

Devoir vacances été

Thème 1 : Équations et inéquations

Exercice 1

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $5x - 2(x - 4) = 7$.

$$5x - 2(x - 4) = 7 \Leftrightarrow 5x - 2x + 8 = 7 \Leftrightarrow 3x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{3}.$$

2. $25x^2 - 30x + 9 = 0$.

$$25x^2 - 30x + 9 = 0 \Leftrightarrow (5x)^2 - 2 \times 5x \times 3 + 3^2 = 0 \Leftrightarrow (5x - 3)^2 = 0 \Leftrightarrow 5x - 3 = 0 \Leftrightarrow 5x = 3 \Leftrightarrow x = \frac{3}{5}.$$

Remarque

Il était nécessaire ici de penser à une identité remarquable qui n'était pas évidente. Lorsque l'on fait face à un blocage, il faut essayer de se ramener à des méthodes que l'on connaît.

Nous verrons dans l'année comment résoudre ce type d'équation de manière générale.

3. $5x - \frac{x+1}{2} = 1$.

$$5x - \frac{x+1}{2} = 1 \Leftrightarrow \frac{10}{2}x - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} = 1 \Leftrightarrow \frac{9}{2}x = \frac{3}{2} \Leftrightarrow x = \frac{3}{2} \times \frac{2}{9} \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}.$$

4. $(4x - 8)^2 = 36$.

$$(4x - 8)^2 = 36 \Leftrightarrow 4x - 8 = 6 \text{ ou } 4x - 8 = -6 \Leftrightarrow 4x = 14 \text{ ou } 4x = 2 \Leftrightarrow x = \frac{7}{2} \text{ ou } \frac{1}{2}.$$

Exercice 2

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

1. $-2x + 5 \leq x + 16$.

$$-2x + 5 \leq x + 16 \Leftrightarrow -3x \leq 11 \Leftrightarrow x \geq -\frac{11}{3}. \text{ Ainsi } S = \left[-\frac{11}{3}; +\infty\right[.$$

2. $\frac{x-1}{5} + \frac{1}{3} > \frac{2x-1}{15} + \frac{1}{3}$.

$$\frac{x-1}{5} + \frac{1}{3} > \frac{2x-1}{15} + \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{1}{5}x - \frac{1}{5} > \frac{2}{15}x - \frac{1}{15} \Leftrightarrow \frac{3}{15}x - \frac{2}{15}x > \frac{3}{15} - \frac{1}{15} \Leftrightarrow \frac{1}{15}x > \frac{2}{15} \Leftrightarrow x > 2.$$

Ainsi $S =]2; +\infty[$.

Remarque

On peut aussi considérablement réduire les calculs en évitant de passer par des fractions. Il suffit pour cela de multiplier le tout par 15.

$$\begin{aligned} \frac{x-1}{5} + \frac{1}{3} > \frac{2x-1}{15} + \frac{1}{3} &\Leftrightarrow \frac{x-1}{5} > \frac{2x-1}{15} \\ &\Leftrightarrow \frac{15(x-1)}{5} > 2x-1 \\ &\Leftrightarrow 3(x-1) > 2x-1 \\ &\Leftrightarrow 3x-3 > 2x-1 \\ &\Leftrightarrow x > 2 \end{aligned}$$

$$3. (2x-1)^2 - (2x-1)(5x+3) \leq 0.$$

$$\begin{aligned} (2x-1)^2 - (2x-1)(5x+3) &\leq 0 \Leftrightarrow (2x-1)(2x-1) - (2x-1)(5x+3) \leq 0 \\ &\Leftrightarrow (2x-1)(2x-1-(5x+3)) \leq 0 \\ &\Leftrightarrow (2x-1)(2x-1-5x-3) \leq 0 \\ &\Leftrightarrow (2x-1)(-3x-4) \leq 0 \end{aligned}$$

Pour résoudre une telle inéquation, il faut étudier le signe de chacune des parenthèses (ce qui revient à étudier le signe de fonctions affines) puis effectuer le produit des deux.

$$\text{On a } 2x-1=0 \Leftrightarrow 2x=1 \Leftrightarrow x=\frac{1}{2} \text{ et } -3x-4=0 \Leftrightarrow -3x=4 \Leftrightarrow x=-\frac{4}{3}.$$

On obtient alors le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$	$-\frac{4}{3}$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$	
$2x-1$	$-$	$-$	0	$+$	
$-3x-4$	$+$	0	$-$	$-$	
$(2x-1)(-3x-4)$	$-$	0	$+$	0	$-$

$$\text{Ainsi } S = \left] -\infty; -\frac{4}{3} \right] \cup \left[\frac{1}{2}; +\infty \right[.$$

$$4. \left(3 - \frac{x}{4}\right) \left(5 + \frac{x}{3}\right) > 0.$$

$$\text{On a } 3 - \frac{x}{4} = 0 \Leftrightarrow -\frac{x}{4} = -3 \Leftrightarrow x = 12 \text{ et } 5 + \frac{x}{3} = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{3} = -5 \Leftrightarrow x = -15.$$

On obtient alors le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$	-15	12	$+\infty$
$3-\frac{x}{4}$	+		0	-
$5+\frac{x}{3}$	-	0	+	+
$\left(3-\frac{x}{4}\right)\left(5+\frac{x}{3}\right)$	-	0	+	-

$$\text{Ainsi } S =]-15; 12[.$$

Exercice 3

Résoudre l'équation et l'inéquation suivantes. Vous penserez à préciser les valeurs interdites.

$$1. \frac{x-2}{2x+1} = \frac{1}{2}.$$

Cette équation n'a de sens que si le dénominateur ne s'annule pas.

