaire est $\frac{1}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{1}{n}$.
- La probabilité d'un événement A est $P(A) = \frac{\text{nombre d'issues favorables à } A}{\text{nombre total d'issues}} = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)}$.

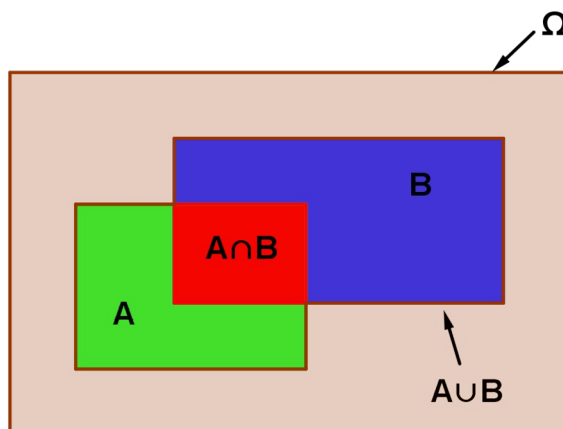
III.3 Événement contraire

La probabilité de l'**événement contraire** d'un événement A est : $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

III. Réunion et intersection d'événements

- L'événement « **A et B** », noté $A \cap B$, s'appelle l'**intersection** des événements A et B . Il est réalisé lorsque **les deux événements sont réalisés simultanément**.
- L'événement « **A ou B** », noté $A \cup B$, s'appelle la **réunion** des événements A et B . Il est réalisé lorsqu'**au moins l'un des deux événements est réalisé**.

Ces situations sont représentées par le **diagramme de Venn** ci-dessous.



Soit A et B deux événements d'une même expérience aléatoire. On a alors :
 $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Si l'événement $A \cap B$ ne contient aucun élément (c'est-à-dire que $A \cap B = \emptyset$), on dit que les événements A et B sont **incompatibles** (ou **disjoints**).

Si deux événements A et B sont **incompatibles**, alors $P(A \cap B) = 0$.
 Pour conséquence, on en déduit que $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Remarque

A et $\bar{A}$ sont incompatibles car $A \cap \bar{A} = \emptyset$.

IV. Probabilités conditionnelles

Soit A et B deux événements tels que $\text{Card}(A)$ soit non nul.
 La **probabilité conditionnelle** que l'événement B se réalise sachant que l'événement A est réalisé est notée $P_A(B)$, et elle est définie par :

$$P_A(B) = \frac{\text{Card}(A \cap B)}{\text{Card}(A)}$$

La probabilité $P_A(B)$ vérifie bien $0 \leq P_A(B) \leq 1$ et $P_A(B) + P_A(\bar{B}) = 1$.

V. Utilisation de tableaux

Les tableaux à double entrées permettent une présentation claire de certaines expériences aléatoires et facilitent le calcul des probabilités conditionnelles.

	B	$\bar{B}$	Total
A	$\text{Card}(A \cap B)$	$\text{Card}(A \cap \bar{B})$	$\text{Card}(A)$
$\bar{A}$	$\text{Card}(\bar{A} \cap B)$	$\text{Card}(\bar{A} \cap \bar{B})$	$\text{Card}(\bar{A})$
Total	$\text{Card}(B)$	$\text{Card}(\bar{B})$	$\text{Card}(\Omega)$

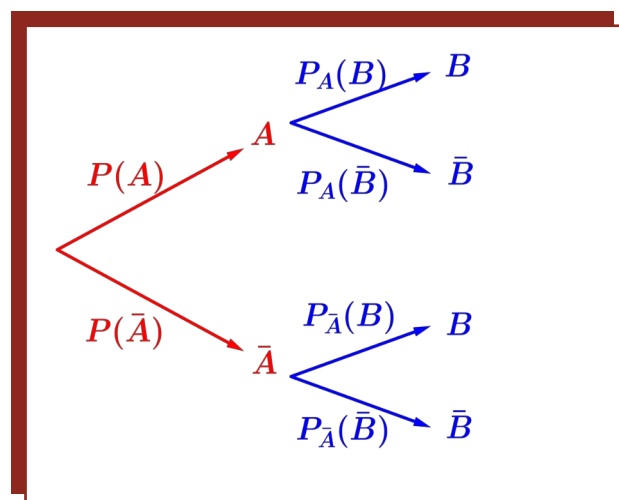
- $\text{Card}(A \cap B)$ se lit à l'intersection de la ligne A et de la colonne B .
- $\text{Card}(A)$ (respectivement $\text{Card}(B)$) se lit sur la dernière colonne (respectivement la dernière ligne).
- $P_A(B)$ (ou $P_B(A)$) s'obtient en calculant le quotient des deux cardinaux adéquats :

