Arithmétique et calcul numérique

I. Multiples, diviseurs et nombres premiers

I.1 Multiples et diviseurs

Soit a et b deux entiers relatifs. On dit que a est un diviseur de b lorsqu'il existe un entier relatif k tel que $b=ka$. On peut alors dire que :
- b est un **multiple** de a .
- a **divise** b .
- b est **divisible** par a .

Soit a un entier relatif. Si b et b' sont deux multiples de a , alors $b+b'$ est multiple de a .

Soit a un entier relatif. Alors :
- a est **pair** lorsqu'il existe un entier relatif p tel que $a=2p$.
- a est **impair** lorsqu'il existe un entier relatif p tel que $a=2p+1$.

Soit a un entier relatif. Si a est impair alors a^2 est impair.

Remarque
Si a est pair, alors a^2 est pair.

I.2 Nombres premiers

Un entier naturel non nul est dit **premier** lorsqu'il possède exactement deux diviseurs distincts qui sont 1 et lui-même.

Tout nombre entier peut se décomposer de manière unique sous la forme d'un produit de nombres entiers.

On dit que deux nombres sont **premiers entre eux** s'ils ne possèdent aucun autre diviseur en commun que -1 et 1.

Une fraction est **irréductible** si le numérateur et le dénominateur n'admettent qu'un seul diviseur en commun qui est 1.

II. Fractions

• Dans un calcul littéral, l'écriture $\frac{a}{b}$ n'a de sens que si $b \neq 0$.

• Le signe « moins » dans un quotient : $-\frac{a}{b} = \frac{-a}{b} = \frac{a}{-b}$.

• Égalité :

- $\frac{ac}{bc} = \frac{a}{b}$
- $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ équivaut à $ad = bc$
- $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$

• Addition, soustraction avec dénominateur commun : $\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}$ et $\frac{a}{b} - \frac{c}{b} = \frac{a-c}{b}$.

• Addition, soustraction avec dénominateur différent : $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} + \frac{cb}{bd} = \frac{ad+cb}{bd}$.

III. Puissances

• $a^0 = 1$ • $a^m \times a^n = a^{m+n}$ • si $a \neq 0$, $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ • $(a^m)^n = a^{m \times n}$

• si $a \neq 0$, $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ • $a^n \times b^n = (ab)^n$ • si $b \neq 0$, $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$

IV. Écriture scientifique

L'écriture scientifique d'un nombre décimal a est $b \times 10^n$ où b est un nombre décimal compris entre 1 et 10 (10 exclu) et n un entier relatif.

V. Carré

• Deux nombres réels opposés ont le même carré : Pour tout nombre a , on a $(-a)^2 = a^2$.

• Pour tous nombres réels a et b , on a $a^2 b^2 = (ab)^2$ et si $b \neq 0$, $\frac{a^2}{b^2} = \left(\frac{a}{b}\right)^2$.

VI. Racine carrée

Soit a un nombre réel positif. La racine carrée de a est l'unique nombre réel positif dont le carré est égal à a . Pour tout $a \geqslant 0$, $(\sqrt{a})^2 = a$.

Un **carré parfait** est le carré d'un nombre entier.

Soit a un nombre réel. Alors :
- Si $a \geqslant 0$, alors $\sqrt{a^2} = a$.
- Si $a \leqslant 0$, alors $\sqrt{a^2} = -a$.

Soit a et b deux nombres réels positifs. On a alors :
- $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$.
- Si $b \neq 0$, $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$.
- Si a et b sont positifs, $\sqrt{a+b} < \sqrt{a} + \sqrt{b}$.

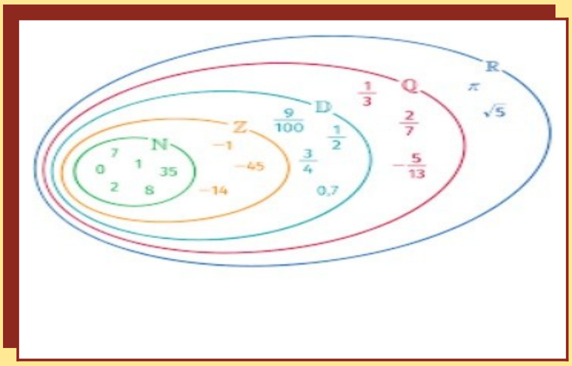
Remarque
Par convention, on ne laisse jamais de radical, c'est-à-dire de racine carrée au dénominateur. Pour « supprimer » ce radical, il suffit de multiplier le numérateur et le dénominateur par ce même radical.