Or $2x+1=0 \Leftrightarrow 2x=-1 \Leftrightarrow x=-\frac{1}{2}$. Donc cette équation est impossible si $x=-\frac{1}{2}$ (c'est donc une valeur interdite).

Pour résoudre ensuite cette équation, on va multiplier de chaque côté par les dénominateurs, c'est-à-dire par $2x+1$ et par 2.

$$\frac{x-2}{2x+1} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2(x-2) = 2x+1 \Leftrightarrow 2x-4 = 2x+1 \Leftrightarrow 0=5.$$

La solution est absurde. Cela signifie que cette équation n'admet aucune solution. Ainsi $S = \emptyset$.

2. $\frac{1+x}{1-x} \geq 1$.

Cette inéquation n'a de sens que si le dénominateur est non nul.

Or $1-x=0 \Leftrightarrow x=1$. Donc cette inéquation n'existe pas si $x=1$ (c'est donc une valeur interdite).

Pour résoudre cette inéquation, on va tout mettre sous le même dénominateur et regrouper tous les membres d'un seul côté.

$$\begin{aligned} \frac{1+x}{1-x} \geq 1 &\Leftrightarrow \frac{1+x}{1-x} \geq \frac{1-x}{1-x} \\ &\Leftrightarrow \frac{1+x}{1-x} - \frac{1-x}{1-x} \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{1+x-(1-x)}{1-x} \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{1+x-1+x}{1-x} \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{2x}{1-x} \geq 0 \end{aligned}$$

On s'est ramené à une inéquation quotient. Pour la résoudre, on va étudier le signe de chacun des membres de gauche et effectuer le quotient en faisant attention à la valeur interdite.

On obtient le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$2x$	-	0	+	+
$1-x$	+	+	0	-
$\frac{2x}{1-x}$	-	0	+	-

Ainsi $S = [0; 1[$.

Remarque

On aurait pu penser à multiplier par le dénominateur $1-x$ de chaque côté comme cela a été fait dans l'équation de la question précédente. Seulement, lorsque l'on multiplie par un nombre dans une inéquation, il faut vérifier son signe. Or celui-ci dépend de x , ce qui rend l'étude plus compliquée.

Thème 2 : Géométrie

Exercice 1

Dans le plan muni d'un repère orthonormal, on considère les points $A(-4;3)$, $B\left(\frac{22}{3};5\right)$ et $C(2;7)$.

1. Tracer la droite d d'équation $y = -x + 4$.

Pour tracer une droite, deux méthodes sont possibles.

1^{ère} méthode : on détermine deux points en choisissant deux valeurs de x différentes.

On choisit $x=0$. Alors $y = -0 + 4 = 4$. On obtient le point de coordonnées $(0;4)$.

On choisit $x=1$. Alors $y = -1 + 4 = 3$. On obtient le point de coordonnées $(1;3)$.

On place ensuite ces deux points et on trace la droite.

2^e méthode : on utilise l'ordonnée à l'origine et le coefficient directeur.

L'ordonnée à l'origine est 4, ce qui signifie qu'on peut placer le point de coordonnées $(0;4)$.

Ensuite, on applique le coefficient directeur. On part du point de coordonnées $(0;4)$, on se décale d'un vers le bas puis d'un vers la gauche. On obtient un autre point. Il suffit alors de tracer la droite.

2. Déterminer l'équation réduite de la droite (AC) .

On a $x_A \neq x_C$, donc la droite (AC) n'est pas verticale.

On a $y_A \neq y_C$, donc la droite (AC) n'est pas horizontale.

L'équation réduite de la droite (AC) est donc de la forme $y = mx + p$.

On a $m = \frac{y_C - y_A}{x_C - x_A} = \frac{7-3}{2-(-4)} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$. D'où $(AC): y = \frac{2}{3}x + p$.

Comme le point A appartient à la droite (AC) , ses coordonnées vérifient l'équation de la droite (AC) .

$$y_A = \frac{2}{3}x_A + p \Leftrightarrow 3 = \frac{2}{3} \times (-4) + p \Leftrightarrow 3 = -\frac{8}{3} + p \Leftrightarrow \frac{9}{3} + \frac{8}{3} = p \Leftrightarrow p = \frac{17}{3}.$$

Ainsi $(AC): y = \frac{2}{3}x + \frac{17}{3}$.

Remarque

L'étape $y_A \neq y_C$ n'est pas obligatoire.

3. Justifier que les droites d et (AC) sont sécantes et déterminer les coordonnées de leur point d'intersection I .

Les droites d et (AC) n'ont pas le même coefficient directeur, donc elles ne sont pas parallèles.