$$P_A(B) = \frac{\text{Card}(A \cap B)}{\text{Card}(A)} \quad \text{et} \quad P_B(A) = \frac{\text{Card}(A \cap B)}{\text{Card}(B)}$$

VI. Arbre pondéré et calculs de probabilité

- La probabilité de l'événement correspondant à un chemin est obtenue en multipliant les probabilités portées par ses branches.
- La somme des probabilités sur les branches partant d'un même nœud est égale à 1.
- La probabilité de l'événement correspondant à plusieurs chemins est obtenue en additionnant les probabilités de chacun de ces chemins (**formule des probabilités totales**).

Le cas le plus fréquent correspond à la partition la plus simple (A et $\bar{A}$). Si on connaît les probabilités de B et $\bar{B}$ par l'intermédiaire de A et $\bar{A}$, on a l'arbre suivant :



- Le produit des probabilités inscrites sur chaque branche d'un chemin donne la probabilité de l'intersection des événements placés sur ce chemin.

$$P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$$
- La somme des probabilités inscrites sur les branches issues d'un même nœud est égale à 1 (loi des nœuds).

$$P_A(B) + P_A(\bar{B}) = 1$$
- La probabilité d'un événement E est la somme des probabilités des chemins qui aboutissent à E .

$$P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B)$$

$$= P(A) \times P_A(B) + P(\bar{A}) \times P_{\bar{A}}(B)$$

Exemple

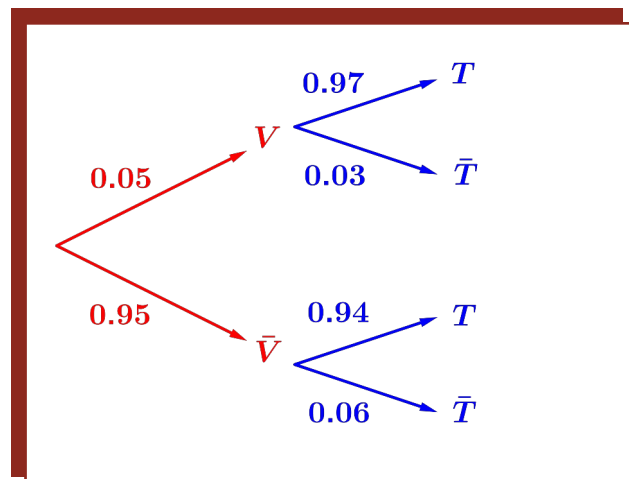
Dans un pays, il y a 5% de la population contaminée par le coronavirus. On dispose d'un test de dépistage de ce virus qui a les propriétés suivantes

- La probabilité qu'une personne contaminée ait un test positif est de 0,97 (sensibilité du test).
- La probabilité qu'une personne non contaminée ait un test négatif est de 0,94 (spécificité du test). On fait passer un test à une personne choisie au hasard dans cette population.

On note les événements suivants :

V : « la personne est contaminée par le virus »

T : « le test est positif »



- La probabilité que le test soit positif est :

$$P(T) = P(V \cap T) + P(\bar{V} \cap T)$$

$$= 0,05 \times 0,97 + 0,95 \times 0,94$$

$$= 0,9415$$

- La probabilité que la personne soit contaminée sachant que le test est positif est :

$$P_T(V) = \frac{P(V \cap T)}{P(T)}$$

$$= \frac{0,05 \times 0,97}{0,9415}$$

$$= 0,051514$$

Proportions et pourcentages

I. Proportions et pourcentages

I.1 Généralités

Soit E un ensemble non vide et A une partie de cet ensemble. On note n_E le nombre d'éléments (ou d'individus) de E et n_A le nombre d'éléments de A .

