

Sommaire

I. Analyse de l'information chiffrée.....	2
II. Phénomènes aléatoires.....	10
III. Phénomènes d'évolution.....	14
• Croissance linéaire.....	14
• Modélisation quadratique.....	18
• Croissance exponentielle.....	22

Analyse de l'information chiffrée

I. Statistiques à une variable

- La **population** d'une série statistique est l'ensemble des éléments appelés **individus** sur lesquels porte l'étude statistique.
- Le **caractère** d'une série statistique est la propriété étudiée sur chaque individu. Il est dit :
 - **qualitatif** lorsqu'il ne prend pas que des valeurs numériques.
 - **quantitatif discret** lorsqu'il ne peut prendre qu'un nombre fini de valeurs numériques.
 - **quantitatif continu** lorsqu'il peut prendre une infinité de valeurs numériques.

- L'**effectif total** est le nombre d'éléments au sein de la population étudiée. On le note N .
- L'**effectif** d'une valeur du caractère est le nombre d'individus de la population prenant cette valeur (nombre de fois où cette valeur apparaît dans la série.). On le note n_i .
- La **fréquence** d'une valeur du caractère est le quotient de l'effectif de cette valeur par l'effectif total. On la note f_i et on a $f_i = \frac{n_i}{N}$ (on multiplie par 100 si on veut un résultat en pourcentage).
- Le **mode** (ou **classe modale**) de la série est la valeur (ou la classe) du caractère ayant le plus grand effectif.

Remarques

- Une fréquence est toujours un nombre compris entre 0 et 1 (entre 0 et 100% si on donne les fréquences en pourcentage).
- Une série statistique apparaîtra ainsi généralement sous la forme d'un tableau donnant les effectifs pour chacune des valeurs possibles du caractère, celles-ci étant classées par ordre croissant.

Variable x_i	x_1	x_2	...	x_p
Effectif n_i	n_1	n_2	...	n_p

Effectif total : $N = n_1 + n_2 + \dots + n_p$.

La somme de toutes les fréquences est toujours égale à 1.

II. Tableau croisé d'effectifs

Lorsque l'on s'intéresse à un sujet, il est fréquent de recueillir plusieurs données ou caractères. Il est parfois intéressant de ne pas regarder chaque caractère indépendamment, mais d'essayer d'établir une éventuelle corrélation entre ces deux caractères. C'est le rôle des statistiques.

Lorsqu'une série statistique étudie simultanément deux caractères X et Y , on dit qu'il s'agit d'une série statistique à deux variables (ou double) que l'on note $(X; Y)$.
 Les valeurs prises par le caractère X sont notées $(x_1; x_2; \dots; x_n)$.
 Les valeurs prises par le caractère Y sont notées $(y_1; y_2; \dots; y_n)$.

Un tableau croisé d'effectifs est un tableau dans lequel les valeurs d'un caractère sont présentées en ligne et celles de l'autre caractère sont présentées en colonne :

- On note n_{ij} l'effectif correspondant au couple $(x_i; y_j)$ et N l'effectif total.
- À l'intersection d'une ligne et d'une colonne, on indique le nombre d'individus présentant simultanément la valeur du premier caractère correspondant à la ligne et la valeur du deuxième caractère correspondant à la colonne.
- L'**effectif marginal** d'une valeur d'un caractère est le nombre d'individus de la population présentant cette valeur du caractère.

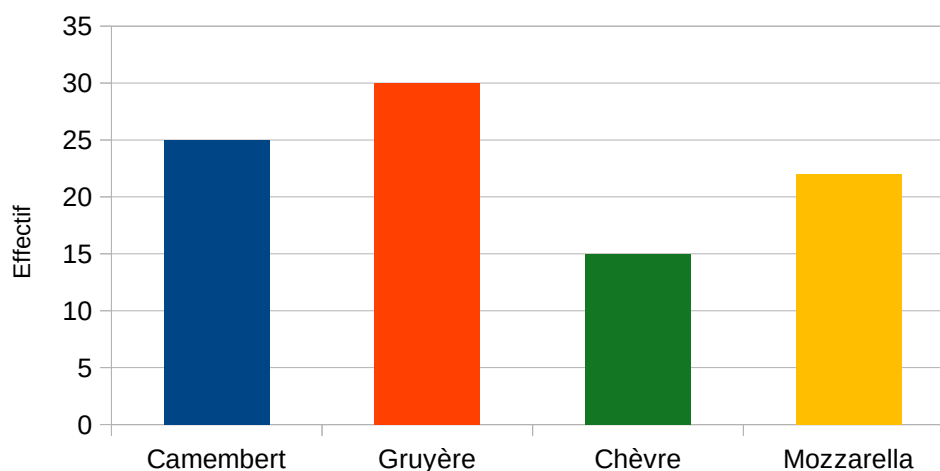
X \ Y	y_1	...	y_j	...	y_m	Total
x_1	n_{11}		n_{1j}		n_{1m}	Effectif de x_1
...						
x_i	n_{i1}		n_{ij}		n_{im}	Effectif de x_i
...						
x_k	n_{k1}		n_{ki}		n_{km}	Effectif de x_k
Total	Effectif de y_1		Effectif de y_i		Effectif de y_m	N

III. Représentations graphiques des données statistiques

III.1 Diagramme en barres

Un **diagramme en barres** (ou **en bâtons**) est un graphique représentant les effectifs ou les fréquences des différentes valeurs prises par un ou plusieurs caractères. Les valeurs du (ou des) caractère(s) sont placées en abscisses et les hauteurs des barres (ou des bâtons) sont proportionnelles aux effectifs et aux fréquences qui leur correspondent.

Diagramme en barres

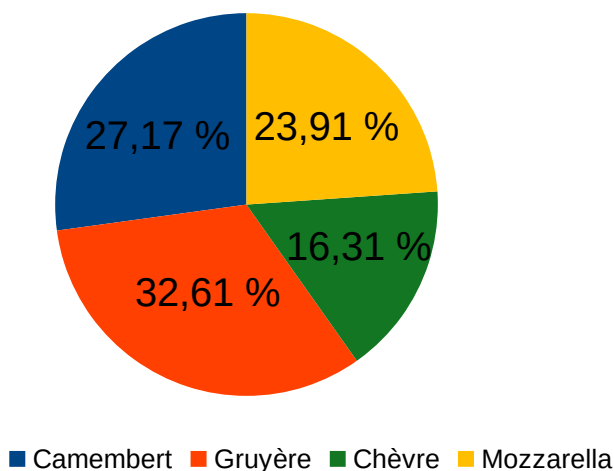


III.2 Diagrammes circulaires

Un **diagramme circulaire** est un disque partagé en secteurs angulaires représentant chacun une valeur du caractère étudié. Les mesures des secteurs angulaires sont proportionnelles aux effectifs des différentes valeurs. La somme totale des mesures des secteurs angulaires est donc égale à 360° .

Un **diagramme semi-circulaire** représente les données de la même façon mais sur un demi-disque. La somme totale des mesures des secteurs angulaires est donc égale à 180° .