Or deux droites non parallèles dans le plan sont nécessairement sécantes.

Soit $I(x_I; y_I)$. Pour trouver l'abscisse du point I , on résout l'équation $-x + 4 = \frac{2}{3}x + \frac{17}{3}$.

$$-x + 4 = \frac{2}{3}x + \frac{17}{3} \Leftrightarrow -\frac{3}{3}x - \frac{2}{3}x = \frac{17}{3} - \frac{12}{3} \Leftrightarrow -\frac{5}{3}x = \frac{5}{3} \Leftrightarrow x = \frac{5}{3} \times \left(-\frac{3}{5}\right) = -1.$$

Pour trouver l'ordonnée du point I , il suffit de remplacer la valeur de x trouvée dans l'une des deux équations. Choisissons celle de la droite d . On a $y = -(-1) + 4 = 1 + 4 = 5$. Ainsi $I(-1;5)$.

4. Montrer que I est le milieu de $[AC]$.

Soit $K(x_K; y_K)$ le milieu de $[AC]$.

On a $x_K = \frac{x_A + x_C}{2} = \frac{-4 + 2}{2} = -\frac{2}{2} = -1$ et $y_K = \frac{y_A + y_C}{2} = \frac{3 + 7}{2} = \frac{10}{2} = 5$. Donc $K(-1;5)$.

Or le point I a les mêmes coordonnées que le point K . Ainsi I est bien le milieu de $[AC]$.

5. Déterminer les coordonnées de E , point d'intersection de d avec l'axe des abscisses.

Le point E étant à l'intersection entre d et l'axe des abscisses, il possède nécessairement une ordonnée nulle et donc $E(x_E; 0)$. Pour trouver son abscisse, il suffit alors de résoudre une équation.
 $-x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = 4$. Ainsi $E(4; 0)$.

6. Montrer que $AEBC$ est un trapèze.

Un trapèze est un quadrilatère qui possède deux cotés opposés parallèles. Donc soit les droites (AE) et (BC) sont parallèles, soit ce sont les droites (AC) et (BE) .

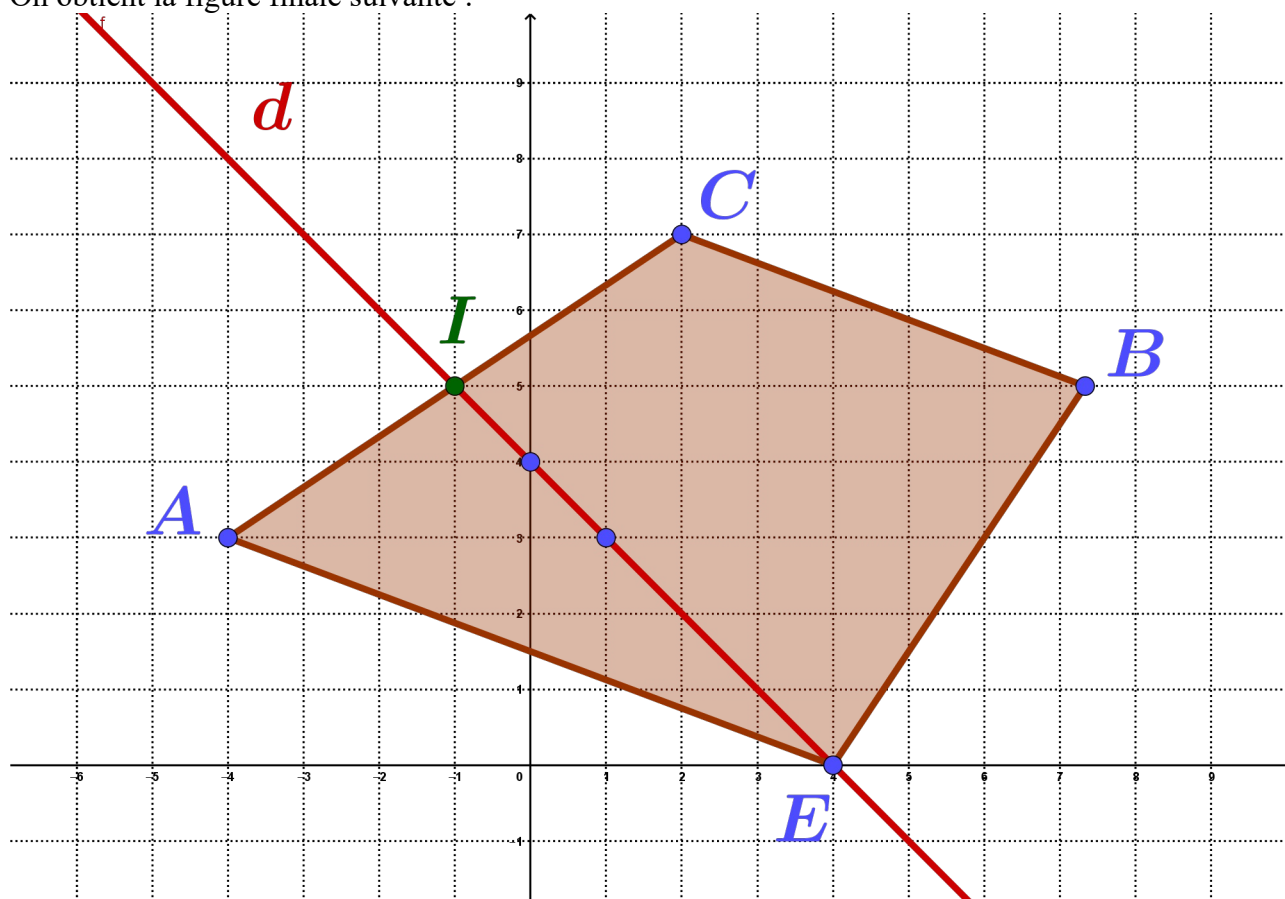
D'après la figure, les droites (AE) et (BC) semblent parallèles. Vérifions-le.

