Généralités sur les fonctions

I. Définitions

• Définir une fonction f sur l'ensemble D consiste à associer, à chaque réel x de D, un **unique nombre** réel y.
• D s'appelle l'**ensemble de définition** (ou **domaine de définition**) de la fonction f.
• y s'appelle l'**image** de x par la fonction f et se note $f(x)$.
• x est un **antécédent** de y par la fonction f.

II. Différentes façons de définir une fonction

Soit f une fonction, D son ensemble de définition et $x \in D$.
L'**expression algébrique** de la fonction f donne directement $f(x)$ en fonction de la variable x.

Soit f une fonction, D son ensemble de définition et $x \in \mathrm{D}$.
Un **tableau de valeurs** de la fonction f donne, sur la première ligne (ou colonne), différentes valeurs de la variable x et, en vis-à-vis sur la deuxième ligne (ou colonne), les images $f(x)$ qui leur sont associées.

Antécédent $\boldsymbol{x}$						
Image $\boldsymbol{f(x)}$						

La **courbe représentative** de la fonction f dans un repère est l'ensemble des points de coordonnées $(x;f(x))$ (ou $(x;y)$) où x parcourt le domaine de définition D de la fonction f.
Elle est souvent notée C_f.
L'**équation de cette courbe représentative** est $y=f(x)$.

Un point M de coordonnées $(x;f(x))$ appartient à la courbe représentative C_f d'une fonction si et seulement si x appartient à D et $y=f(x)$.

Méthode algébrique
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=3x-5$.
• Déterminer une image
L'image de 7 par la fonction f est $f(7)=3\times7-5=21-5=16$.
• Déterminer un antécédent
L'antécédent de 4 par la fonction f est tel que $f(x)=4$.
On a $f(x)=4 \Leftrightarrow 3x-5=4 \Leftrightarrow 3x=9 \Leftrightarrow x=3$. Ainsi l'antécédent de 4 par la fonction f est 3.
• Déterminer si un point appartient à une courbe
Le point $\mathrm{A}(1;-2)$ appartient à la courbe C_f représentative de f si et seulement si $f(1)=-2$.
On a $f(1)=3\times1-5=3-5=-2$. Ainsi $\mathrm{A}\in\mathrm{C}_f$.

III. Parité d'une fonction

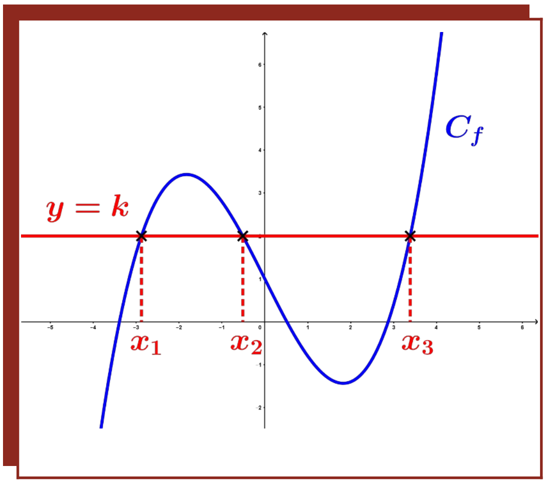
Soit f une fonction définie sur un intervalle I .
• Dire que f est **paire** sur I signifie que, pour tout $x \in I$, $f(-x)=f(x)$.
• Dire que f est **impaire** sur I signifie que, pour tout $x \in I$, $f(-x)=-f(x)$.

• La courbe représentative d'une fonction paire est **symétrique par rapport à l'axe des ordonnées**.
• La courbe représentative d'une fonction impaire est **symétrique par rapport à l'origine du repère**.