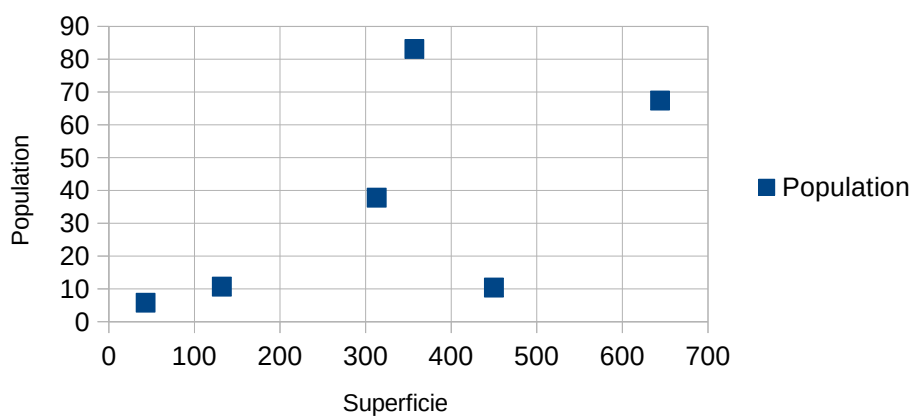
Diagramme circulaire



III.3 Nuage de points

Étant donnés deux caractères d'une série statistique, le **nuage de points** associé est, dans un repère, l'ensemble des points ayant pour abscisses les valeurs du premier caractère et pour ordonnées les valeurs du second.

Nuage de points



IV. Fréquences marginale et conditionnelle

IV.1 Tableau des fréquences par rapport à l'effectif global

Un tableau des fréquences par rapport à l'effectif global se présente de la même manière qu'un tableau croisé d'effectifs. Il permet d'étudier simultanément les fréquences de deux caractères avec l'un des caractères présenté en ligne et l'autre en colonne.

- On note f_{ij} la fréquence correspondant au couple $(x_i; y_j)$ et on a $f_{ij} = \frac{n_{ij}}{N}$.
- La **fréquence marginale** d'une valeur d'un caractère est le quotient de l'effectif marginal de cette valeur par l'effectif total de la population.

X \ Y	y_1	...	y_j	...	y_m	Total
x_1	$f_{11} = \frac{n_{11}}{N}$		$f_{1j} = \frac{n_{1j}}{N}$		$f_{1m} = \frac{n_{1m}}{N}$	Fréquence de x_1
...						
x_i	$f_{i1} = \frac{n_{i1}}{N}$		$f_{ij} = \frac{n_{ij}}{N}$		$f_{im} = \frac{n_{im}}{N}$	Fréquence de x_i
...						
x_k	$f_{k1} = \frac{n_{k1}}{N}$		$f_{kj} = \frac{n_{kj}}{N}$		$f_{km} = \frac{n_{km}}{N}$	Fréquence de x_k
Total	Fréquence de y_1		Fréquence de y_j		Fréquence de y_m	1

IV.2 Tableau des fréquences conditionnelles

Si on fixe une valeur de l'un des deux caractères, on obtient une série à une variable appelée série conditionnelle. On peut donc obtenir un tableau des effectifs de cette série à une variable correspondant à une colonne du tableau croisé d'effectifs.

Une **fréquence conditionnelle** se calcule donc par rapport au caractère fixé, c'est-à-dire suivant la ligne ou la colonne du tableau croisé d'effectifs.

On repart du tableau croisé d'effectif puis on fixe x_i . On obtient donc le tableau des effectifs de la variable Y.

Y	y_1	...	y_j	...	y_m	Total
Effectifs des Y	n_{i1}		n_{ij}		n_{im}	$n = \text{effectif des Y pour } x_i$

On peut donc construire le tableau des fréquences conditionnelles du caractère Y par rapport à x_i .

Y	y_1	...	y_j	...	y_m	Total
Fréquences des Y	f_{i1}		f_{ij}		f_{im}	1

V. Point moyen et forme d'un nuage de points

V.1 Point moyen

Dans cette partie, on représentera une série statistique à deux variables à l'aide d'un tableau de la forme :

Variable x_i	x_1	x_2	...	x_n
Variable y_i	y_1	y_2	...	y_n

L'ensemble des points $M_i(x_i; y_i)$, pour i allant de 1 à n , est appelé le nuage de points de cette série statistique dans un repère orthogonal.

Soit $\bar{x}$ la moyenne des valeurs prises par le 1er caractère et $\bar{y}$ celle des valeurs prises par le 2e caractère. On appelle **point moyen du nuage de points** de la série statistique le point **G** de coordonnées $(\bar{x}; \bar{y})$ tel que $\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$ et $\bar{y} = \frac{y_1 + y_2 + \dots + y_n}{n}$.

V.2 Forme d'un nuage de points

La forme d'un nuage de points peut indiquer ou non une liaison entre les deux variables X et Y . L'allure du nuage de points représentant la série statistique permet d'avoir une idée de la réponse. En effet, la disposition des points peut parfois suggérer la courbe d'une fonction. Cela signifie alors que le lien approximatif entre X et Y est de la forme $y = f(x)$.

Parmi les tendances les plus communes, on trouvera :

- les points du nuage sont dispersés, ils n'indiquent pas de tendance particulière ;
- les points du nuage sont sensiblement alignés, alors il existe une **liaison affine** entre les deux variables X et Y ;
- les points du nuage sont sensiblement sur une courbe exponentielle, alors il existe une **liaison exponentielle** entre les variables X et Y .

VI. Ajustement affine, estimations et prévisions

Lorsqu'un nuage de points $M_i(x_i; y_i)$ met en évidence une liaison affine entre les deux variables étudiées, on peut la représenter par une droite d'équation $y = ax + b$. Cette droite est appelée **droite d'ajustement de y en x** de la série statistique ou **droite de régression linéaire de y en x** . Cependant, si la forme d'un nuage de points $M_i(x_i; y_i)$ suggère un ajustement affine, on peut trouver un grand nombre de droites ajustant ce nuage.

VI.1 Ajustement affine graphique

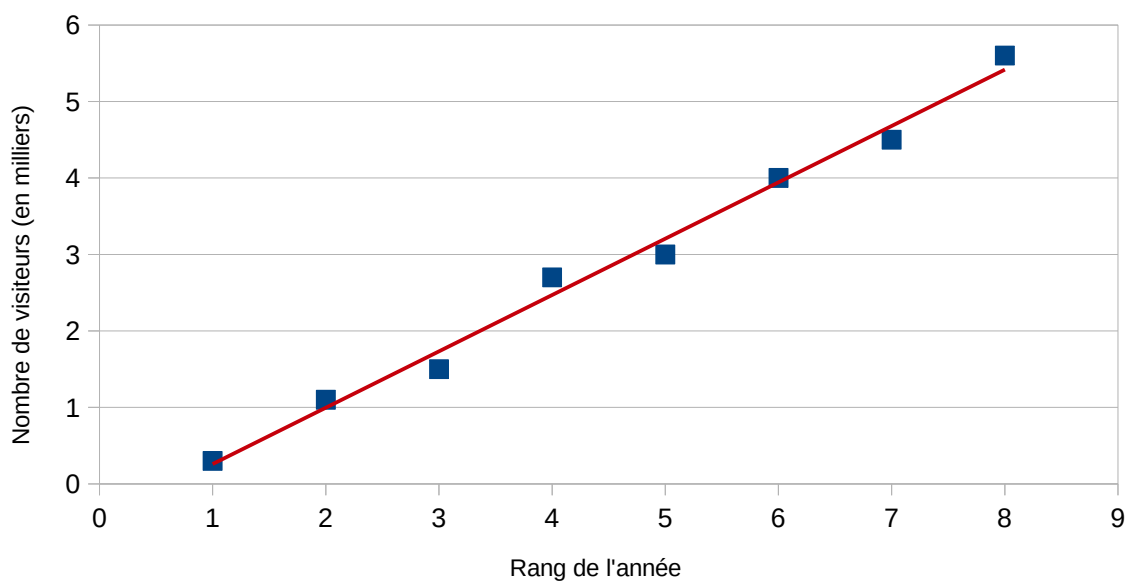
Dans le plan rapporté à un repère, on trace une droite passant au plus près de tous les points du nuage en suivant les indications fournies par l'énoncé.