La droite (AE) a comme coefficient directeur : $\frac{y_E - y_A}{x_E - x_A} = \frac{0 - 3}{4 - (-4)} = -\frac{3}{8}$.

La droite (BC) a comme coefficient directeur : $\frac{y_C - y_B}{x_C - x_B} = \frac{7 - 5}{2 - \frac{22}{3}} = \frac{2}{-\frac{16}{3}} = 2 \times \left(-\frac{3}{16}\right) = -\frac{3}{8}$.

Ces droites ayant le même coefficient directeur, elles sont parallèles. Ainsi $AEBC$ est un trapèze.

On obtient la figure finale suivante :



Exercice 2

Le plan étant muni d'un repère orthonormé, on considère les points $A(-3;1)$, $B(1;-1)$, $C(3;3)$ et I milieu du segment $[AC]$.

1. Donner les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BC}$.

On a $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BC} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$.

2. Soit $E(a;2)$. Déterminer a tel que A , B et E soient alignés.

Les points A , B et E sont alignés si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AE}$ sont colinéaires.

On a $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AE} \begin{pmatrix} a+3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AE}$ colinéaires $\Leftrightarrow \det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AE}) = 0 \Leftrightarrow 4 \times 1 - (-2)(a+3) = 0 \Leftrightarrow 4 + 2a + 6 = 0 \Leftrightarrow a = -5$
Ainsi, les points A , B et E sont alignés si et seulement si $a = -5$.

3. Quelle est la nature du triangle ABC ?

Le triangle ABC semble isocèle rectangle en B .

On a $AB = \sqrt{4^2 + (-2)^2} = \sqrt{16 + 4} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$ et $BC = \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{4 + 16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$.

Comme $AB = BC$, le triangle ABC est isocèle en B .

De plus, on a $AC = \sqrt{6^2 + 2^2} = \sqrt{36 + 4} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$.

D'où $AC^2 = (\sqrt{40})^2 = 40$ et $AB^2 + BC^2 = (\sqrt{20})^2 + (\sqrt{20})^2 = 20 + 20 = 40$.

Alors $AC^2 = AB^2 + BC^2$. D'après le théorème de Pythagore, le triangle ABC est rectangle en B .

Ainsi, le triangle ABC est rectangle isocèle en B .

4. a. Déterminer les coordonnées du point D image de A par la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$.

D étant l'image du point A par la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$, alors $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$.

Soit $D(x_D; y_D)$. On a $\overrightarrow{AD} \begin{pmatrix} x_D + 3 \\ y_D - 1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BC} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$. Alors $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D + 3 = 2 \\ y_D - 1 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D = -1 \\ y_D = 5 \end{cases}$.

Ainsi $D(-1;5)$.

b. Quelle est la nature du quadrilatère $ABCD$?

Comme $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$, le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme.

5. Déterminer les coordonnées du point J , symétrique de A par rapport à B .

Si J est le symétrique de A par rapport à B , cela signifie que B est le milieu du segment $[AJ]$.

Soit $J(x_J; y_J)$. Alors :

$$x_B = \frac{x_A + x_J}{2} \Leftrightarrow 1 = \frac{-3 + x_J}{2} \Leftrightarrow 2 = -3 + x_J \Leftrightarrow x_J = 5.$$

$$y_B = \frac{y_A + y_J}{2} \Leftrightarrow -1 = \frac{1 + y_J}{2} \Leftrightarrow -2 = 1 + y_J \Leftrightarrow y_J = -3.$$

Ainsi, on a $J(5;-3)$.

6. Déterminer les coordonnées du point F appartenant à l'axe des abscisses tel que A , B et F soient alignés.

Le point F appartient à l'axe des abscisses, donc son ordonnée est nulle. On a alors $F(x_F; 0)$.

Les points A , B et F sont alignés si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AF}$ sont colinéaires.

On a $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AF} \begin{pmatrix} x_F + 3 \\ -1 \end{pmatrix}$.

$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AF}$ colinéaires $\Leftrightarrow \det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AF}) = 0 \Leftrightarrow 4 \times (-1) - (-2)(x_F + 3) = 0 \Leftrightarrow -4 + 2x_F + 6 = 0 \Leftrightarrow 2x_F + 2 = 0 \Leftrightarrow x_F = -1$.