Ensemble de nombres, intervalles et inégalités

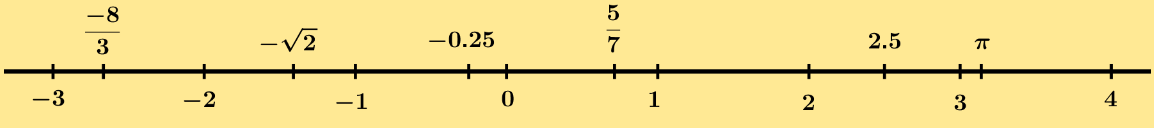
I. Ensemble de nombres

• L'ensemble des **nombres entiers naturels** est noté $\mathbb{N}$.
$\mathbb{N}=\{0;1;2;3;4...\}$
• L'ensemble des **nombres entiers relatifs** est noté $\mathbb{Z}$.
$\mathbb{Z}=\{...-3;-2;-1;0;1;2;3...\}$
• L'ensemble des **nombres décimaux** est noté $\mathbb{D}$.
$\mathbb{D}$ est l'ensemble des nombres qui peuvent s'écrire sous la forme $\frac{a}{10^n}$ où $n\in\mathbb{N}$. Ces nombres s'écrivent avec un nombre fini de chiffres après la virgule.
• L'ensemble des **nombres rationnels** est noté $\mathbb{Q}$.
$\mathbb{Q}$ est l'ensemble des nombres qui peuvent s'écrire sous la forme d'un quotient $\frac{p}{q}$ avec p un entier relatif, q un entier relatif non nul et tel que la fraction $\frac{p}{q}$ est irréductible.
• L'ensemble des **nombres réels** est noté $\mathbb{R}$.
$\mathbb{R}$ est l'ensemble de tous les nombres que nous utiliserons.
• L'**ensemble vide** se note $\emptyset$.
$\emptyset$ est l'ensemble qui ne contient aucun nombre.

Tous les éléments de $\mathbb{N}$ appartiennent à $\mathbb{Z}$.
On dit que $\mathbb{N}$ est inclus dans $\mathbb{Z}$.
On note $\mathbb{N}\subset\mathbb{Z}$.
On a donc aussi les inclusions suivantes :
$$\mathbb{N}\subset\mathbb{Z}\subset\mathbb{D}\subset\mathbb{Q}\subset\mathbb{R}$$



Tout nombre réel est représenté par l'abscisse d'un point sur la **droite numérique**.



• Le nombre $\frac{1}{3}$ n'est pas un nombre décimal.
• Le nombre $\sqrt{2}$ est irrationnel.

Soit n un entier. $\sqrt{n}$ est un entier dans le cas où n est un **carré parfait**, sinon un irrationnel.

II. Intervalles

L'ensemble des nombres réels compris, au sens large, entre deux nombres a et b est noté $[a;b]$.
C'est un **intervalle** qui désigne ici tous les nombres réels x tels que $a \leqslant x \leqslant b$.
Les nombres a et b sont appelés les **bornes** de l'intervalle.

Notation	Nombres x	Représentation sur un axe
$[a;b]$	$a \leqslant x \leqslant b$	
$]a;b[$	$a < x < b$	
$[a;b[$	$a \leqslant x < b$	
$]a;b]$	$a < x \leqslant b$	
$[a;+\infty[$	$a \leqslant x$	
$]a;+\infty[$	$a < x$	
$]-\infty;b]$	$x \leqslant b$	
$]-\infty;b[$	$x < b$	

Remarques

• $-\infty$ et $+\infty$ se lisent respectivement « moins l'infini » et « plus l'infini ». Le crochet est toujours vers l'extérieur en $-\infty$ et $+\infty$.
• On dit qu'un intervalle est **fermé** si ses extrémités appartiennent à l'intervalle.
• On dit qu'un intervalle est **ouvert** si ses extrémités n'appartiennent pas à l'intervalle.
• L'ensemble $\mathbb{R}$ est aussi un intervalle et peut se noter $]-\infty;+\infty[$. $\mathbb{R}$ est un intervalle ouvert.
• $\mathbb{R}^+$ désigne l'ensemble des nombres réels positifs ou nuls. On le note également $[0;+\infty[$.
• $\mathbb{R}^-$ désigne l'ensemble des nombres réels négatifs ou nuls. On le note également $]-\infty;0]$.