Exemple

On a relevé, pour un site internet, le nombre de visiteurs (en milliers) par an pendant les huit premières années de fonctionnement :

Année	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018
Rang x_i	1	2	3	4	5	6	7	8
Nombre de visiteurs y_i (en milliers)	0,3	1,1	1,5	2,7	3	4	4,5	5,6

Dans cet exemple, les points du nuage sont sensiblement alignés. Traçons une droite d'ajustement :

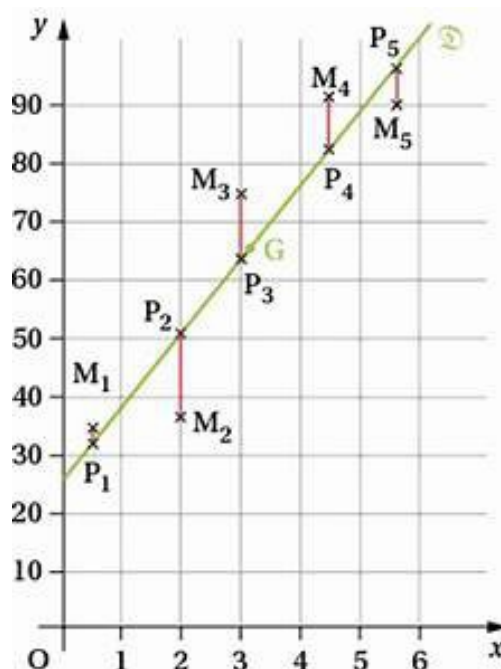


Remarque

Par cette méthode, on effectue un tracé « au jugé ». Nous n'obtiendrons donc pas à chaque fois exactement la même droite.

VI.2 Ajustement affine par la méthode des moindres carrés

Cette méthode consiste à déterminer une droite d'ajustement D , d'équation $y = ax + b$, telle que la somme des carrés des écarts entre les points de même abscisse $M_i(x_i; y_i)$ du nuage de points et $P_i(x_i; y'_i)$ de la droite soient minimale.



Remarque

Pour obtenir l'équation de la droite d'ajustement affine, on utilisera la calculatrice ou un tableur. Dans l'exemple précédent, on obtiendrait la droite d'équation $y = 0,74x - 0,48$ (en arrondissant à 10^{-2} près).

La droite d'ajustement affine de y en x par la méthode des moindres carrés **passse par le point moyen** du nuage de points de la série statistique.

VI.3 Estimations et prévisions

En supposant que la tendance observée se maintienne, la droite d'ajustement permet de faire des estimations. Ces estimations s'effectuent soit par lecture graphique (à partir du tracé de la droite d'ajustement), soit par le calcul (en utilisant l'équation de la droite d'ajustement).

Lorsque la variable x est une mesure du temps, la série est appelée série chronologique. Il s'agit alors de se projeter dans le futur et de faire des prévisions.

Exemple

Reprenons l'exemple précédent.

Supposons que les statistiques de l'année numéro 5 aient été perdues. Nous pouvons estimer alors la fréquentation du site grâce à l'ajustement affine que nous avons fait.

On a $y = 0,74x - 0,48$ avec $x = 5$. On obtient alors $y = 5 \times 0,74 - 0,48 = 3,22$. Nous estimons le nombre de visiteurs à 3 220 la cinquième année. La valeur cherchée était à l'intérieur du nuage de points, on dit qu'on a fait une **interpolation**. Il s'agit ici d'une **estimation**.

Toujours dans cet exemple, nous voulons estimer la fréquentation du site au bout de 20 ans de fonctionnement, en considérant que l'évolution reste la même.

On a $y = 0,74x - 0,48$ avec $x = 20$. On obtient alors $y = 20 \times 0,74 - 0,48 = 14,32$. Nous estimons le nombre de visiteurs à 14 320 la vingtième année. La valeur cherchée était au-delà du nuage de points, on dit qu'on a fait une **extrapolation**. Il s'agit ici d'une **prévision**.

Phénomènes aléatoires

I. Généralités

- Une **expérience aléatoire** est une expérience dont le résultat dépend du hasard. Chacun des résultats possibles s'appelle **éventualité** ou **issue**. L'ensemble Ω (ou E) de tous les résultats possibles d'une expérience aléatoire s'appelle l'**univers** de l'expérience.
- Un **événement** A est une partie de l'univers Ω (un événement peut donc être constitué de zéro, une ou plusieurs issues de Ω).
- Un **événement élémentaire** est une partie de Ω qui ne contient qu'une seule issue.
- L'**événement contraire** de A , noté $\bar{A}$, est la partie constituée de toutes les issues de Ω qui ne sont pas dans A .

- $P(\emptyset)=0$ et $P(\Omega)=1$.
- La probabilité d'un événement A , notée $P(A)$, est la **somme des probabilités des événements élémentaires inclus dans A** .
- Pour tout événement A , on a $0 \leq P(A) \leq 1$.
- La somme des probabilités des événements élémentaires vaut 1.
- La probabilité de l'événement contraire d'un événement A est : $P(\bar{A})=1-P(A)$.

Lorsque tous les événements élémentaires d'une expérience aléatoire ont la même probabilité, on dit alors qu'ils sont **équiprobables**. On parle d'**expérience équiprobable** ou de **loi équirépartie**.

- L'événement « **A et B** », noté $A \cap B$, s'appelle l'**intersection** des événements A et B . Il est réalisé lorsque **les deux événements sont réalisés simultanément**.
- L'événement « **A ou B** », noté $A \cup B$, s'appelle la **réunion** des événements A et B . Il est réalisé lorsqu'**au moins l'un des deux événements est réalisé**.
- Deux événements A et B sont dits **incompatibles** si $A \cap B = \emptyset$.

Soit A un événement d'un univers Ω . Pour une loi équirépartie, on a :

$$P(A) = \frac{\text{nombre d'éléments de } A}{\text{nombre d'éléments de } \Omega} = \frac{\text{nombre de cas favorables à } A}{\text{nombre de cas possibles}}$$

Soit A et B deux événements d'un univers Ω .

- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.
- Si A et B sont **incompatibles**, $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

II. Probabilités conditionnelles

Soit A et B deux événements d'un univers Ω avec $P(A) \neq 0$.

La **probabilité conditionnelle** que l'événement B se réalise sachant que l'événement A est

réalisé est notée $P_A(B)$, et elle est définie par : $P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$.

La probabilité $P_A(B)$ vérifie bien $0 \leq P_A(B) \leq 1$ et $P_A(B) + P_A(\bar{B}) = 1$.

Soit A et B deux événements d'un univers Ω avec $P(A) \neq 0$ et $P(B) \neq 0$. Alors :

$$P(A) \times P_A(B) = P(B) \times P_B(A)$$

Utilisation de tableaux

Les tableaux à double entrées permettent une présentation claire de certaines expériences aléatoires et facilitent le calcul des probabilités conditionnelles.