Ainsi, les points A , B et F sont alignés si et seulement si $x_F = -1$.

7. Déterminer les coordonnées du point G appartenant à l'axe des ordonnées tel que les droites (BG) et (AI) soient parallèles.

Le point G appartient à l'axe des ordonnées, donc son abscisse est nulle. On a alors $G(0; y_G)$.

Les droites (BG) et (AI) sont parallèles si et seulement si $\overrightarrow{BG}$ et $\overrightarrow{AI}$ sont colinéaires.

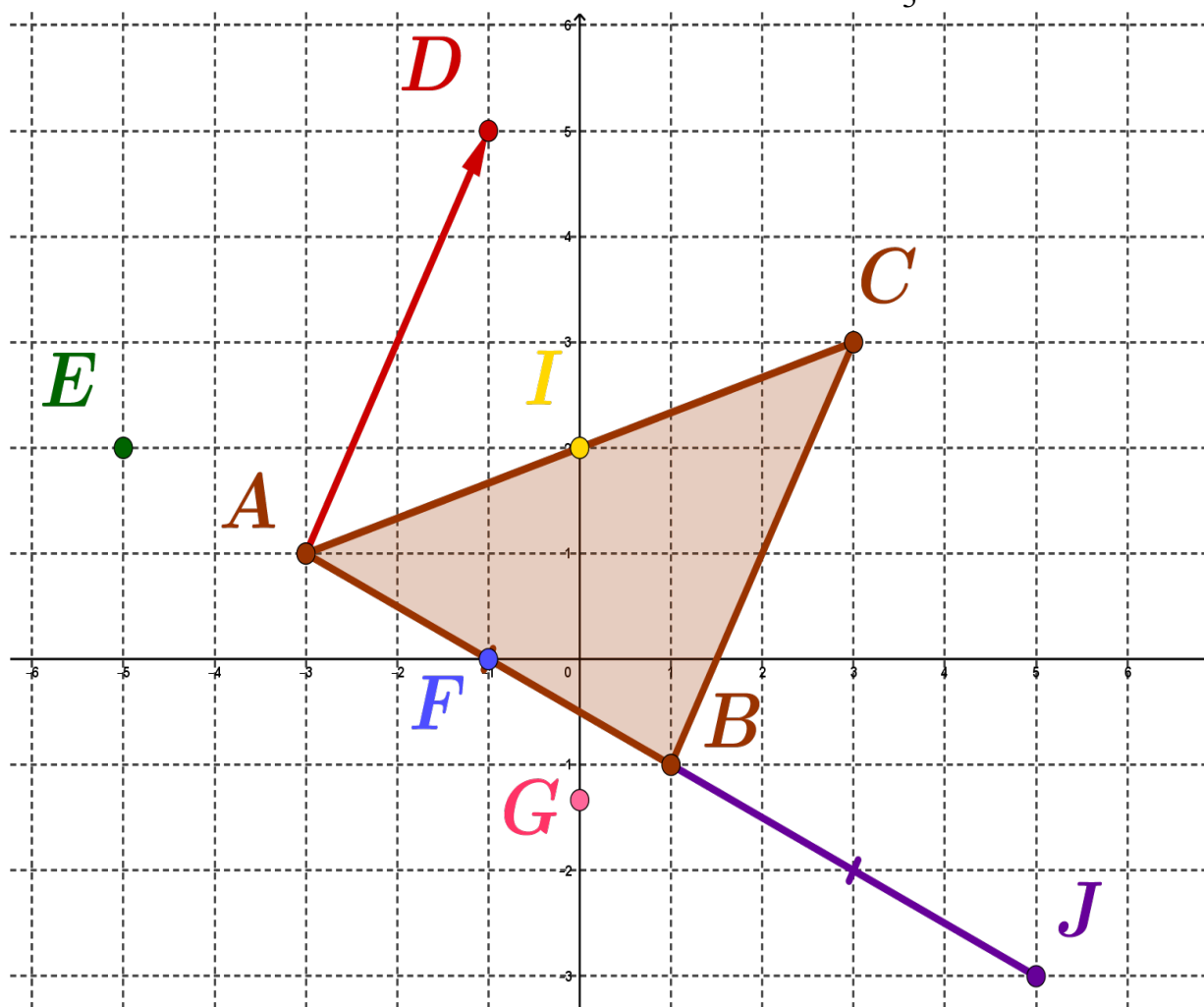
I est le milieu du segment $[AC]$, donc $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AC}$. Or $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}$, donc $\overrightarrow{AI} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Le point G appartient à l'axe des ordonnées, donc son abscisse est nulle. On a alors $G(0; y_G)$.

