

# Probabilités

## I. Expérience aléatoire et événement

Une **expérience aléatoire** est une expérience dont le résultat dépend du hasard. Chacun des résultats possibles s'appelle **éventualité** ou **issue**. L'ensemble  $\Omega$  (ou  $E$ ) de tous les résultats possibles d'une expérience aléatoire s'appelle l'**univers** de l'expérience.

- Un **événement**  $A$  est une partie de l'univers  $\Omega$  (un événement peut donc être constitué de zéro, une ou plusieurs issues de  $\Omega$ ).
- Un **événement élémentaire** est une partie de  $\Omega$  qui ne contient qu'une seule issue.
- Un **événement impossible** est un événement qui n'est réalisé par aucune issue.
- Un **événement certain** est un événement qui est réalisé par toutes les issues.
- L'**événement contraire** de  $A$ , noté  $\bar{A}$ , est la partie constituée de toutes les issues de  $\Omega$  qui ne sont pas dans  $A$ .

On appelle **cardinal de**  $A$ , noté  $\text{Card}(A)$ , l'effectif de l'événement  $A$ . Autrement dit,  $\text{Card}(A)$  est égal au nombre d'issues qui réalisent l'événement  $A$ .

Donner une **loi de probabilité** associée à une expérience aléatoire c'est en donner toutes les issues et attribuer une probabilité à chacune d'elles de sorte que la somme des probabilités des issues est égale à 1. On peut présenter les résultats sous la forme d'un tableau.

## II. Probabilité d'un événement

### II.1 Loi des grands nombres

On a simulé  $n$  lancers d'un dé équilibré à 6 faces et noté le nombre de fois que le chiffre 4 est sorti. Le tableau suivant résume les résultats obtenus.

| Nombre de lancers $n$               | 10  | 50  | 100  | 500  | 1000  | 10000  | 100000  |
|-------------------------------------|-----|-----|------|------|-------|--------|---------|
| Nombre de 4 obtenu                  | 3   | 10  | 19   | 76   | 161   | 1681   | 16649   |
| Fréquence d'apparition du chiffre 4 | 0,3 | 0,2 | 0,19 | 0,15 | 0,161 | 0,1681 | 0,16649 |

Si le dé est bien équilibré, le chiffre 4 a une chance sur 6 de sortir, soit  $\frac{1}{6} \approx 0,166\dots$

On peut remarquer que la fréquence d'apparition du chiffre 4 se rapproche de cette valeur théorique quand le nombre de lancers augmente.

Lors d'une expérience répétée  $n$  fois, les fréquences obtenues d'un événement  $A$  de l'expérience se rapprochent d'une valeur théorique lorsque  $n$  devient grand. Cette valeur s'appelle **probabilité de l'événement**  $A$  et est notée  $P(A)$ .

## II.2 Calculs de probabilité

La probabilité d'un événement  $A$  est la **somme des probabilités des événements élémentaires inclus dans  $A$** .

- Pour tout événement  $A$ , on a  $0 \leq P(A) \leq 1$ .
- La **somme des probabilités des événements élémentaires vaut 1**.

### Remarques

- La probabilité de l'événement certain vaut 1. On la note  $P(\Omega)=1$  (ou  $P(E)=1$ ).
- La probabilité de l'événement vide vaut 0. On la note  $P(\emptyset)=0$ .

Lorsque tous les événements élémentaires d'une expérience aléatoire ont la même probabilité, on dit alors qu'ils sont **équiprobables**. On parle d'**expérience équiprobable** ou de **loi équirépartie**.

Lors d'une expérience aléatoire ayant  $n$  issues équiprobables :

- La probabilité de chaque événement élémentaire est  $\frac{1}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{1}{n}$ .
- La probabilité d'un événement  $A$  est  $P(A) = \frac{\text{nombre d'issues favorables à } A}{\text{nombre total d'issues}} = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)}$ .