	B	$\bar{B}$	Total
A	$P(A \cap B)$	$P(A \cap \bar{B})$	$P(A)$
$\bar{A}$	$P(\bar{A} \cap B)$	$P(\bar{A} \cap \bar{B})$	$P(\bar{A})$
Total	$P(B)$	$P(\bar{B})$	1

- $P(A \cap B)$ se lit à l'intersection de la ligne A et de la colonne B .
- $P(A)$ (respectivement $P(B)$) se lit sur la dernière colonne (respectivement la dernière ligne).
- $P_A(B)$ (ou $P_B(A)$) s'obtient en calculant le quotient des deux probabilités adéquates :

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \quad \text{et} \quad P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Exemple

Un club sportif rassemble 180 membres répartis en juniors et seniors. On compte 135 seniors dont 81 hommes. Il y a 27 garçons parmi les seniors.

En choisissant une femme au hasard, calculer la probabilité d'avoir une junior.

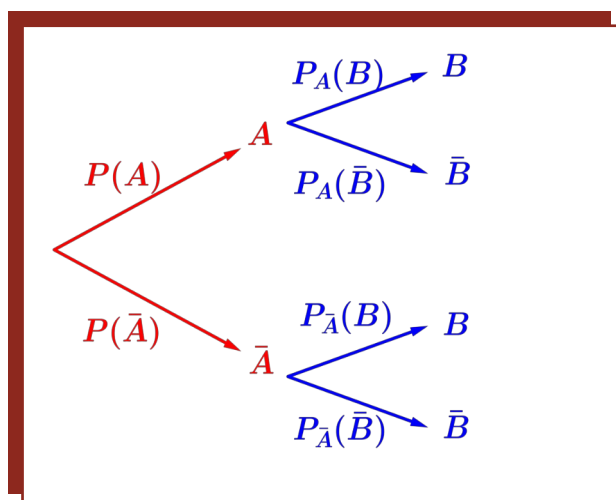
	J	S	Total
H	$\frac{27}{180} = 0,15$	$\frac{81}{180} = 0,45$	$0,15 + 0,45 = 0,6$
F	0,1	0,3	0,4
Total	0,25	$\frac{135}{180} = 0,75$	1

Ainsi $P_F(J) = \frac{P(F \cap J)}{P(F)} = \frac{0,1}{0,4} = 0,25$.

III. Arbre pondéré et calculs de probabilité

- La probabilité de l'événement correspondant à un chemin est obtenue en multipliant les probabilités portées par ses branches.
- La somme des probabilités sur les branches partant d'un même nœud est égale à 1.
- La probabilité de l'événement correspondant à plusieurs chemins est obtenue en additionnant les probabilités de chacun de ces chemins (**formule des probabilités totales**).

Le cas le plus fréquent correspond à la partition la plus simple (A et $\bar{A}$). Si on connaît les probabilités de B et $\bar{B}$ par l'intermédiaire de A et $\bar{A}$, on a l'arbre suivant :



- Le produit des probabilités inscrites sur chaque branche d'un chemin donne la probabilité de l'intersection des événements placés sur ce chemin.

$$P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$$

- La somme des probabilités inscrites sur les branches issues d'un même nœud est égale à 1 (loi des nœuds).

$$P_A(B) + P_A(\bar{B}) = 1$$

- La probabilité d'un événement E est la somme des probabilités des chemins qui aboutissent à E .

$$\begin{aligned} P(B) &= P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B) \\ &= P(A) \times P_A(B) + P(\bar{A}) \times P_{\bar{A}}(B) \end{aligned}$$

Exemple

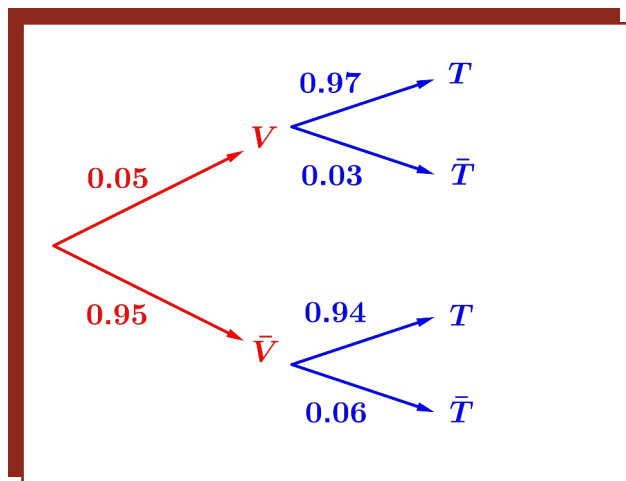
Dans un pays, il y a 5% de la population contaminée par le coronavirus. On dispose d'un test de dépistage de ce virus qui a les propriétés suivantes

- La probabilité qu'une personne contaminée ait un test positif est de 0,97 (sensibilité du test).
- La probabilité qu'une personne non contaminée ait un test négatif est de 0,94 (spécificité du test). On fait passer un test à une personne choisie au hasard dans cette population.

On note les événements suivants :

V : « la personne est contaminée par le virus »

T : « le test est positif »



- La probabilité que le test soit positif est :

$$\begin{aligned} P(T) &= P(V \cap T) + P(\bar{V} \cap T) \\ &= 0,05 \times 0,97 + 0,95 \times 0,94 \\ &= 0,9415 \end{aligned}$$

- La probabilité que la personne soit contaminée sachant que le test est positif est :

$$\begin{aligned} P_T(V) &= \frac{P(V \cap T)}{P(T)} \\ &= \frac{0,05 \times 0,97}{0,9415} \\ &= 0,051514 \end{aligned}$$

IV. Indépendance

- Soit A et B deux événements d'un univers Ω .
On dit que A et B sont **indépendants** lorsque $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.
- Soit A et B deux événements d'un univers Ω tels que $P(A) \neq 0$.
Les événements A et B sont **indépendants** si et seulement si $P_A(B) = P(B)$.

En réalisant successivement deux expériences aléatoires telles que les événements associés à la première soit indépendants des événements associés à la seconde, on dit que l'on réalise une **succession de deux épreuves indépendantes**.

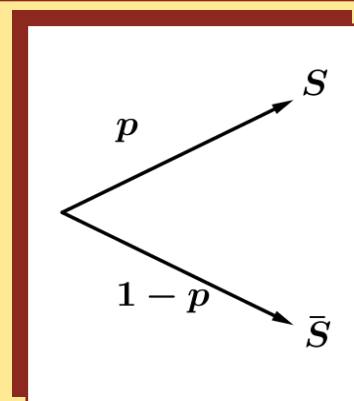
- Deux expériences sont dites **indépendantes** si le résultat de l'une n'influe pas sur le résultat de l'autre.
- Deux expériences sont dites **identiques** si elles ont les mêmes issues et les mêmes probabilités pour chaque issue.

Dans une succession d'épreuves indépendantes, la probabilité d'une issue est le **produit des probabilités rencontrées sur le chemin** qui conduit à cette issue.

V. Épreuve, loi et schéma de Bernoulli

Une **épreuve de Bernoulli** de paramètre p (compris entre 0 et 1) est une expérience aléatoire comportant deux issues :

- l'une appelée **succès**, noté S , de probabilité p .
- l'autre appelée **échec**, noté $\bar{S}$ ou E , de probabilité $q = 1 - p$.



Soit n un entier naturel et p un réel compris entre 0 et 1.

Un **schéma de Bernoulli** de paramètres n et p est une expérience aléatoire consistant à répéter n fois, de façon **identique et indépendante**, une épreuve de Bernoulli de paramètre p .