IV. Résolution graphique d'équation et d'inéquation

IV.1 Résolution d'équation du type $f(x)=k$

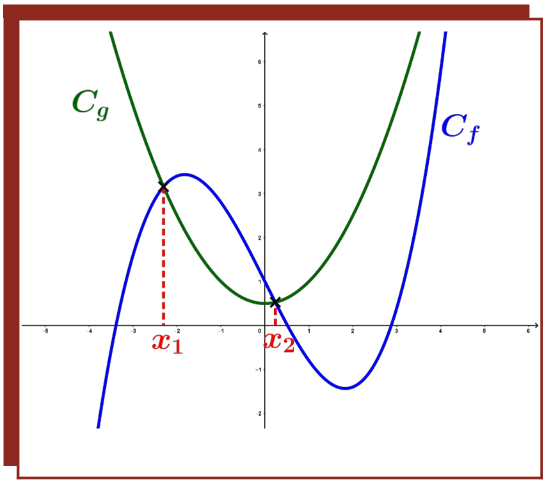
Soit f une fonction définie sur un ensemble D et k un réel fixé.
Résoudre l'équation $f(x)=k$ consiste à trouver **tous les réels x de D qui ont pour image k par la fonction f** . Ceci revient à déterminer l'**ensemble des antécédents de k par f** .



Graphiquement, les solutions de $f(x)=k$ sont les **abscisses de tous les points de C_f ayant pour ordonnées k** . On détermine en fait l'ensemble des abscisses des points d'intersection de la courbe C_f avec la droite d'équation $y=k$.

IV.2 Résolution d'équation du type $f(x)=g(x)$

Soit f et g deux fonctions définies sur un ensemble D .
Résoudre $f(x)=g(x)$ consiste à déterminer **tous les réels x de D qui ont la même image par f et g** .

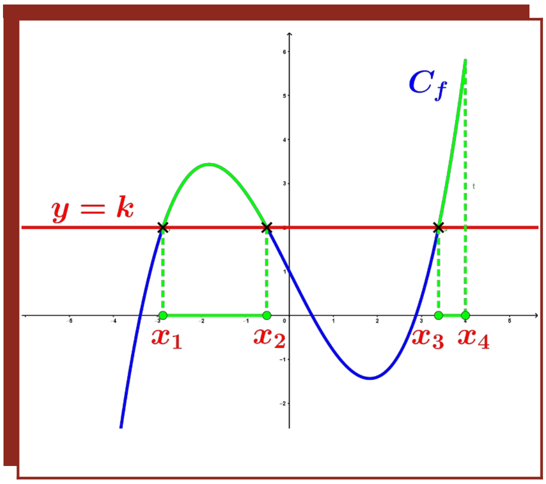


Graphiquement, les solutions de $f(x)=g(x)$ sont les **abscisses des points d'intersection des courbes représentatives de f et g** .

IV.3 Résolution d'inéquation

Soit f une fonction définie sur un ensemble D et k un réel fixé.
Résoudre l'équation $f(x) \geqslant k$ consiste à trouver **tous les réels x de D qui ont une image supérieure ou égale à k par la fonction f** .

Graphiquement, les solutions de $f(x) \geqslant k$ sont les **abscisses de tous les points de C_f ayant une ordonnée supérieure ou égale à k** . On détermine en fait l'ensemble des abscisses des points de la courbe C_f situés au dessus de la droite d'équation $y=k$.

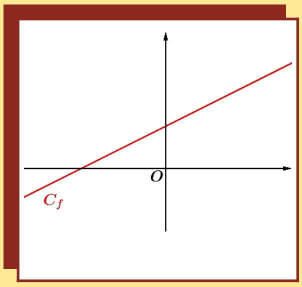


V. Quelques fonctions de référence

Une **fonction de référence** est une fonction simple qui permet l'étude d'une famille plus large de fonctions.

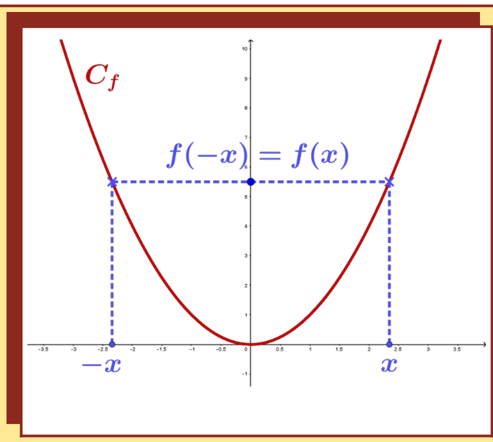
V.1 Fonctions affines

Une **fonction affine** est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=ax+b$, où a et b sont deux nombres réels.
La représentation graphique d'une fonction affine f est une **droite**.