(BG) et (AI) sont parallèles si et seulement si $\overrightarrow{BG}$ et $\overrightarrow{AI}$ sont colinéaires. Or $\overrightarrow{BG} \begin{pmatrix} -1 \\ y_G + 1 \end{pmatrix}$.

$$\overrightarrow{\text{BG}} \text{ et } \overrightarrow{\text{AI}} \text{ colinéaires} \Leftrightarrow \det(\overrightarrow{\text{BG}}, \overrightarrow{\text{AI}}) = 0 \Leftrightarrow (-1) \times 1 - 3(y_G + 1) = 0 \Leftrightarrow -3y_G - 4 = 0 \Leftrightarrow y_G = -\frac{4}{3}.$$

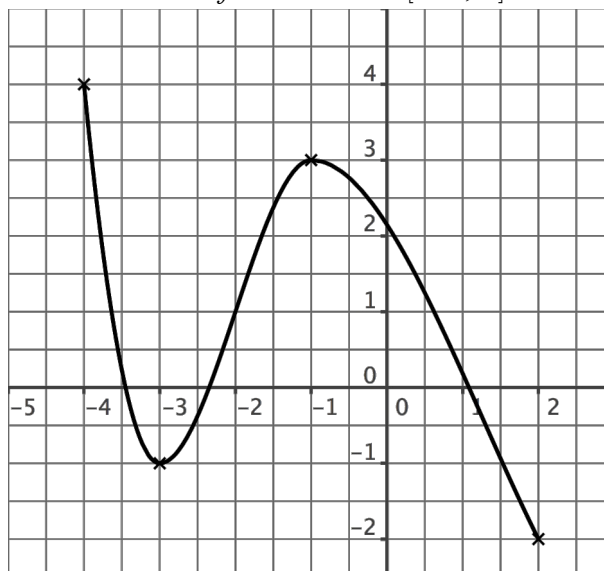
Ainsi, les droites (BG) et (AI) sont parallèles si et seulement si $y_G = -\frac{4}{3}$.



Thème 3 : Fonctions

Exercice 1

Voici la courbe représentative d'une fonction f définie sur $[-4; 2]$.



1. Quelle est l'image de -1 par f ?

L'image de -1 par la fonction f est 3.

2. Quelle est l'image de -2 par f ?

L'image de -2 par la fonction f est 1.

3. Quelle est l'image de 0 par f ?

L'image de 0 par la fonction f est environ 2,2 (il est impossible ici de connaître la valeur exacte).

4. Par f , quels sont les antécédents de 4 ?

L'antécédent de 4 par la fonction f est -4 .

5. Par f , quels sont les antécédents de -1 ?

Les antécédents de -1 par la fonction f sont -3 et $1,5$.

6. Par f , quels sont les antécédents de 0 ?

Les antécédents de 0 par la fonction f sont environ $-3,5$, environ $-2,4$ et environ $1,1$.

7. Résolvez les équations suivantes :

a. $f(x) = -1$. $f(x) = -1 \Leftrightarrow x = -3$ ou $x = 1,5$. Ainsi $S = \{-3; 1,5\}$.

b. $f(x) = -2$. $f(x) = -2 \Leftrightarrow x = 2$. Ainsi $S = \{2\}$.

8. Résolvez les inéquations suivantes :

a. $f(x) \geq -1$.

Pour résoudre cette inéquation, on trace la droite d'équation $y = -1$. On identifie les abscisses des points d'intersection et on prend la partie de courbe qui se situe au-dessus ou au niveau de la droite d'équation $y = -1$. Enfin, on lit l'ensemble solution sur l'axe des abscisses.

$f(x) \geq -1 \Leftrightarrow x \in [-4; 1,5]$. Ainsi $S = [-4; 1,5]$.

b. $f(x) > -1$. $f(x) > -1 \Leftrightarrow x \in [-4; -3[\cup]-3; 1,5[$. Ainsi $S = [-4; -3[\cup]-3; 1,5[$.

Remarque

Les deux inéquations sont presque identiques. Cependant, la deuxième comporte un « supérieur strict » et non un « supérieur ou égal ». La démarche pour trouver l'ensemble solution est la même mais dans le deuxième cas, on ne prend pas les abscisses des points d'intersection.

Exercice 2

Soit f la fonction homographique définie par $f(x) = \frac{2x-4}{x-3}$.

1. Donner l'ensemble de définition de la fonction f .

L'ensemble de définition d'une fonction correspond à l'ensemble des valeurs de x que peut prendre la fonction. Autrement dit, les valeurs de x tel que $f(x)$ existe.

Ici, la fonction est un quotient. Or un quotient n'existe que si le dénominateur est non nul.

Il suffit alors de résoudre l'équation $x-3=0$ pour trouver les éventuelles valeurs interdites.

On a $x-3=0 \Leftrightarrow x=3$. Donc 3 est une valeur interdite. Ainsi $D_f = \mathbb{R} \setminus \{3\}$.

2. Compléter le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$	2	3	$+\infty$
$2x-4$	-	0	+	+
$x-3$	-	-	0	+
$f(x)$	+	0	-	+

En déduire les solutions de l'inéquation $f(x) \geq 0$.

Ainsi $f(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty; 2] \cup [3; +\infty[$.

3. Selon le même principe, donner l'ensemble de définition de la fonction g définie par

$g(x) = \frac{-x+2}{x+3}$ et résoudre à l'aide d'un tableau de signes $g(x) < 0$.