Croissance linéaire

I. Suites numériques

I.1 Généralités sur les suites

Une suite numérique est une **succession infinie de réels**. Une suite numérique est donc une fonction définie sur l'ensemble des **entiers naturels** $\mathbb{N}$.

Une suite numérique (u_n) définie à partir du rang p est une fonction qui à chaque entier $n \geq p$ associe un réel, noté u_n . Cette suite est aussi notée $(u_n)_{n \geq p}$ ou simplement u .

u_n est appelé le **terme général** de la suite ou le **terme d'indice n** , ou encore **terme de rang n** .
 u_p est le **terme initial** ou le **premier terme** de la suite.

Attention !

- u_{n+1} est le terme d'indice $n+1$. C'est le terme qui suit le terme d'indice n , c'est-à-dire u_n . On ne doit pas le confondre avec $u_n + 1$ qui est la somme de u_n , le terme d'indice n , et de 1.
- u_{n-1} est le terme d'indice $n-1$. Il précède le terme u_n .

Une suite numérique (u_n) peut être représentée par un **nuage de points** de coordonnées $(n; u_n)$.

I.2 Mode de génération d'une suite numérique

Première façon : suite définie par une formule explicite

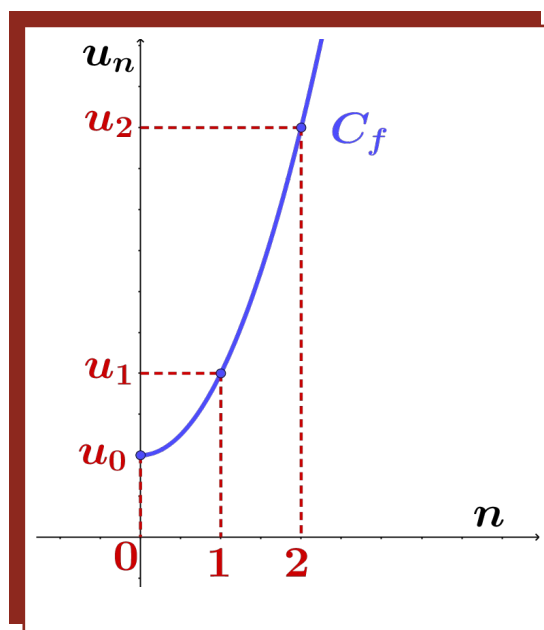
On définit la suite (u_n) par une expression du type $u_n = f(n)$, où f est une fonction numérique.

Remarques

- Une suite (u_n) est définie de **façon explicite** quand le terme u_n est exprimé en fonction de n .
- Avec cette définition, on peut donc calculer n'importe quel terme de la suite à partir de son indice.

Représentation graphique

Graphiquement, les termes de la suite (u_n) sont les ordonnées des points $A_n(n; u_n)$ d'abscisses entières de la courbe C_f .



Deuxième façon : suite définie par une formule de récurrence

On donne la valeur du premier terme de la suite et un procédé appelé **relation de récurrence** qui permet de calculer un terme à partir du précédent. On définit alors la suite (u_n) par une expression du type $u_{n+1} = f(u_n)$, où f est une fonction numérique.

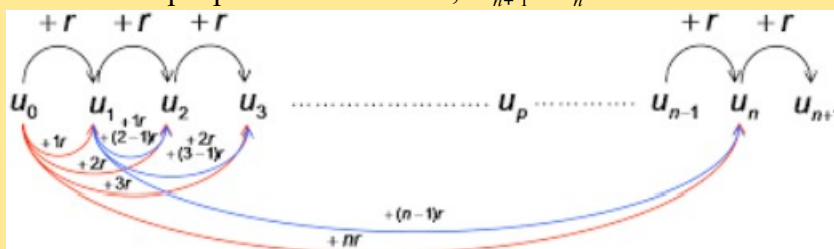
I.3 Sens de variations

- Une suite (u_n) est **croissante** à partir du rang p si pour tout $n \geq p$, $u_{n+1} \geq u_n$. Cela signifie que le terme d'après est plus grand que le précédent.
- Une suite (u_n) est **décroissante** à partir du rang p si pour tout $n \geq p$, $u_{n+1} \leq u_n$. Cela signifie que le terme d'après est plus petit que le précédent.
- Une suite (u_n) est **constante** lorsque pour tout n , $u_{n+1} = u_n$.

II. Suites arithmétiques

On dit qu'une suite (u_n) est **arithmétique** si, à partir de son premier terme, **chaque terme est obtenu en ajoutant au précédent un même nombre**.

Ainsi, il existe un réel r tel que pour tout entier n , $u_{n+1} = u_n + r$.



Le nombre r est appelé **raison** de la suite arithmétique (u_n) . Il est égal à la différence entre deux termes consécutifs quelconques : pour tout entier n , $r = u_{n+1} - u_n$.

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r .

Pour tous entiers n et p tels que $n \geq p$, on a $u_n = u_p + (n - p)r$.

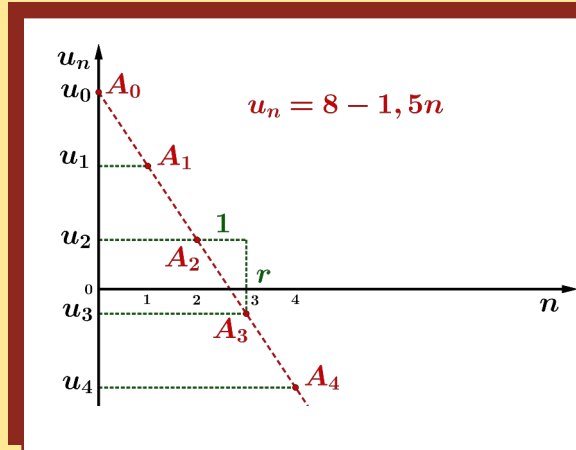
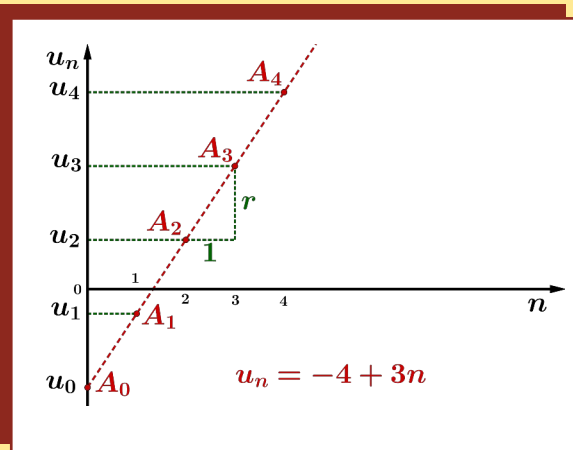
En particulier, pour tout entier n , $u_n = u_0 + nr$.

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_p .

- Si $r > 0$, alors la suite (u_n) est (strictement) **croissante**.
- Si $r < 0$, alors la suite (u_n) est (strictement) **décroissante**.
- Si $r = 0$, alors la suite (u_n) est **constante**, égale à u_p .

La représentation graphique d'une suite arithmétique (u_n) est un **ensemble de points isolés alignés de coordonnées $(n; u_n)$** .

Ces points sont situés sur une **droite** d'équation $y = rx + u_0$ (le coefficient directeur de la droite est la raison r).



III. Fonctions affines

Une **fonction affine** est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax + b$, où a et b sont deux nombres réels.

