Devoir vacances été

Ce devoir est à faire sur la base du volontariat. Il ne sera ni ramassé, ni noté. Il a pour objectif de vous remettre en mémoire les notions les plus essentielles afin d'être prêt dès la rentrée.
Vous retrouverez une correction détaillée de ce devoir sur le site de mathématiques du lycée à l'adresse suivante : mathssimplebasique.fr

Thème 1 : Second degré

Exercice 1

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $x^2+2x-3=0$; **2.** $2x^2+12x+18=0$; **3.** $x^3-8x^2+12x=0$.

Exercice 2

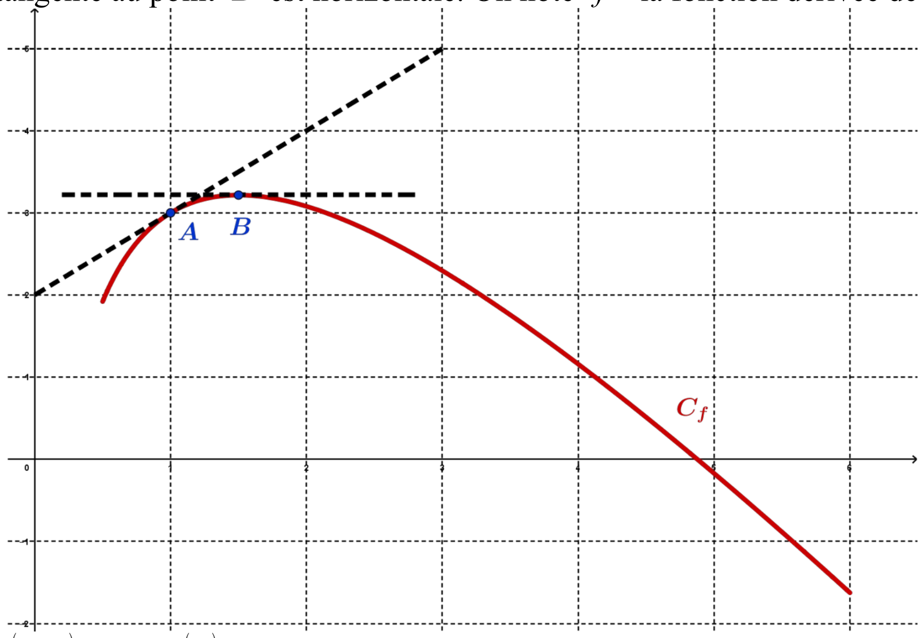
Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $3x^2+18x+27>0$; **2.** $-2x^2-x+4\leqslant 0$; **3.** $x^2-x+1<0$.

Thème 2 : Fonctions

Exercice 1

La courbe C_f ci-dessous représente, dans un repère orthonormé, une fonction f définie et dérivable sur $[0,5;6]$. Les points $A(1;3)$ et B d'abscisse $1,5$ sont sur la courbe C_f.
Les tangentes à la courbe C_f aux points A et B sont aussi représentées en pointillés sur ce graphique, la tangente au point B est horizontale. On note f' la fonction dérivée de f .



1. Que vaut $f(1,5)$? Et $f(1)$? (On arrondira les résultats si besoin).
2. Déterminer $f'(1,5)$.
3. En déduire l'équation réduite de la tangente à C_f au point d'abscisse $1,5$.
4. La tangente à la courbe C_f passant par A passe par le point de coordonnées $(0;2)$.
Déterminer une équation de cette tangente.

Exercice 2

Dans chacun des cas, donner l'ensemble de définition de f, sa dérivée f' et l'ensemble de dérivabilité de f.

1. $f(x)=2x^2-5x+2$; **2.** $f(x)=\dfrac{1}{x^2+2}$; **3.** $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2-3}$.

Exercice 3

Dans chacun des cas, donner l'ensemble de définition, la dérivée et l'ensemble de dérivabilité de la fonction f. Vous donnerez ensuite ses variations.

1. $f(x)=x^2-2x-1$; **2.** $f(x)=-x^3+2x^2+4x$; **3.** $f(x)=\dfrac{x^2+5x+5}{x^2+x+1}$.

Exercice 4

Simplifier les expressions données pour tout réel x :

1. $e^x \times e^{-2x}$; **2.** $e^{x+2} \times e^{-x}$; **3.** $(e^x)^2 \times (e^{-x})^3$;

4. $(e^{1-x})^2 \times e^{2x}$; **5.** $\dfrac{e^{-3x+1}}{e^{2x}}$; **6.** $\dfrac{e^{x-2} \times e^{3x}}{e^{1-2x}}$.