On appelle **proportion de A dans E** le quotient $p = \frac{n_A}{n_E}$.

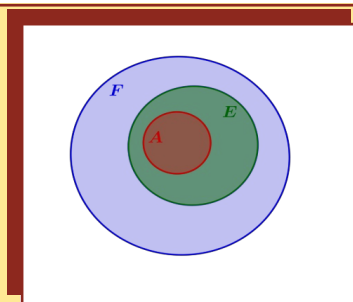
- Pour tout ensemble A contenu dans un ensemble non vide E , on a $0 \leq p \leq 1$.
- Pour obtenir un résultat en pourcentage, il suffit de **multiplier la proportion obtenue par 100**.

À partir de la première propriété, il est possible de déterminer chacun des paramètres en fonction des deux autres :

- Si on connaît n_A et n_E , on peut déterminer p : $p = \frac{n_A}{n_E}$.
- Si on connaît p (où $p \neq 0$) et n_A , on peut déterminer n_E : $n_E = \frac{n_A}{p}$.
- Si on connaît p et n_E , on peut déterminer n_A : $n_A = p \times n_E$.

I.2 Pourcentage de pourcentage

Soit F un ensemble non vide, E une partie non vide de F et A une partie non vide de E .
On note p_1 la proportion de A dans E et p_2 la proportion de E dans F .
Alors la **proportion de A dans F** est $p = p_1 \times p_2$.



II. Taux d'évolution

II.1 Variation absolue et variation relative

Soit une grandeur ayant pour valeur initiale V_I et pour valeur finale V_F .

- La **variation absolue** ΔV est la différence entre V_F et V_I . On a $\Delta V = V_F - V_I$.
- Le **taux d'évolution (ou variation relative)** t est le quotient de la différence entre V_F et V_I

par V_I . On a $t = \frac{V_F - V_I}{V_I}$.

Pour obtenir un **pourcentage d'évolution**, il suffit de **multiplier le taux d'évolution obtenu par 100**.

II.2 Coefficient multiplicateur

- Soit t le taux d'évolution qui permet à une quantité de passer de V_I à V_F .
On a alors : $V_F = (1 + t) \times V_I$.
- $1 + t$ est appelé **coefficient multiplicateur** associé au taux d'évolution t . On le note CM .
Avec ces notations, on a alors $V_F = CM \times V_I$ et $CM = 1 + t$.

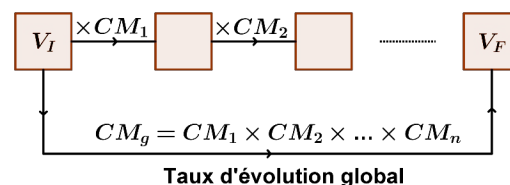
- Dans le cas d'une **augmentation**, t est **positif** et CM est un réel **supérieur à 1**.
- Dans le cas d'une **diminution**, t est **négatif** et CM est **compris entre 0 et 1**.

III. Évolutions successives et réciproques

III.1 Évolutions successives

Lorsqu'une quantité subit des **évolutions successives** $t_1, t_2, \dots, t_n$ de sa valeur, elle subit alors une **évolution globale** t_g .

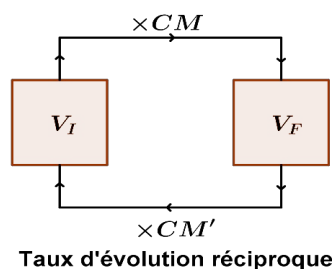
Le **coefficient multiplicateur global** CM_g associé à l'évolution t_g est le produit des coefficients multiplicateurs $CM_1, CM_2, \dots, CM_n$ associés respectivement aux évolutions $t_1, t_2, \dots, t_n$.
On a $CM_g = CM_1 \times CM_2 \times \dots \times CM_n$.



III.2 Évolution réciproque

Soit t le taux d'évolution d'une valeur passant de V_I à V_F . Alors son **taux d'évolution réciproque** t' est le taux permettant de passer de V_F à V_I .

Le **coefficient multiplicateur réciproque** CM' associé à l'évolution réciproque t' est l'inverse du coefficient multiplicateur non nul CM associé à l'évolution de départ t .
On a $CM' = \frac{1}{CM}$.