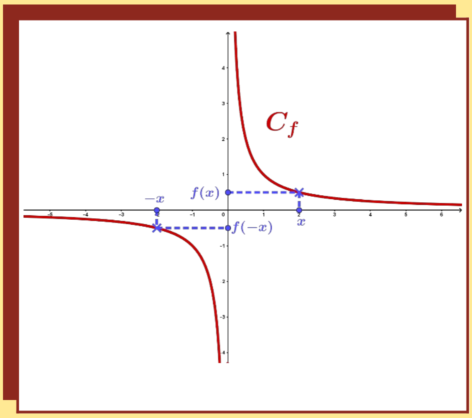
V.2 Fonction carrée

• La **fonction carrée** est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^2$.
• C'est une fonction **paire**.
• Sa courbe représentative est **symétrique par rapport à l'axe des ordonnées**. Elle est appelée **parabole**.



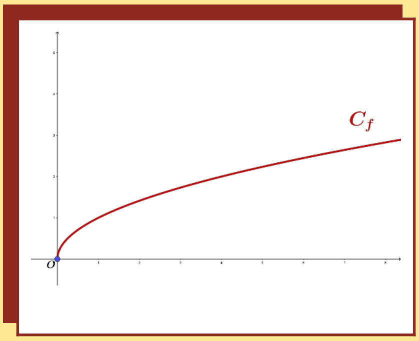
V.3 Fonction inverse

• La fonction inverse est la fonction définie sur $]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{1}{x}$.
• C'est une fonction **impaire**.
• Sa courbe représentative est **symétrique par rapport au centre du repère**. Elle est appelée **hyperbole**.



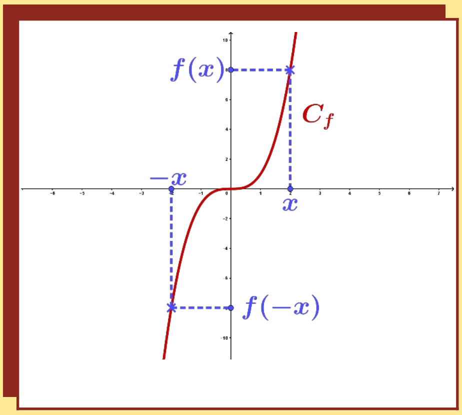
V.4 Fonction racine carrée

La **fonction racine carrée** est la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x)=\sqrt{x}$.



V.5 Fonction cube

• La **fonction cube** est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^3$.
• La fonction cube est une fonction **impaire**.
• C'est une fonction **impaire**.
• Sa courbe représentative est **symétrique par rapport au centre du repère**.



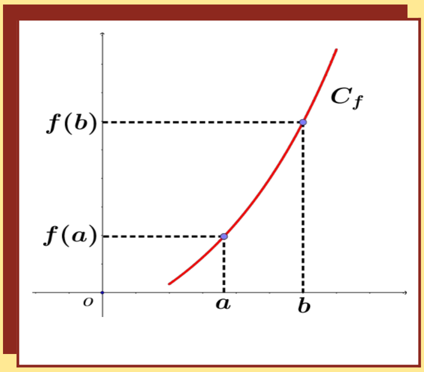
Variations d'une fonction

I. Croissance et décroissance d'une fonction

La fonction f est **croissante** sur un intervalle I (respectivement **strictement croissante** sur I) lorsque, quels que soient les réels a et b de I :

si $a<b$, alors $f(a)\leqslant f(b)$

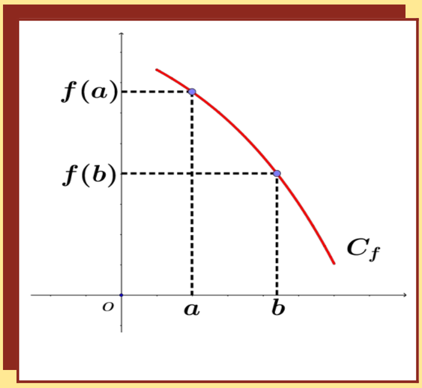
(respectivement si $a<b$, alors $f(a)<f(b)$)