Exercice 5

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et les inéquations suivantes :

1. $e^{2x+1}=e^{\frac{5}{2}}$; **2.** $e^{2x+1}-1=0$; **3.** $e^{x^2-5}=e^{-4x}$;

4. $1 \leqslant e^{3x}$; **5.** $(e^x)^2 \geqslant e^{-x-1}$; **6.** $e^{x+3} \geqslant \dfrac{1}{e^x}$.

Exercice 6

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $\mathbb{R}$ par $f(x)=(3-x)e^x+1$.

1. Montrer que, pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $\mathbb{R}$, $f'(x)=(2-x)e^x$.

2. Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $\mathbb{R}$.

3. a. Soit T la tangente à la courbe représentative de la fonction f au point d'abscisse 3.
Montrer que T a pour équation $y=-e^3x+3e^3+1$.

b. Déterminer les coordonnées du point d'intersection de la droite T et de l'axe des abscisses.

Thème 3 : Probabilités

Exercice 1

Un magasin de téléphonie mobile lance une offre sur ses smartphones de la marque Pomme vendus à 800€ : il propose une assurance complémentaire pour 50€ ainsi qu'une coque à 20€.
Ce magasin a fait les constatations suivantes concernant les acheteurs de ce smartphone : 40% des acheteurs ont souscrit à l'assurance complémentaire.
Parmi les acheteurs qui ont souscrit à l'assurance complémentaire, 20% ont acheté en plus la coque.
Parmi les acheteurs qui n'ont pas souscrit à l'assurance complémentaire, deux sur trois n'ont pas acheté la coque.
On interroge au hasard un client de ce magasin ayant acheté un smartphone de la marque Pomme.
On considère les évènements suivants :
• A : « le client a souscrit à l'assurance complémentaire » ;
• C : « le client a acheté la coque ».

Partie A

1. Construire un arbre pondéré traduisant la situation.
2. Calculer la probabilité que le client ait souscrit à l'assurance complémentaire et ait acheté la coque.
3. Montrer que $P(C)=0,28$.
4. Le client interrogé a acheté la coque. Quelle est la probabilité qu'il n'ait pas souscrit à l'assurance complémentaire ? Vous arrondirez votre résultat à 10^{-3} près.
5. Les évènements A et C sont-ils indépendants ?

Partie B

On note X la variable aléatoire qui compte la dépense en euros d'un client de ce magasin ayant acheté un smartphone de la marque Pomme.
1. Donner les valeurs prisent par X .
2. Donner la loi de probabilité de X .
3. Calculer l'espérance de X . Interpréter votre résultat dans le contexte de l'exercice.
4. Calculer la variance et l'écart-type de X . Vous arrondirez l'écart-type à 10^{-2} près.

Exercice 2

On désigne par n un entier naturel supérieur à 2.
Une urne contient 8 boules blanches et n boules noires. Les boules sont indiscernables. Un joueur tire sans remise deux boules de l'urne. Il examine leur couleur.
Pour chaque boule blanche tirée, il gagne 5€ et pour chaque boule noire tirée, il perd 10€.
On note G la variable aléatoire qui donne le gain algébrique du joueur sur un tirage.
1. Représenter cette situation par un arbre pondéré.
2. Déterminer l'ensemble des valeurs prises par G .
3. Déterminer la loi de probabilité de G .
4. Déterminer, en fonction de n , l'espérance de G .
5. Existe-t-il une valeur de n telle que le jeu soit équitable ?

Thème 4 : Suites

Exercice 1

Déterminer si les suites (u_n) et (v_n) suivantes sont arithmétiques. Si oui, préciser leur raison.

1. La suite (u_n) est définie pour tout entier $n \geqslant 0$ par $u_n = 7 - 6n$.

2. La suite (v_n) est définie pour tout entier $n \geqslant 0$ par $v_n = n^2 - n$.

Exercice 2

Une retenue d'eau artificielle est alimentée par un ruisseau dont le débit diminue de 20% d'un jour sur l'autre à cause de la sécheresse. Pour la journée du 1er juin, son débit D_0 est égal à $300\,m^3$.

Pour n entier, on note D_n le débit pour le n-ième jour après le 1er juin, en m^3 .

1. Calculer le débit D_1 pour le 2 juin.

2. Quelle est la nature de la suite (D_n) ? En déduire l'expression de D_n en fonction de n .

3. Calculer le volume d'eau apporté dans la retenue au cours des 30 jours du mois de juin. On arrondira le résultat au mètre cube.

Exercice 3

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 10$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2u_n - 1$.

Soit (v_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = u_n - 1$.

1. Calculer les trois premiers termes des deux suites.

2. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique. Exprimer alors (v_n) en fonction de n .

3. Démontrer que pour tout entier n on a : $u_n = 9 \times 2^n + 1$.

4. Déterminer le sens de variation de (u_n) .