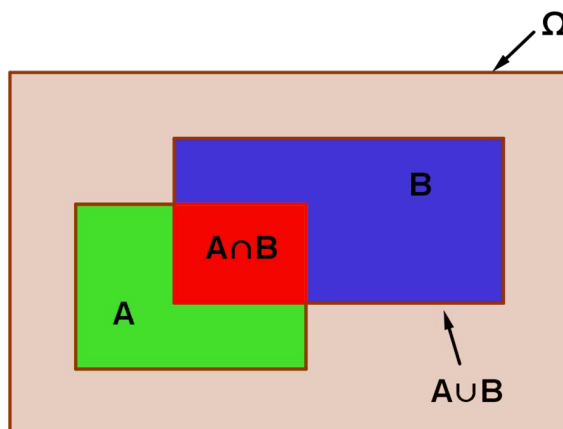
## III.3 Événement contraire

La probabilité de l'**événement contraire** d'un événement  $A$  est :  $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

## III. Réunion et intersection d'événements

- L'événement « **A et B** », noté  $A \cap B$ , s'appelle l'**intersection** des événements  $A$  et  $B$ . Il est réalisé lorsque **les deux événements sont réalisés simultanément**.
- L'événement « **A ou B** », noté  $A \cup B$ , s'appelle la **réunion** des événements  $A$  et  $B$ . Il est réalisé lorsqu'**au moins l'un des deux événements est réalisé**.

Ces situations sont représentées par le **diagramme de Venn** ci-dessous.



Soit  $A$  et  $B$  deux événements d'une même expérience aléatoire. On a alors :  
 $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ .

Si l'événement  $A \cap B$  ne contient aucun élément (c'est-à-dire que  $A \cap B = \emptyset$ ), on dit que les événements  $A$  et  $B$  sont **incompatibles** (ou **disjoints**).

Si deux événements  $A$  et  $B$  sont **incompatibles**, alors  $P(A \cap B) = 0$ .  
 Pour conséquence, on en déduit que  $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ .

### Remarque

$A$  et  $\bar{A}$  sont incompatibles car  $A \cap \bar{A} = \emptyset$ .

## IV. Probabilités conditionnelles

Soit  $A$  et  $B$  deux événements tels que  $\text{Card}(A)$  soit non nul.  
 La **probabilité conditionnelle** que l'événement  $B$  se réalise sachant que l'événement  $A$  est réalisé est notée  $P_A(B)$ , et elle est définie par :

$$P_A(B) = \frac{\text{Card}(A \cap B)}{\text{Card}(A)}$$

La probabilité  $P_A(B)$  vérifie bien  $0 \leq P_A(B) \leq 1$  et  $P_A(B) + P_A(\bar{B}) = 1$ .

## V. Utilisation de tableaux

Les tableaux à double entrées permettent une présentation claire de certaines expériences aléatoires et facilitent le calcul des probabilités conditionnelles.

|                             | <b>B</b>                      | <b><math>\bar{B}</math></b>         | <b>Total</b>           |
|-----------------------------|-------------------------------|-------------------------------------|------------------------|
| <b>A</b>                    | $\text{Card}(A \cap B)$       | $\text{Card}(A \cap \bar{B})$       | $\text{Card}(A)$       |
| <b><math>\bar{A}</math></b> | $\text{Card}(\bar{A} \cap B)$ | $\text{Card}(\bar{A} \cap \bar{B})$ | $\text{Card}(\bar{A})$ |
| <b>Total</b>                | $\text{Card}(B)$              | $\text{Card}(\bar{B})$              | $\text{Card}(\Omega)$  |

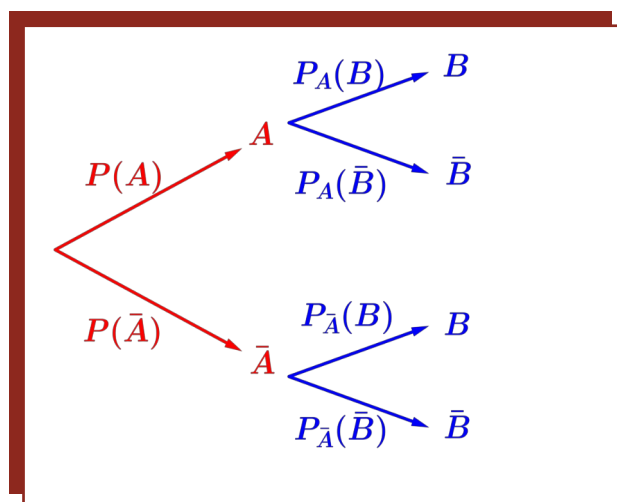
- $\text{Card}(A \cap B)$  se lit à l'intersection de la ligne  $A$  et de la colonne  $B$ .
- $\text{Card}(A)$  (respectivement  $\text{Card}(B)$ ) se lit sur la dernière colonne (respectivement la dernière ligne).
- $P_A(B)$  (ou  $P_B(A)$ ) s'obtient en calculant le quotient des deux cardinaux adéquats :