La fonction f est **décroissante** sur un intervalle I (respectivement **strictement décroissante** sur I) lorsque, quels que soient les réels a et b de I :

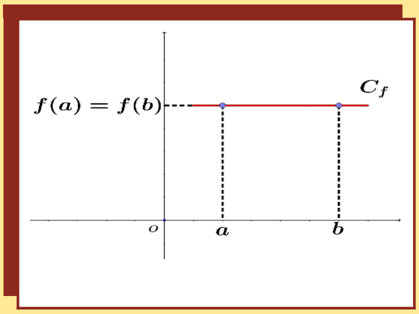
si $a<b$, alors $f(a)\geqslant f(b)$

(respectivement si $a<b$, alors $f(a)>f(b)$).



La fonction f est **constante** sur un intervalle I lorsque, quels que soient les réels a et b de I :

si $a<b$, alors $f(a)=f(b)$



Attention !

Pour définir le sens de variation d'une fonction, il est fondamental de préciser « pour tous réels a et b de I ».

En effet, pour la fonction $f:x\rightarrow x^2$ définie sur $\mathrm{I}=[-2;2]$, on a : $-1<2$ et $f(-1)\leqslant f(2)$.

Donc « il existe a et b tels que $f(a)<f(b)$ ».

Mais cette affirmation n'est pas vraie pour tout a et b de I (par exemple $a=-2$ et $b=0$) car la fonction f n'est pas croissante sur I .

On dit qu'une fonction est **monotone** si elle est soit croissante, soit décroissante.

II. Tableau de variations

Pour représenter les variations d'une fonction f , on utilise un tableau avec des flèches représentant la monotonie sur des intervalles les plus grands possibles.
Il fait apparaître les intervalles sur lesquels la fonction est **croissante par une flèche montante** et ceux sur lesquels la fonction est **décroissante par une flèche descendante**. De plus, si on les connaît, on écrit les **images au bout des flèches**.
L'ensemble forme le **tableau de variations** de la fonction f .

Exemple
Pour une fonction f définie sur l'intervalle $[-3;3,5]$, croissante sur $[-3;-1]$, décroissante sur $[-1;1]$ puis croissante sur $[1;3,5]$, le tableau de variations est le suivant :

x	-3		-1		1		$3,5$
$f(x)$	$-2,3$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$0,4$	$\nearrow$	$6,1$

Remarque
Dans un tableau de variations, il est convenu que les flèches obliques indiquent que la fonction est strictement monotone.

III. Extremum d'une fonction

Soit une fonction f définie sur un intervalle I et a un réel de I .
• On dit que le réel M est le **maximum** de f sur I , **atteint** en a , si $f(a)=\mathrm{M}$ et si pour tout réel x de I , on a $f(x)\leqslant\mathrm{M}$.
• On dit que le réel m est le **minimum** de f sur I , **atteint** en a , si $f(a)=m$ et si pour tout réel x de I , on a $f(x)\geqslant m$.
• Un **extremum** de f sur I est **un maximum ou un minimum** de f sur I .
• On dit que le réel L est un **maximum** (respectivement **minimum**) **local** de f sur I s'il existe un intervalle ouvert J contenu dans I , tel que L est le maximum (respectivement minimum) de f sur J .

Remarques
• Les pluriels de "minimum", "maximum" et "extremum" sont "minima", "maxima" et "extrema".
• On dit que $f(a)$ est le maximum (ou le minimum) de f sur I atteint pour $x=a$.
• On différencie maximum **global** et **local :**
Un maximum **global** correspond à la valeur la plus grande sur tout l'ensemble de définition.
Un maximum **local** correspond à la valeur la plus grande sur une partie de l'ensemble de définition.
Reprenons l'exemple précédent. Il y a deux maximums qui sont 1 et $6,1$. 1 est un maximum local alors que $6,1$ est un maximum global.