La fonction g n'est définie que si son dénominateur est non nul.

Or $x+3=0 \Leftrightarrow x=-3$. Donc -3 est une valeur interdite. Ainsi $D_g = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$.

On obtient alors le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$	-3	2	$+\infty$
$-x+2$	$+$	$+$	0	$-$
$x+3$	$-$	0	$+$	$+$
$g(x)$	$-$	$ $	0	$-$

Ainsi $g(x) < 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty; -3[\cup]2; +\infty[$.

Exercice 3

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 4 - (x-1)^2$.

1. Développer et réduire $f(x)$.

On a $f(x) = 4 - (x^2 - 2x + 1) = 4 - x^2 + 2x - 1 = -x^2 + 2x + 3$.

2. Factoriser $f(x)$.

Pour factoriser $f(x)$, on utilise l'identité remarquable $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ où $a=4$ et $b=x-1$.

On a $f(x) = 2^2 - (x-1)^2 = (2+x-1)(2-(x-1)) = (x+1)(2-x+1) = (x+1)(3-x)$.

3. Calculer les images de $\sqrt{3}$ et $\frac{1}{3}$ par f .

$$f(\sqrt{3}) = (-\sqrt{3})^2 + 2\sqrt{3} + 3 = 3 + 2\sqrt{3} + 3 = 6 + 2\sqrt{3}.$$

$$f\left(\frac{1}{3}\right) = 4 - \left(\frac{1}{3} - 1\right)^2 = 4 - \left(\frac{1}{3} - \frac{3}{3}\right)^2 = 4 - \left(-\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{36}{9} - \frac{4}{9} = \frac{32}{9}.$$

4. Déterminer les antécédents de 0 par f .

Déterminer les antécédents de 0 par f revient à chercher les valeurs de x tel que $f(x) = 0$.

Pour résoudre cette équation, il est préférable d'utiliser la forme factorisée de f pour se ramener à une équation produit nul.

$f(x) = 0 \Leftrightarrow (x+1)(3-x) = 0 \Leftrightarrow x+1=0$ ou $3-x=0 \Leftrightarrow x=-1$ ou $x=3$. Ainsi $S = \{-1; 3\}$.

5. Résoudre l'équation $f(x)=3$.

Pour résoudre cette équation, il est préférable d'utiliser la forme développée de f car les 3 vont se simplifier.

$$\begin{aligned}f(x)=3 &\Leftrightarrow -x^2+2x+3=3 \\&\Leftrightarrow -x^2+2x=0 \\&\Leftrightarrow x(-x+2)=0 \\&\Leftrightarrow x=0 \text{ ou } -x+2=0 \\&\Leftrightarrow x=0 \text{ ou } x=2\end{aligned}$$

Ainsi $S=\{0;2\}$.

Remarque

Il était aussi possible d'utiliser la forme donnée dans l'énoncé (la forme canonique). Pour résoudre l'équation, on utilise la même identité remarquable qu'à la question 2.

$$\begin{aligned}f(x)=3 &\Leftrightarrow 4-(x-1)^2=3 \\&\Leftrightarrow 1-(x-1)^2=0 \\&\Leftrightarrow 1^2-(x-1)^2=0 \\&\Leftrightarrow (1+x-1)(1-(x-1))=0 \\&\Leftrightarrow x(1-x+1)=0 \\&\Leftrightarrow x(2-x)=0 \\&\Leftrightarrow x=0 \text{ ou } 2-x=0 \\&\Leftrightarrow x=0 \text{ ou } x=2\end{aligned}$$

Thème 4 : Probabilités

Exercice 1

Dans un groupe de 20 personnes, 10 personnes s'intéressent à la pêche, 8 à la lecture et 3 à la fois à la pêche et à la lecture. On choisit au hasard une personne du groupe.

1. Calculer la probabilité qu'elle s'intéresse à la pêche ou à la lecture.

On note les événements suivants :

P : « La personne s'intéresse à la pêche » et L : « La personne s'intéresse à la lecture ».

$$\text{On a } P(P \cup L) = P(P) + P(L) - P(P \cap L) = \frac{10}{20} + \frac{8}{20} - \frac{3}{20} = \frac{15}{20} = \frac{3}{4}.$$

Ainsi 75% des personnes s'intéressent à la pêche et à la lecture.

2. Calculer la probabilité qu'elle ne s'intéresse ni à la pêche, ni à la lecture.

$$P(\bar{P} \cap \bar{L}) = 1 - P(P \cup L) = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}.$$

Ainsi 25% des personnes ne s'intéressent ni à la pêche ni à la lecture.