$$P_A(B) = \frac{\text{Card}(A \cap B)}{\text{Card}(A)} \quad \text{et} \quad P_B(A) = \frac{\text{Card}(A \cap B)}{\text{Card}(B)}$$

## VI. Arbre pondéré et calculs de probabilité

- La probabilité de l'événement correspondant à un chemin est obtenue en multipliant les probabilités portées par ses branches.
- La somme des probabilités sur les branches partant d'un même nœud est égale à 1.
- La probabilité de l'événement correspondant à plusieurs chemins est obtenue en additionnant les probabilités de chacun de ces chemins (**formule des probabilités totales**).

Le cas le plus fréquent correspond à la partition la plus simple ( $A$  et  $\bar{A}$ ). Si on connaît les probabilités de  $B$  et  $\bar{B}$  par l'intermédiaire de  $A$  et  $\bar{A}$ , on a l'arbre suivant :



- Le produit des probabilités inscrites sur chaque branche d'un chemin donne la probabilité de l'intersection des événements placés sur ce chemin.  

$$P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$$
- La somme des probabilités inscrites sur les branches issues d'un même nœud est égale à 1 (loi des nœuds).  

$$P_A(B) + P_A(\bar{B}) = 1$$
- La probabilité d'un événement  $E$  est la somme des probabilités des chemins qui aboutissent à  $E$ .  

$$P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B)$$

$$= P(A) \times P_A(B) + P(\bar{A}) \times P_{\bar{A}}(B)$$

### Exemple

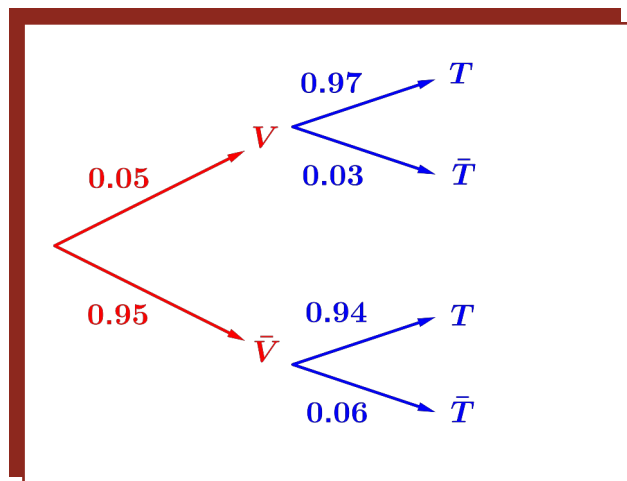
Dans un pays, il y a 5% de la population contaminée par le coronavirus. On dispose d'un test de dépistage de ce virus qui a les propriétés suivantes

- La probabilité qu'une personne contaminée ait un test positif est de 0,97 (sensibilité du test).
- La probabilité qu'une personne non contaminée ait un test négatif est de 0,94 (spécificité du test). On fait passer un test à une personne choisie au hasard dans cette population.

On note les événements suivants :

$V$  : « la personne est contaminée par le virus »

$T$  : « le test est positif »



- La probabilité que le test soit positif est :  

$$P(T) = P(V \cap T) + P(\bar{V} \cap T)$$

$$= 0,05 \times 0,97 + 0,95 \times 0,94$$

$$= 0,9415$$

- La probabilité que la personne soit contaminée sachant que le test est positif est :

$$P_T(V) = \frac{P(V \cap T)}{P(T)}$$

$$= \frac{0,05 \times 0,97}{0,9415}$$

$$= 0,051514$$