Fonctions affines

Une **fonction affine** est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=ax+b$, où a et b sont deux nombres réels.

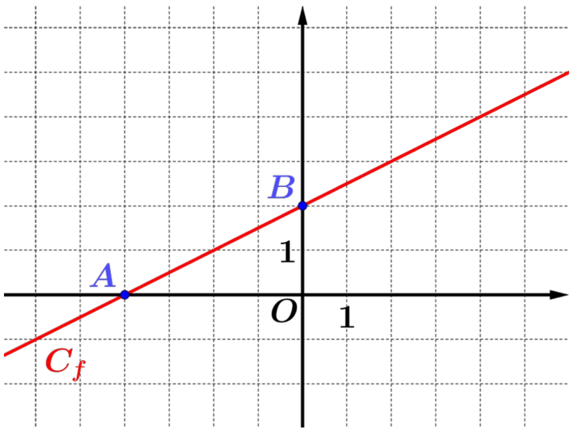
Remarques
- Lorsque $b=0$, la fonction f définie par $f(x)=ax$ est une fonction linéaire.
- Lorsque $a=0$, la fonction f définie par $f(x)=b$ est une fonction constante.

La représentation graphique d'une fonction affine f est une droite. Le réel a s'appelle **coefficient directeur** de la droite et b l'**ordonnée à l'origine**.

Remarques
- Lorsque $b=0$, la droite passe par l'origine du repère.
- Lorsque $a=0$, la droite est parallèle à l'axe des abscisses.

Représentation graphique

La droite représentative d'une fonction affine f passe par les points de coordonnées $\mathrm{A}\left(-\frac{b}{a};0\right)$ et $\mathrm{B}(0;b)$.

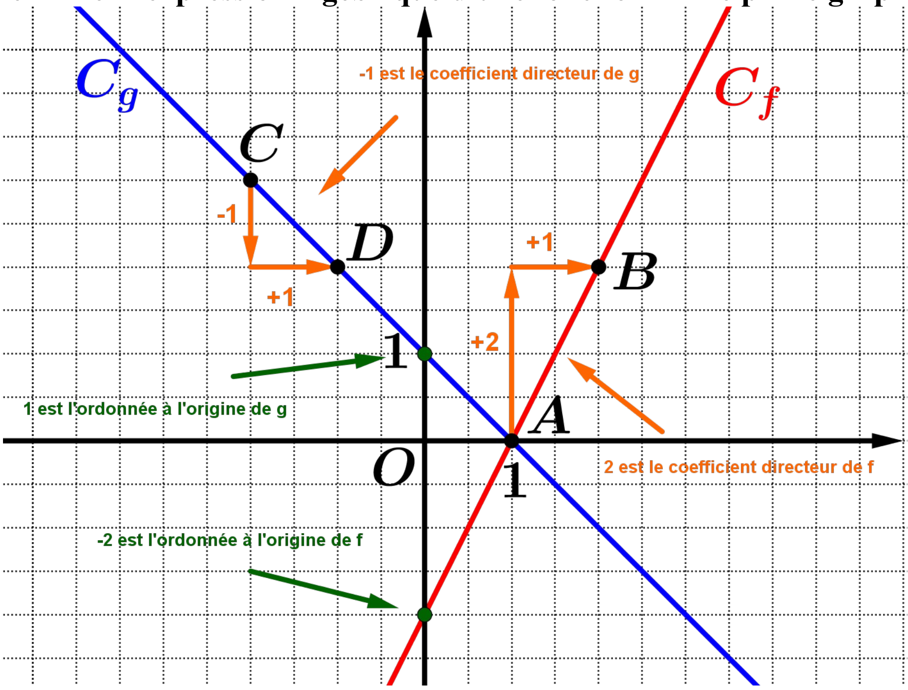


Soit f une fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=ax+b$.
- Si $a>0$, alors la fonction f est **strictement croissante** sur $\mathbb{R}$. La droite représentative de f est tournée "vers le haut".
- Si $a<0$, alors la fonction f est **strictement décroissante** sur $\mathbb{R}$. La droite représentative de f est tournée "vers le bas".
- Si $a=0$, alors la fonction f est **constante** sur $\mathbb{R}$. La droite représentative de f est parallèle à l'axe des abscisses.