Statistiques à une et deux variables

I. Présentation d'une série statistique à une variable

- La **population** d'une série statistique est l'ensemble des éléments appelés **individus** sur lesquels porte l'étude statistique.
- Le caractère d'une série statistique est la propriété étudiée sur chaque individu. Il est dit :
 - **qualitatif** lorsqu'il ne prend pas que des valeurs numériques.
 - **quantitatif discret** lorsqu'il ne peut prendre qu'un nombre fini de valeurs numériques.
 - **quantitatif continu** lorsqu'il peut prendre une infinité de valeurs numériques.

- L'**effectif total** est le nombre d'éléments au sein de la population étudiée. On le note N .
- L'**effectif** d'une valeur du caractère est le nombre d'individus de la population prenant cette valeur (nombre de fois où cette valeur apparaît dans la série.). On le note n_i .
- La **fréquence** d'une valeur du caractère est le quotient de l'effectif de cette valeur par l'effectif total. On la note f_i et on a $f_i = \frac{n_i}{N}$ (on multiplie par 100 si on veut un résultat en pourcentage).
- Le **mode** (ou **classe modale**) de la série est la valeur (ou la classe) du caractère ayant le plus grand effectif.

On note x_i une valeur prise par un caractère quantitatif : ses valeurs sont numériques.

- L'**effectif cumulé croissant** (respectivement **décroissant**) de x_i est la somme des effectifs des valeurs inférieures (respectivement supérieures) ou égales à x_i . On le note ECC.
- La **fréquence cumulée croissante** (respectivement **décroissante**) de x_i est la somme des fréquences des valeurs inférieures (respectivement supérieures) ou égales à x_i . On la note FCC.

La somme de toutes les fréquences est toujours égale à 1.

II. Paramètres d'une série statistique

Variable x_i	x_1	x_2	...	x_p
Effectif n_i	n_1	n_2	...	n_p

II.1 Caractères de position

- La **moyenne** d'une série statistique est le nombre, noté $\bar{x}$, défini par :

$$\bar{x} = \frac{n_1 x_1 + n_2 x_2 + \dots + n_p x_p}{N} = f_1 x_1 + f_2 x_2 + \dots + f_p x_p$$

- Soit a et b deux réels.

Si une série statistique a pour moyenne $\bar{x}$, alors la série $\{ax_i + b\}$ a pour moyenne $a\bar{x} + b$.

La **médiane** d'une série statistique est le nombre, noté Me , qui partage la série en deux groupes de même effectif (50% des valeurs en dessous et 50% au dessus).

Les **quartiles** d'une série partagent celle-ci en quatre groupes de même effectif :

- Le **premier quartile** Q_1 est la plus petite valeur de la série telle que au moins un quart des valeurs sont inférieures ou égales à Q_1 .
- Le **troisième quartile** Q_3 est la plus petite valeur de la série telle que au moins trois quarts des valeurs de la série sont inférieures ou égales à Q_3 .

II.2 Caractères de dispersion

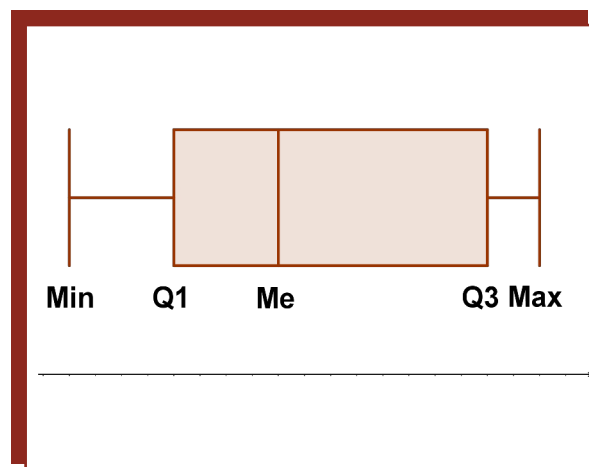
- L'**étendue** d'une série statistique est la différence entre la valeur maximale et la valeur minimale.
- L'**écart interquartile** est le nombre $Q_3 - Q_1$ et mesure la dispersion de la série par rapport à la médiane.
- L'**intervalle interquartile** $[Q_1; Q_3]$ contient 50% des valeurs de la série.
- L'**écart-type** d'une série statistique est le nombre réel positif, noté σ , défini par :

$$\sigma = \sqrt{\frac{n_1(x_1 - \bar{x})^2 + n_2(x_2 - \bar{x})^2 + \dots + n_p(x_p - \bar{x})^2}{N}}$$

Représentation graphique d'une série

Pour résumer une série statistique sous forme de schéma, on utilisera ce que l'on appelle un diagramme en boîte (ou boîte à moustaches).