Remarque

On peut représenter la situation à l'aide du diagramme de Venn suivant :

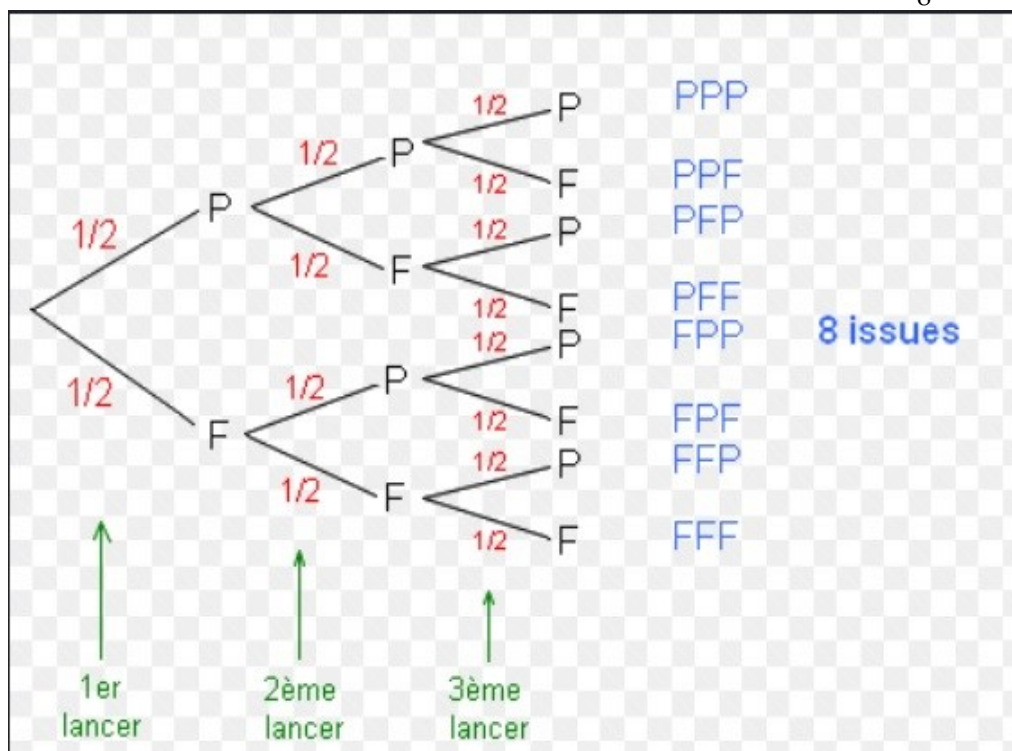
Exercice 2

On lance trois fois de suite une pièce de monnaie usuelle présentant deux côtés : pile ou face. On obtient ainsi une suite « ordonnée » de trois résultats (par exemple « pile, pile, face » sera noté (P; P; F)).

1. Écrire tous les résultats possibles de cette épreuve aléatoire (on pourra utiliser un arbre).

On a $\Omega = \{(P; P; P); (P; P; F); (P; F; P); (P; F; F); (F; P; P); (F; P; F); (F; F; P); (F; F; F)\}$.

C'est une situation d'équiprobabilité. Chaque issue possible a une probabilité de $\frac{1}{8}$.



2. Calculer la probabilité de l'événement A : « Les trois résultats sont identiques ».

$$\text{On a } P(A) = P(((F; F; F))) + P(((P; P; P))) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}.$$

3. Calculer la probabilité de l'événement B : « La suite des trois résultats commence par pile ».

$$\text{On a } P(B) = P(((P; P; P))) + P(((P; P; F))) + P(((P; F; P))) + P(((P; F; F))) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}.$$

4. Calculer la probabilité de l'événement $A \cap B$. En déduire celle de l'événement $A \cup B$.

$$\text{On a } P(A \cap B) = P(((P; P; P))) = \frac{1}{8}. \text{ Ainsi } P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} = \frac{3}{8}.$$

Exercice 3

Une boîte contient beaucoup de billes unicolores, rouges, vertes ou bleues. On prend une poignée de trois billes.

On s'intéresse aux événements :

A : « Deux billes au moins sont vertes ».

B : « Les trois billes sont de la même couleur ».

C : « Il y a au moins une bille rouge ».

D : « Aucune bille n'est rouge ».

E : « Le tirage est tricolore ».

Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier.

1. Les événements A et B sont incompatibles.

Deux événements sont incompatibles (ou disjoints) s'ils n'ont aucun élément en commun. Or l'événement « les trois billes sont vertes » est un événement élémentaire à A et à B . Donc les événements A et B ne sont pas incompatibles.

2. Les événements B et E sont contraires.

L'événement contraire de B est $\bar{B}$: « Au moins deux billes sont de couleurs différentes ». Donc les événements B et E ne sont pas contraires (l'événement contraire de E est $\bar{E}$: « Au moins deux billes sont de même couleur »).

Attention!

Le contraire de « les trois billes sont de la même couleur » n'est pas « chaque bille a une couleur différente ».

3. Les événements A et C sont incompatibles.

L'événement « Deux billes sont vertes et une est rouge » est un événement élémentaire à A et à C . Donc les événements A et C ne sont pas incompatibles.

4. Les événements C et D sont contraires.

Le contraire de « au moins » est « aucun ». Donc les événements C et D sont bien contraires.

5. Les événements A et E sont disjoints.

Dès l'instant où deux billes au moins sont vertes, le tirage ne peut être tricolore. Donc les événements A et E n'ayant pas d'élément en commun, ils sont disjoints (ou incompatibles).