Soit f une fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=ax+b$. On a alors, quels que soient les nombres réels x_1 et x_2 distincts l'un de l'autre :

$$a=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$$

Méthode : déterminer l'expression algébrique d'une fonction affine par le graphique



Pour la droite représentative de f :
• Le coefficient directeur est 2.
• L'ordonnée à l'origine est -2 .
Ainsi l'expression algébrique de f est $f(x)=2x-2$.

Pour la droite représentative de g :
• Le coefficient directeur est -1 .
• L'ordonnée à l'origine est 1.
Ainsi l'expression algébrique de g est $g(x)=-x+1$.

Méthode : Déterminer l'expression algébrique d'une fonction affine par le calcul

Dans un repère, la représentation graphique correspondant à une fonction affine f passe par les points $\mathrm{A}(-2;4)$ et $\mathrm{B}(3;1)$. Déterminons par le calcul l'expression algébrique de f .

• On commence par calculer le coefficient directeur a .

On a $a=\dfrac{f(x_{\mathrm{B}})-f(x_{\mathrm{A}})}{x_{\mathrm{B}}-x_{\mathrm{A}}}=\dfrac{y_{\mathrm{B}}-y_{\mathrm{A}}}{x_{\mathrm{B}}-x_{\mathrm{A}}}=\dfrac{1-4}{3-(-2)}=-\dfrac{3}{3+2}=-\dfrac{3}{5}$

D'où $f(x)=-\dfrac{3}{5}x+b$.

• On détermine ensuite l'ordonnée à l'origine b .

Le point B appartient à la courbe représentative de f . Donc ses coordonnées vérifient l'expression algébrique de f .

On a alors $f(3)=-\dfrac{3}{5}\times 3+b \Leftrightarrow 1=-\dfrac{9}{5}+b \Leftrightarrow b=1+\dfrac{9}{5} \Leftrightarrow b=\dfrac{14}{5}$.

Ainsi, pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f(x)=-\dfrac{3}{5}x+\dfrac{14}{5}$.

Signe d'une fonction et inéquations

I. Étude du signe d'une fonction

Étudier le signe d'une fonction ou d'une expression $f(x)$ revient à déterminer les valeurs de x pour lesquelles $f(x)$ est positif, nul ou négatif. Le signe est souvent présenté sous la forme d'un **tableau de signes**.

Remarque
Le tableau de signe d'une fonction comporte deux lignes :
• Sur la première ligne, on indique les éléments du domaine de définition de la fonction et les éventuelles valeurs de x pour lesquelles la fonction s'annule.
• Sur la deuxième ligne, on crée des cases dans lesquelles on indique le signe de la fonction ainsi que les zéros en dessous des valeurs de x pour lesquelles la fonction s'annule.

II. Étude du signe d'une fonction affine

Soit a et b deux réels tels que $a\neq 0$. La fonction affine f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=ax+b$ s'annule et change de signe une fois et une seule dans son ensemble de définition en $x=-\frac{b}{a}$.

• Si $a>0$, alors $f(x)>0 \Leftrightarrow x>-\frac{b}{a}$.

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	

• Si $a<0$, alors $f(x)>0 \Leftrightarrow x<-\frac{b}{a}$.

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	

Remarque
Pour trouver le signe d'une fonction affine, il est aussi possible d'utiliser son sens de variations :
Si $a>0$, alors la fonction affine est croissante et donc elle est d'abord négative puis positive.
Si $a<0$, la fonction affine est décroissante et donc elle d'abord positive puis négative.