Un diagramme en boîte représente graphiquement une série en faisant apparaître les principaux indicateurs de la série. On aura ainsi environ 25% des valeurs de la série entre Min et Q_1 , environ 25% entre Q_1 et Me , environ 25% entre Me et Q_3 (donc environ 50% des valeurs dans la boîte) et environ 25% des valeurs entre Q_3 et Max .



Méthode : Détermination de la médiane et des quartiles d'une série

Pour déterminer la médiane et les quartiles d'une série, on range tout d'abord les N valeurs de la série par ordre croissant (si ce n'est pas déjà fait).

Pour la médiane :

- Si N est un nombre impair, alors la médiane Me est la valeur située au rang $\frac{N+1}{2}$.
- Si N est pair, alors la médiane est la moyenne des valeurs de rangs $\frac{N}{2}$ et $\frac{N}{2} + 1$.

Pour les quartiles :

- Q_1 est la valeur de la série de rang $\frac{N}{4}$ (ou l'entier directement supérieur si $\frac{N}{4} \notin \mathbb{N}$)
- Q_3 est la valeur de la série de rang $\frac{3N}{4}$ (ou l'entier directement supérieur si $\frac{3N}{4} \notin \mathbb{N}$)

III. Croisement de deux variables qualitatives

Lorsque l'on s'intéresse à un sujet, il est fréquent de recueillir plusieurs données ou caractères. Il est parfois intéressant de ne pas regarder chaque caractère indépendamment, mais d'essayer d'établir une éventuelle corrélation entre ces deux caractères. C'est le rôle des statistiques.

III.1 Tableau croisé d'effectifs

Lorsqu'une série statistique étudie simultanément deux caractères X et Y , on dit qu'il s'agit d'une série statistique à deux variables (ou double) que l'on note $(X; Y)$.

Les valeurs prises par le caractère X sont notées $(x_1; x_2; \dots; x_n)$.

Les valeurs prises par le caractère Y sont notées $(y_1; y_2; \dots; y_m)$.

Un tableau croisé d'effectifs est un tableau dans lequel les valeurs d'un caractère sont présentées en ligne et celles de l'autre caractère sont présentées en colonne :

- On note n_{ij} l'effectif correspondant au couple $(x_i; y_j)$ et N l'effectif total.
- À l'intersection d'une ligne et d'une colonne, on indique le nombre d'individus présentant simultanément la valeur du premier caractère correspondant à la ligne et la valeur du deuxième caractère correspondant à la colonne.
- L'**effectif marginal** d'une valeur d'un caractère est le nombre d'individus de la population présentant cette valeur du caractère.

$X \backslash Y$	y_1	...	y_j	...	y_m	Total
x_1	n_{11}		n_{1j}		n_{1m}	Effectif de x_1
...						
x_i	n_{i1}		n_{ij}		n_{im}	Effectif de x_i
...						
x_k	n_{k1}		n_{ki}		n_{km}	Effectif de x_k
Total	Effectif de y_1		Effectif de y_i		Effectif de y_m	N

III.2 Tableau des fréquences par rapport à l'effectif global

Un tableau des fréquences par rapport à l'effectif global se présente de la même manière qu'un tableau croisé d'effectifs. Il permet d'étudier simultanément les fréquences de deux caractères avec l'un des caractères présenté en ligne et l'autre en colonne.

- On note f_{ij} la fréquence correspondant au couple $(x_i; y_j)$ et on a $f_{ij} = \frac{n_{ij}}{N}$.

- La **fréquence marginale** d'une valeur d'un caractère est le quotient de l'effectif marginal de cette valeur par l'effectif total de la population.