La représentation graphique d'une fonction affine f est une droite. Le réel a s'appelle **coefficient directeur** de la droite et b **l'ordonnée à l'origine**.

Remarques

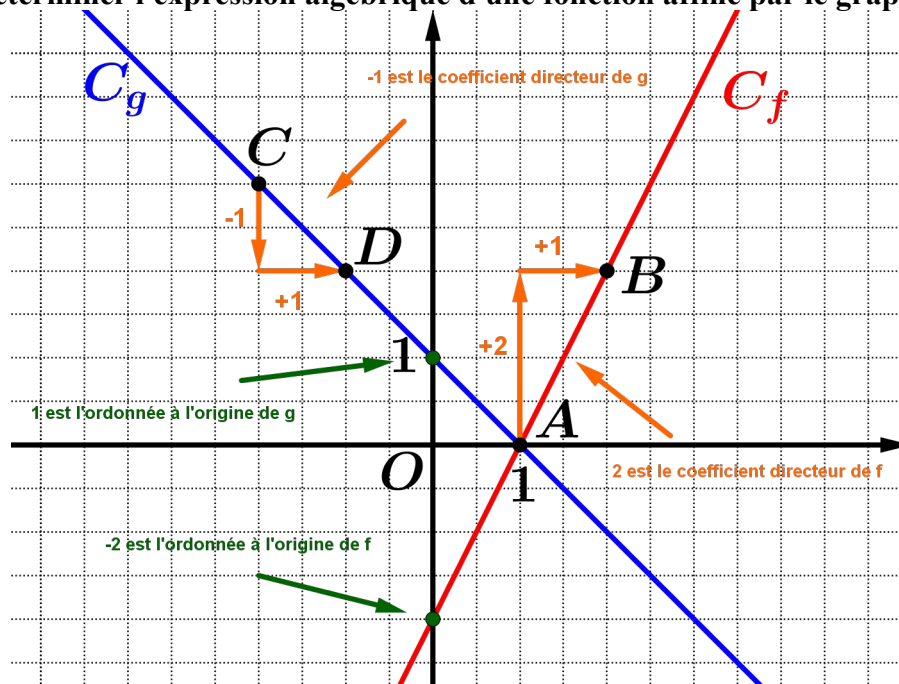
- Lorsque $b=0$, la fonction f définie par $f(x) = ax$ est une fonction linéaire. La droite passe alors par l'origine du repère.
- Lorsque $a=0$, la fonction f définie par $f(x) = b$ est une fonction constante. La droite est alors parallèle à l'axe des abscisses.

Soit f une fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax + b$.

- Si $a > 0$, alors la fonction f est **strictement croissante** sur $\mathbb{R}$. La droite représentative de f est tournée "vers le haut".
- Si $a < 0$, alors la fonction f est **strictement décroissante** sur $\mathbb{R}$. La droite représentative de f est tournée "vers le bas".
- Si $a = 0$, alors la fonction f est **constante** sur $\mathbb{R}$. La droite représentative de f est parallèle à l'axe des abscisses.

Soit f une fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax + b$. On a alors, quels que soient les nombres réels x_1 et x_2 distincts l'un de l'autre : $a = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$.

Méthode : déterminer l'expression algébrique d'une fonction affine par le graphique



Pour la droite représentative de f :

- Le coefficient directeur est 2.
- L'ordonnée à l'origine est -2 .

Ainsi l'expression algébrique de f est $f(x) = 2x - 2$.

Pour la droite représentative de g :

- Le coefficient directeur est -1 .
- L'ordonnée à l'origine est 1.

Ainsi l'expression algébrique de g est $g(x) = -x + 1$.

IV. Phénomène discret ou continu de croissance linéaire

Définition 13

- Une suite caractérise un **phénomène discret** car la variable n est un entier naturel qui prend donc des valeurs isolées.
- Une fonction dont la variable (généralement x ou t) prend ses valeurs dans un intervalle de $\mathbb{R}$ qui caractérise un **phénomène continu**.

Définition 14

La **croissance d'un phénomène est linéaire** lorsque le taux d'accroissement de la suite ou de la fonction qui la caractérise est constant.

- Si le phénomène est discret, une croissance linéaire peut être modélisée par une suite arithmétique.
- Si le phénomène est continu, une croissance linéaire peut être modélisée par une fonction affine.

Modélisation quadratique

I. Fonctions polynômes du second degré

I.1 Définitions

On appelle **fonction polynôme du second degré** (ou **trinôme**) toute fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$ où a , b et c sont des nombres réels et $a \neq 0$. Cette expression est appelée **forme développée** de f .

Soit f la fonction polynôme du second degré définie par $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$. On dit que la courbe représentative de cette fonction est une **parabole**.

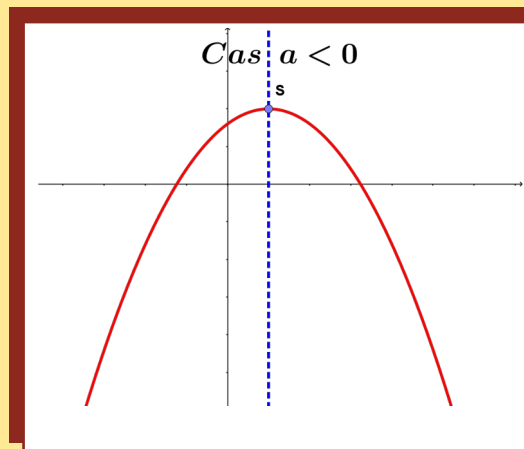
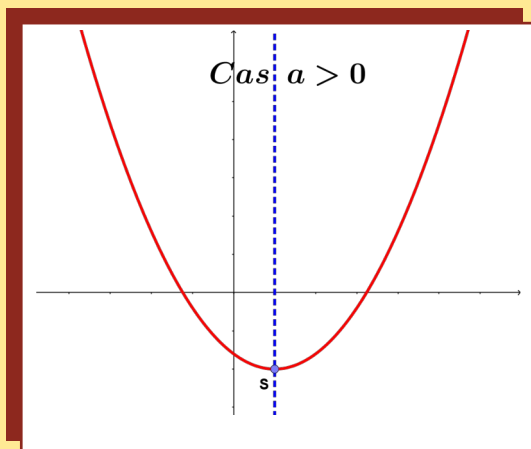
Une parabole a une forme de « U » (« tournée vers le haut ») lorsque a est positif.

A l'inverse, si a est négatif, la parabole a une forme de « pont » (« tournée vers le bas »).

Dans les deux cas, la parabole possède comme **axe de symétrie** la droite d'équation $x = -\frac{b}{2a}$.

On appelle généralement **S le sommet** d'une parabole.

S a pour coordonnées $(\alpha; \beta)$ où $\alpha = -\frac{b}{2a}$ et $\beta = f(\alpha)$.



Méthode : Démontrer qu'une fonction polynôme de degré 2 admet un extremum

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2 - 12x + 23$.

a. Démontrer que pour tout x réel, $f(x) = 2(x-3)^2 + 5$.

b. En déduire que f admet un minimum dont on précisera la valeur.

a. En développant la 2^e expression, on obtient :

$$(2(x-3))^2 + 5 = 2(x^2 - 6x + 9) + 5 = 2x^2 - 12x + 18 + 5 = 2x^2 - 12x + 23 = f(x).$$

b. On regarde le signe de a : $a = 2 > 0$.