III. Intersection et réunion

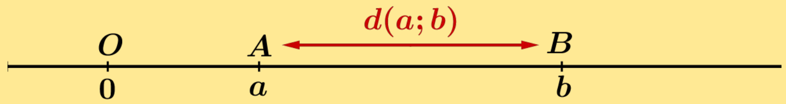
• L'**intersection** de deux ensembles A et B est l'ensemble des éléments qui appartiennent à A **et** à B. On note $A \cap B$.
• La **réunion** de deux ensembles A et B est l'ensemble des éléments qui appartiennent à A **ou** à B. On note $A \cup B$.

Attention !
Dans le langage usuel, le mot « ou » signifie le plus souvent un choix obligatoire, comme « fromage ou dessert ». On parle de « ou » **exclusif**. En mathématique, le symbole $\cup$ propose un choix qui n'est pas exclusif : « un nombre appartient à $A \cup B$ » ne signifie pas « ce nombre appartient soit à A, soit à B » mais « ce nombre appartient au moins à A ou à B ». Dans ce cas, le nombre peut éventuellement appartenir aux deux ensembles. On parle de « ou » **inclusif**.

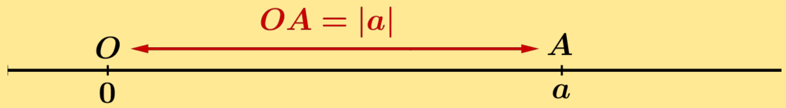
IV. Valeur absolue

• La **valeur absolue** d'un réel x est le nombre noté $|x|$ qui est égal au nombre x si x est positif, et au nombre $-x$ si x est négatif. Autrement dit :
‣ Si $x \geqslant 0$, alors $|x|=x$ ‣ Si $x \leqslant 0$, alors $|x|=-x$
• Pour tout réel x, $\sqrt{x^2}=|x|$.

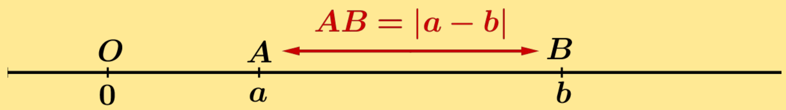
La **distance** entre deux réels a et b est la distance entre les points d'abscisses a et b sur la droite réelle munie d'un repère $(O;I)$. On la note $d(a;b)$.



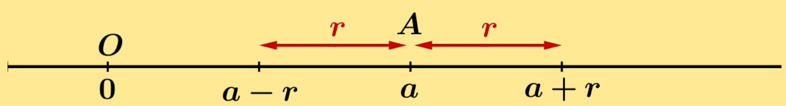
Pour tous réels a et b, on a :
• $d(a;0)=|a|$.



• $d(a;b)=|a-b|$.



Si un intervalle peut s'écrire sous la forme $[a-r;a+r]$ où a et r sont deux réels strictement positifs, alors on a : $x \in [a-r;a+r] \Leftrightarrow |x-a| \leqslant r$.
Dans ce cas, a est appelé **centre de l'intervalle** et r **rayon de l'intervalle**.



Calcul littéral

I. Développement et factorisation

Développer un produit de facteurs, c'est l'écrire sous la forme d'une somme.
Pour tous nombres a , b , c , d et k , on a :

- $k(a+b)=ka+kb$
- $k(a-b)=ka-kb$
- $(a+b)(c-d)=ac-ad+bc-bd$

II. Identités remarquables

Pour tous nombres réels a et b , on a :

- $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$
- $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$
- $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$

III. Équations, inégalités et inéquations

• Une équation (respectivement une inéquation) est une égalité (respectivement une inégalité) dans laquelle est **présente une inconnue (ou des inconnues)**.
• Un nombre est **solution d'une équation** (respectivement **d'une inéquation**) si, en substituant ce nombre à l'inconnue, on obtient **une égalité** (respectivement **une inégalité**) **vraie**.