III. Signe et opérations

Pour déterminer le signe d'un produit ou d'un quotient de deux fonctions, on construit un tableau de signes à quatre lignes.
• La 1ère ligne indique les éléments de l'ensemble de définition et les valeurs de x pour lesquelles les deux fonctions s'annulent. Les valeurs doivent être placées en respectant l'ordre.
• Les 2e et 3e lignes indiquent le signe de chacune des deux fonctions.
• La 4e ligne se remplit avec la règle des signes d'un produit ou d'un quotient :
‣ des facteurs de même signe donnent un produit ou un quotient positif ;
‣ des facteurs de signes contraires donnent un produit ou un quotient négatif.

Remarques
• Le tableau de signes peut être constitué de plus de quatre lignes. Par exemple, si l'expression étudiée est un produit de trois facteurs, alors il y aura une ligne supplémentaire dans le tableau.
• Lorsque l'on étudie le signe d'un quotient, il faut faire attention à ce que celui-ci ne s'annule pas. Il y aura donc une valeur interdite et une double barre.
• Lorsque l'on connaît le signe de termes d'une somme, on ne peut pas en général déterminer son signe, sauf si ses les termes sont tous de même signes.
Par exemple, x^2 et 4 sont chacun positifs pour tout réel x, donc $x^2+4\geqslant 0$.

IV. Signe et inéquations

Étudier le signe d'une expression peut permettre de résoudre une inéquation.
Résolvons l'inéquation $(3x+9)(-x+2)\leqslant 0$.
‣ On commence par chercher les valeurs d'annulation de $3x+9$ et $-x+2$.
$3x+9=0 \Leftrightarrow 3x=-9 \Leftrightarrow x=-3$ et $-x+2=0 \Leftrightarrow -x=-2 \Leftrightarrow x=2$.
‣ On détermine le signe de chacune des deux expressions précédentes.
La fonction $x \rightarrow 3x+9$ est croissante, donc elle est d'abord négative puis positive.
La fonction $x \rightarrow -x+2$ est décroissante, donc elle est d'abord positive et négative.
‣ On réunit ses résultats dans un tableau de signes et on le complète.

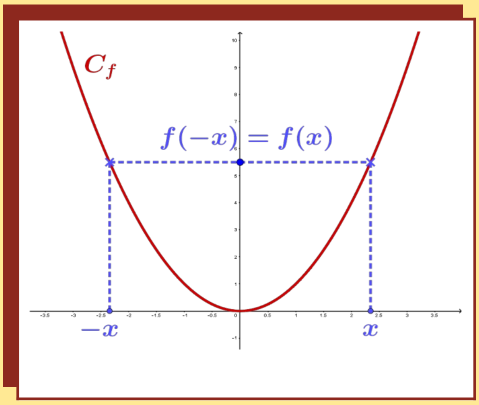
x	$-\infty$		-3		2		$+\infty$
$3x+9$		$-$	0	$+$		$+$	
$-x+2$		$+$		$+$	0	$-$	
$(3x+9)(-x+2)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Ainsi $(3x+9)(-x+2)\leqslant 0 \Leftrightarrow x\in]-\infty;-3]\cup[2;+\infty[$.

Fonctions de référence

I. Fonction carrée

• La **fonction carrée** est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^2$.
• Elle est **strictement décroissante sur l'intervalle** $]-\infty;0]$ et **strictement croissante sur l'intervalle** $[0;+\infty[$.
• C'est une fonction **paire**.
• Sa courbe représentative est **symétrique par rapport à l'axe des ordonnées**. Elle est appelée **parabole**.



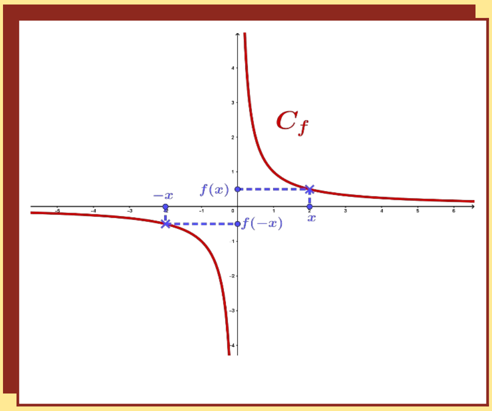
• **Deux nombres positifs et leurs carrés sont rangés dans le même ordre** :
si $0\leqslant a\leqslant b$ alors $0\leqslant a^2\leqslant b^2$
• **Deux nombres négatifs et leurs carrés sont rangés dans l'ordre inverse** :
si $a\leqslant b\leqslant 0$ alors $0\leqslant b^2\leqslant a^2$