La parabole est « tournée vers le haut », donc f admet un minimum.

Or la deuxième expression correspond à la forme canonique, d'où on peut lire la valeur du minimum qui est 5, atteint pour $x = 3$.

I.2 Sens de variations

Soit f une fonction polynomiale du second degré définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$.

• Si $a > 0$, f est strictement décroissante sur $]-\infty; \alpha]$ et strictement croissante sur $[\alpha; +\infty[$. Elle admet comme minimum β en $x = \alpha$.

• Si $a < 0$, f est strictement croissante sur $]-\infty; \alpha]$ et strictement décroissante sur $[\alpha; +\infty[$. Elle admet comme maximum β en $x = \alpha$.

Cas $a > 0$

x	$-\infty$	$\alpha = \frac{-b}{2a}$	$+\infty$
f(x)			

Cas $a < 0$

x	$-\infty$	$\alpha = \frac{-b}{2a}$	$+\infty$
f(x)			

La courbe représentative de f dans un repère orthonormé admet pour axe de symétrie la droite d'équation $x = \alpha$ et pour sommet le point de coordonnées $(\alpha; \beta)$.

Méthode : Établir les variations d'une fonction du second degré

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^2 + 4x$.

a. Calculer les coordonnées du sommet de la parabole représentant la fonction f .

b. La fonction f admet-elle un maximum ou un minimum. Justifier.

c. Construire le tableau de variations de f , puis tracer sa courbe représentative dans un repère.

a. On calcule les coordonnées du sommet S :

On a $\alpha = -\frac{b}{2a} = -\frac{4}{2 \times (-1)} = -\frac{4}{-2} = 2$ et $\beta = f(\alpha) = f(2) = -2^2 + 4 \times 2 = -4 + 8 = 4$.

Donc $S(2; 4)$.

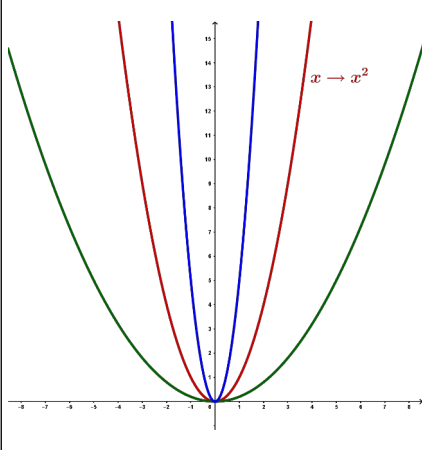
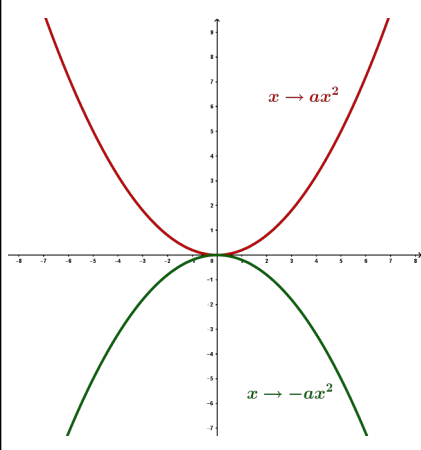
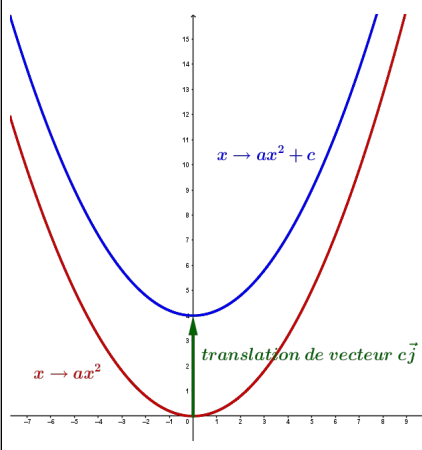
b. On regarde le signe de a : $a = -1 < 0$.

La parabole est « tournée vers le bas », donc f admet un maximum. Ce maximum est 4.

c. Tableau de variations :

x	$-\infty$	2	$+\infty$
f(x)			

I.3 Fonctions particulières $x \rightarrow ax^2$ et $x \rightarrow ax^2 + c$

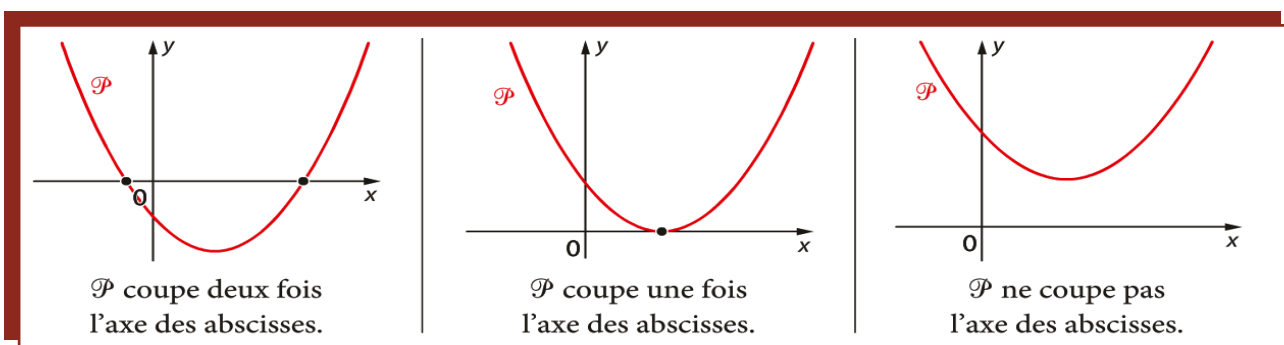
Influence du coefficient a ($a > 0$)	Passage de $a > 0$ à $a < 0$	Influence du coefficient c
		
L'axe de symétrie des différentes courbes est la droite d'équation $x = 0$ Cas : $a > 1$ Plus a est grand et plus la courbe « se contracte » Cas : $0 < a < 1$ Plus a est proche de zéro et plus la courbe « s'écarte »	La courbe représentative de la fonction $x \rightarrow -ax^2$ est symétrique à celle de la fonction $x \rightarrow ax^2$ par rapport à l'axe des abscisses	La courbe représentative de la fonction $x \rightarrow ax^2 + c$ s'obtient en effectuant une translation de vecteur $c \vec{j}$ à partir de la courbe représentative de la fonction $x \rightarrow ax^2$

II. Équation du second degré

II.1 Approche graphique

Résoudre l'équation $ax^2 + bx + c = 0$, où $a \neq 0$, c'est trouver, s'il en existe, tous les nombres x qui vérifient cette égalité. De tels nombres sont appelés **solutions de l'équation** ou **racines** du trinôme. Pour trouver le nombre de solutions de cette équation, on peut s'aider de la représentation graphique de la fonction f définie par $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Dans les trois exemples ci-dessous, on peut conjecturer que l'équation admet respectivement deux solutions, une solution et aucune solution.



II.2 Vocabulaire

Une **équation du second degré**, d'inconnue x , est une équation qui peut s'écrire sous la forme $ax^2 + bx + c = 0$ où a , b et c sont des nombres réels, avec $a \neq 0$.

Une solution de cette équation est appelée **racine** du trinôme $ax^2 + bx + c$.