• Résoudre une équation (respectivement une inéquation), c'est déterminer **toutes les solutions de l'équation** (respectivement de l'**inéquation**).
• Deux équations (respectivement deux inéquations) sont **équivalentes si elles ont les mêmes solutions**.

• **La multiplication et la division** des deux membres d'une inégalité **par un même nombre strictement négatif change l'ordre de comparaison**.
• Les autres opérations ne modifient pas l'ordre.

Modéliser un problème par une inéquation, c'est **écrire une inéquation en lien avec les contraintes exposées par le problème**.

IV. Quelques résolutions d'équations

Équation produit nul
Un produit est nul si et seulement si au moins l'un de ses facteurs est nul :

$$\mathrm{A}\times\mathrm{B}=0 \Leftrightarrow \mathrm{A}=0 \text{ ou } \mathrm{B}=0$$

Équation quotient nul
Un quotient est nul si et seulement si son numérateur est nul et son dénominateur non nul :

$$\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}}=0 \Leftrightarrow \mathrm{A}=0 \text{ et } \mathrm{B}\neq 0$$

Équation carrée
Soit a un nombre réel. On considère l'équation $x^2=a$ dans $\mathbb{R}$. Alors :
- Si $a<0$, l'équation n'admet aucune solution.
- Si $a=0$, l'équation admet $x=0$ comme unique solution.
- Si $a>0$, l'équation admet deux solutions $x=\sqrt{a}$ et $x=-\sqrt{a}$.

Équation racine carrée
Soit a un nombre réel. On considère l'équation $\sqrt{x}=a$ dans $\mathbb{R}$. Alors :
- Si $a<0$, l'équation n'admet aucune solution.
- Si $a\geqslant 0$, l'équation admet une unique solution $x=a^2$.

Équation inverse
Soit a un nombre réel. On considère l'équation $\frac{1}{x}=a$ dans $\mathbb{R}$. Alors :
- Si $a=0$, l'équation n'admet aucune solution.
- Si $a\neq 0$, l'équation admet une unique solution $x=\frac{1}{a}$.

Système d'équations

Résoudre un système linéaire de deux équations à deux inconnues x et y revient à déterminer tous les couples $(x;y)$ qui vérifient les deux équations en même temps.

I. Système d'équations

Soit a, b, c, a', b' et c' des réels.
Résoudre le système d'équations à deux inconnues $\begin{cases} a\,x+b\,y+c=0 \\ a'\,x+b'\,y+c=0 \end{cases}$ c'est trouver tous les couples $(x;y)$ de nombres réels vérifiant simultanément les deux équations du système.

On appelle **couple solution** $(x;y)$ tout couple de réels x et y solutions simultanément des deux équations qui composent un système.

Soit a, b, c, a', b' et c' des réels et soit le système d'équations à deux inconnues suivant :

$$\begin{cases} a\,x+b\,y+c=0 \\ a'\,x+b'\,y+c=0 \end{cases}$$

• Si les droites sont sécantes, le système admet **un seul couple solution**.
• Si les droites sont strictement parallèles, le système n'admet **aucune solution**.
• Si les droites sont confondues, le système possède **une infinité de solutions**.

II. Méthode de substitution

Cette méthode consiste à **isoler une inconnue** :
• On isole une inconnue dans une des deux équations du système.
• On la remplace dans l'autre équation afin d'obtenir une nouvelle équation avec une seule inconnue.
• On résout cette nouvelle équation.
• On remplace l'inconnue trouvée dans l'une des deux équations du système afin de trouver la seconde inconnue.
• On donne l'ensemble des solutions du système.

III. Méthode par combinaison linéaire

Cette méthode consiste à **multiplier les deux équations par des nombres** de telle manière qu'en additionnant les équations membre membre, une inconnue s'élimine. Ainsi, il n'y plus qu'à résoudre une équation à une seule inconnue. Pour trouver la deuxième inconnue, on remplace l'inconnue trouvée dans l'une des deux équations.
On l'appelle aussi la **méthode du pivot de Gauss**.