Soit a un nombre réel. On considère l'équation $x^2=a$ dans $\mathbb{R}$. Alors :
• Si $a<0$, l'équation n'admet aucune solution.
• Si $a=0$, l'équation admet $x=0$ comme unique solution.
• Si $a>0$, l'équation admet deux solutions $x=-\sqrt{a}$ et $x=\sqrt{a}$.

Soit a un nombre réel. On considère l'inéquation $x^2\leqslant a$ dans $\mathbb{R}$. Alors :
• Si $a<0$, l'inéquation n'admet aucune solution.
• Si $a=0$, l'inéquation admet $x=0$ comme unique solution.
• Si $a>0$, l'inéquation admet l'ensemble solutions $[-\sqrt{a};\sqrt{a}]$.

II. Fonction inverse

• La **fonction inverse** est la fonction définie sur $]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{1}{x}$.
• Elle est **strictement décroissante sur** $]-\infty;0[$ et **strictement décroissante sur** $]0;+\infty[$.
• C'est une fonction **impaire**.
• Sa courbe représentative est **symétrique par rapport au centre du repère**. Elle est appelée **hyperbole**.
• La fonction inverse admet une **valeur interdite en 0**.



- **Deux nombres positifs et leurs inverses sont rangés dans l'ordre inverse** :

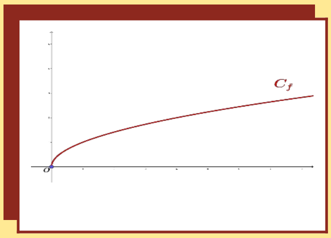
$$\text{si } 0< a\leqslant b \text{ , alors } \frac{1}{a}\geqslant\frac{1}{b}$$

- **Deux nombres négatifs et leurs inverses sont rangés dans l'ordre inverse** :

$$\text{si } a\leqslant b< 0 \text{ , alors } \frac{1}{a}\geqslant\frac{1}{b}$$

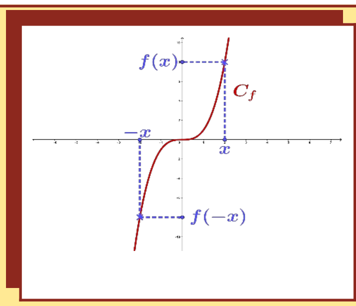
III. Fonction racine carrée

La **fonction racine carrée** est la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f(x)=\sqrt{x}$.
La fonction racine carrée est **strictement croissante sur** $[\mathbf{0};+\infty[$.



IV. Fonction cube

- La **fonction cube** est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^3$.
- Elle est **strictement croissante sur** $\mathbb{R}$.
- C'est une fonction **impaire**.
- Sa courbe représentative est **symétrique par rapport au centre du repère**.



Soit a un nombre réel. L'équation $x^3=a$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$ que l'on appelle **racine cubique** de a et que l'on note $\sqrt[3]{c}$ ou $x=a^{\frac{1}{3}}$.

V. Positions relatives

Soit x un nombre réel positif.
- Si $0\leqslant x\leqslant 1$, alors $x^3\leqslant x^2\leqslant x$
- Si $x\geqslant 1$, alors $x\leqslant x^2\leqslant x^3$

Soit f , g et h les fonctions définies sur $[0\,;+\infty[$ par $f(x)=x$, $g(x)=x^2$ et $h(x)=x^3$. On note C_f , C_g et C_h leurs représentations graphiques respectives dans un repère $(O;I,J)$.
- Si $0\leqslant x\leqslant 1$, alors C_g est « en dessous » de C_f qui est « en dessous » de C_h .
- Si $x\geqslant 1$, alors C_h est « en dessous » de C_f qui est « en dessous » de C_g .