III. Fonctions polynômes du second degré admettant deux racines

III.1 Forme factorisée

Soit f une fonction du second degré de la forme $f(x) = ax^2 + bx + c$, avec $a \neq 0$. On a la factorisation suivante :

- Si f admet **deux racines** x_1 et x_2 , alors on a pour tout réel x , $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$.
- Si f admet **une racine double** x_0 , alors on a pour tout réel x , $f(x) = a(x - x_0)^2$.

Remarque

Si $x_1 = x_2$, alors on dit que f admet une racine double que l'on note x_0 .

La représentation graphique des fonctions de la forme $x \rightarrow a(x - x_1)(x - x_2)$ est une parabole d'axe de symétrie la droite d'équation $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$.

L'abscisse du sommet de la parabole est alors $\alpha = \frac{x_1 + x_2}{2}$.

III.2 Signe d'une fonction polynôme du second degré

Soit la fonction polynomiale $f(x) = ax^2 + bx + c$, avec $a \neq 0$.

- Si f admet deux racines x_1 et x_2 , alors $f(x)$ s'annule pour $x = x_1$ et $x = x_2$ (on suppose que $x_1 < x_2$) et alors :

- le signe de $f(x)$ est **du signe de a** pour x extérieur à l'intervalle des racines ;
- le signe de $f(x)$ est **du signe contraire de celui de a** si x est compris entre les racines.

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$	
$f(x)$	signe de a	0	signe de $-a$	0	signe de a

- Si f admet une racine double, alors $f(x)$ s'annule pour $x = x_0$: **son signe est celui de a** pour tous les réels $x \neq x_0$.

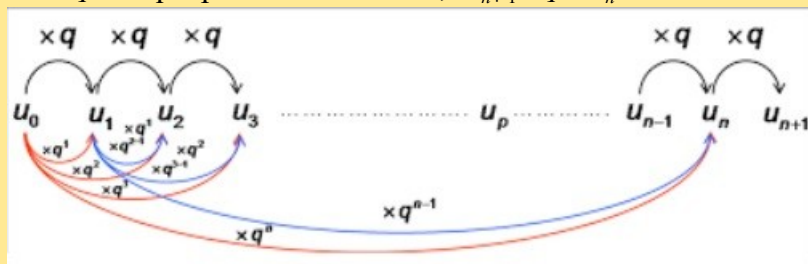
x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
$f(x)$	signe de a	0	signe de a

Croissance exponentielle

I. Suites géométriques

On dit qu'une suite (u_n) est **géométrique** si, à partir de son premier terme, **chaque terme est obtenu en multipliant le précédent par un même nombre**.

Ainsi, il existe un réel q tel que pour tout entier n , $u_{n+1} = q \times u_n$.



Le nombre q est appelé **raison** de la suite géométrique (u_n) .

Dans le cas où la suite (u_n) ne s'annule pas, q est égal au quotient de deux termes consécutifs

quelconques : pour tout entier n , $q = \frac{u_{n+1}}{u_n}$.

Soit (u_n) une suite géométrique de raison q .

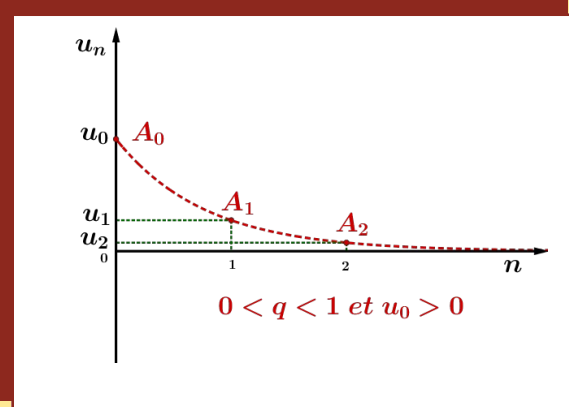
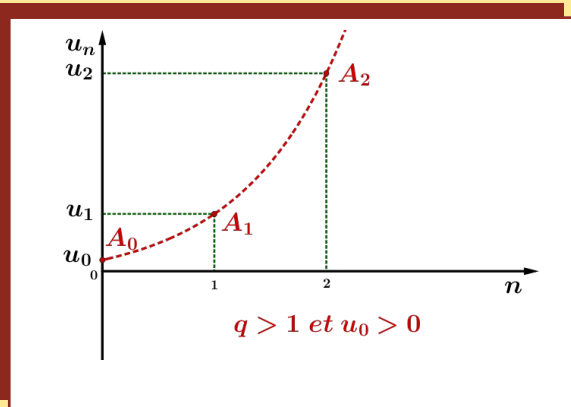
Pour tous entiers n et p tels que $n \geq p$, on a $u_n = u_p \times q^{n-p}$.

En particulier, pour tout entier n , $u_n = u_0 \times q^n$.

Soit (u_n) une suite géométrique de raison q et de premier terme $u_0 > 0$.

- Si $q > 1$, alors la suite (u_n) est (strictement) **croissante**.
- Si $0 < q < 1$, alors la suite (u_n) est (strictement) **décroissante**.
- Si $q = 1$, alors la suite (u_n) est **constante**, égale à u_0 .
- Si $q < 0$, alors la suite (u_n) **n'est pas monotone**.

La représentation graphique d'une suite géométrique (u_n) est un ensemble de points isolés $(n; u_n)$, situés sur une courbe dite **exponentielle**.



Remarque

Si $u_p < 0$, ces sens de variations sont **inversés**.

II. Fonctions exponentielles

Soit a un réel strictement positif. On appelle **fonction exponentielle de base a** la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = a^x$.

Soit a et b deux réels strictement positifs et x et y deux réels. On a :

$$\begin{array}{llll} \bullet a^0 = 1 & \bullet a^1 = a & \bullet a^x \times a^y = a^{x+y} & \bullet \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y} \\ \bullet a^{-x} = \frac{1}{a^x} & \bullet (a^x)^y = a^{xy} & \bullet a^x \times b^x = (ab)^x & \bullet \frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x \end{array}$$

Soit a un réel strictement positif et f une fonction exponentielle de base a définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = a^x$.

- Si $a > 1$, alors la fonction f est strictement **croissante**.
- Si $0 < a < 1$, alors la fonction f est strictement **décroissante**.
- Si $a = 1$, alors la fonction f est **constante**.

Soit a un réel strictement positif et k un réel.

- Si $k > 0$, alors les fonctions $x \rightarrow ka^x$ et $x \rightarrow a^x$ ont le même sens de variation sur $[0; +\infty[$.
- Si $k < 0$, alors les fonctions $x \rightarrow ka^x$ et $x \rightarrow a^x$ ont des sens de variation contraires sur $[0; +\infty[$.

On peut faire l'analogie entre les fonctions exponentielles et les suites géométriques.

Dans $u_n = u(0) \times q^n$, $u(0)$ et q^n sont associés respectivement à k et a^x .

On constate alors que les fonctions $x \rightarrow ka^x$ sont le prolongement des suites géométriques dans le cas où l'exposant est réel.

III Racine n-ième et taux d'évolution moyen

Soit c un réel positif. L'équation $x^n = c$ possède **une unique solution réelle positive** qui est $x = c^{\frac{1}{n}}$, que l'on note aussi $\sqrt[n]{c}$, et appelée **racine n-ième**.

Une quantité subit n évolutions de taux global T . Le **taux moyen** de ces n évolutions est le taux t , qui appliqué n fois, est équivalent au taux global T .

Le taux moyen t vérifie l'égalité $(1+t)^n = 1+T$, ou encore $t = (1+T)^{\frac{1}{n}} - 1$.