X \ Y	y_1	...	y_j	...	y_m	Total
x_1	$f_{11} = \frac{n_{11}}{N}$		$f_{1j} = \frac{n_{1j}}{N}$		$f_{1m} = \frac{n_{1m}}{N}$	Fréquence de x_1
...						
x_i	$f_{i1} = \frac{n_{i1}}{N}$		$f_{ij} = \frac{n_{ij}}{N}$		$f_{im} = \frac{n_{im}}{N}$	Fréquence de x_i
...						
x_k	$f_{k1} = \frac{n_{k1}}{N}$		$f_{kj} = \frac{n_{kj}}{N}$		$f_{km} = \frac{n_{km}}{N}$	Fréquence de x_k
Total	Fréquence de y_1		Fréquence de y_j		Fréquence de y_m	1

III.3 Tableau des fréquences conditionnelles

Si on fixe une valeur de l'un des deux caractères, on obtient une série à une variable appelée série conditionnelle. On peut donc obtenir un tableau des effectifs de cette série à une variable correspondant à une colonne du tableau croisé d'effectifs.

Une **fréquence conditionnelle** se calcule donc par rapport au caractère fixé, c'est-à-dire suivant la ligne ou la colonne du tableau croisé d'effectifs.

On repart du tableau croisé d'effectif puis on fixe x_i . On obtient donc le tableau des effectifs de la variable Y.

Y	y_1	...	y_j	...	y_m	Total
Effectifs des Y	n_{i1}		n_{ij}		n_{im}	$n = \text{effectif des Y pour } x_i$

On peut donc construire le tableau des fréquences conditionnelles du caractère Y par rapport à x_i .

Y	y_1	...	y_j	...	y_m	Total
Fréquences des Y	f_{i1}		f_{ij}		f_{im}	1

Échantillonnage et estimation

I. Échantillonnage

- Un échantillon de taille n est une sélection de n individus choisis au hasard dans une population.
- Sur plusieurs échantillons de même taille, la fréquence d'un caractère observée varie d'un échantillon à l'autre. C'est ce qu'on appelle la **fluctuation d'échantillonnage**.

II. Intervalle de fluctuation

Au sein d'une population, on connaît la proportion p d'un certain caractère.

On prélève un échantillon de taille n et on note f la fréquence du caractère dans l'échantillon.

Si $0,2 \leq p \leq 0,8$ et $n \geq 25$ alors, dans au moins 95% des cas, f appartient à l'intervalle :

$$\left[p - \frac{1}{\sqrt{n}}; p + \frac{1}{\sqrt{n}} \right]$$

Cette intervalle est appelé **intervalle de fluctuation au seuil de 95%**.

Proportion p du caractère étudié

Échantillon de taille n

Fréquence f du caractère étudié

III. Intervalle de confiance

Au sein d'une population, la proportion p d'un certain caractère est inconnue.

On prélève un échantillon de taille n et on note f la fréquence du caractère dans l'échantillon.

Si $0,2 \leq f \leq 0,8$ et $n \geq 25$ alors, dans au moins 95% des cas, p appartient à l'intervalle :

$$\left[f - \frac{1}{\sqrt{n}}; f + \frac{1}{\sqrt{n}} \right]$$

Cet intervalle est appelé **intervalle de confiance**.

Méthode : utilisation d'un intervalle de confiance pour un sondage

Avant les élections, le candidat A commande un sondage effectué sur 250 personnes. 138 personnes interrogées déclarent avoir l'intention de voter pour le candidat A.

Le candidat A peut-il espérer être élu ?

Soit p la proportion théorique d'électeurs pour le candidat A.

La fréquence observée est égale à $f = \frac{138}{250} = 0,552$.

L'intervalle de confiance de p au seuil de 0,95 est $\left[0,552 - \frac{1}{\sqrt{250}}; 0,552 + \frac{1}{\sqrt{250}} \right]$, soit de façon approchée $[0,48; 0,62]$.

On a donc $0,48 < p < 0,62$. Or, pour être sûr que le candidat A soit élu, il faudrait que $p > 0,5$. Il est donc possible que le candidat A ne soit pas élu.