Devoir vacances été

Thème 1 : Second degré

Exercice 1

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et les inéquations suivantes :

1. $x^2+2x-3=0$.

On remarque que 1 est une solution évidente car $1^2+2\times1-3=1+2-3=0$.

On peut donc factoriser le polynôme par $(x-1)$ et on obtient : $x^2+2x-3=(x-1)(x+3)$.

Ainsi, $x^2+2x-3=0 \Leftrightarrow (x-1)(x+3)=0 \Leftrightarrow x=1$ ou $x=-3$.

Remarque

Si on ne trouve pas de solutions évidentes pour une équation, on utilise la méthode générale.

On a $\Delta=b^2-4ac=2^2-4\times1\times(-3)=4+12=16$.

Comme $\Delta>0$, l'équation admet deux racines réelles distinctes :

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-2-\sqrt{16}}{2\times1}=\frac{-2-4}{2}=-\frac{6}{2}=-3 \text{ et } x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-2+\sqrt{16}}{2\times1}=\frac{-2+4}{2}=\frac{2}{2}=1$$

On retrouve les solutions $x=1$ et $x=-3$.

2. $2x^2+12x+18=0$.

On a $2x^2+12x+18=0 \Leftrightarrow 2(x^2+6x+9)=0 \Leftrightarrow x^2+6x+9=0 \Leftrightarrow (x+3)^2=0 \Leftrightarrow x=-3$.

Remarque

On peut résoudre directement l'équation de départ pour retrouver le même résultat.

$\Delta=12^2-4\times2\times18=0$. Comme $\Delta=0$, on retrouve $x_0=-\frac{12}{2\times2}=-\frac{12}{4}=-3$.

La première résolution a pour avantage de simplifier les calculs.

3. $x^3-8x^2+12x=0$.

On a
$$\begin{aligned} x^3-8x^2+12x=0 &\Leftrightarrow x(x^2-8x+12)=0\\ &\Leftrightarrow x=0 \text{ ou } x^2-8x+12=0\\ &\Leftrightarrow x=0 \text{ ou } (x-2)(x-6)=0\\ &\Leftrightarrow x=0 \text{ ou } x-2=0 \text{ ou } x-6=0\\ &\Leftrightarrow x=0 \text{ ou } x=2 \text{ ou } x=6 \end{aligned}$$

Remarque

Si on ne trouve pas les solutions d'une équation de tête rapidement, on utilise toujours Δ .

Ici, il reste à trouver les solutions de l'équation $x^2-8x+12=0$.

On a $\Delta=(-8)^2-4\times1\times12=64-48=16$.

Comme $\Delta>0$, l'équation $x^2-8x+12=0$ admet deux solutions réelles distinctes :

$$x_1=\frac{-(-8)-\sqrt{16}}{2\times1}=\frac{8-4}{2}=\frac{4}{2}=2 \text{ et } x_2=\frac{-(-8)+\sqrt{16}}{2\times1}=\frac{8+4}{2}=\frac{12}{2}=6$$

Ainsi, $x^3-8x^2+12x=0 \Leftrightarrow x=0$ ou $x=2$ ou $x=6$.

Exercice 2

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $3x^2+18x+27>0$.

On a $\Delta=18^2-4\times3\times27=324-324=0$.

Comme $\Delta=0$, l'équation $3x^2+18x+27=0$ admet une unique solution réelle :

$$x_0=-\frac{b}{2a}=-\frac{18}{2\times3}=-\frac{18}{6}=-3$$

On en déduit le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		-3		$+\infty$
$3x^2+18x+27$		$+$	0	$+$	

Ainsi, l'ensemble solution est $S=]-\infty;-3[\cup]-3;+\infty[$.

Remarque

On peut remarquer que $3x^2+18x+27>0 \Leftrightarrow 3(x^2+6x+9)>0 \Leftrightarrow x^2+6x+9>0$.

On retombe sur une équation du second degré (avec des coefficients plus simples) et l'on retrouve bien entendu le même ensemble solution après résolution.

2. $-2x^2-x+4\leqslant0$.

On a $\Delta=(-1)^2-4\times(-2)\times4=1+32=33$.

Comme $\Delta>0$, l'équation $-2x^2-x+4=0$ admet deux solutions réelles distinctes :

$$x_1=\frac{-(-1)-\sqrt{33}}{2\times(-2)}=\frac{1-\sqrt{33}}{-4}=\frac{-1+\sqrt{33}}{4} \text{ et } x_2=\frac{-(-1)+\sqrt{33}}{2\times(-2)}=\frac{1+\sqrt{33}}{-4}=-\frac{1+\sqrt{33}}{4}$$

On en déduit le tableau de signes suivant : (avec $x_2<x_1$)

x	$-\infty$		x_2		x_1		$+\infty$
$-2x^2-x+4$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Ainsi, l'ensemble solution est $S=\left]-\infty;-\frac{1+\sqrt{33}}{4}\right]\cup\left[\frac{-1+\sqrt{33}}{4};+\infty\right[$.

3. $x^2-x+1<0$.

On a $\Delta=(-1)^2-4\times1\times1=1-4=-3$.

Comme $\Delta<0$, l'équation $x^2-x+1=0$ n'admet aucune solution réelle.

On en déduit le tableau de signes suivant :

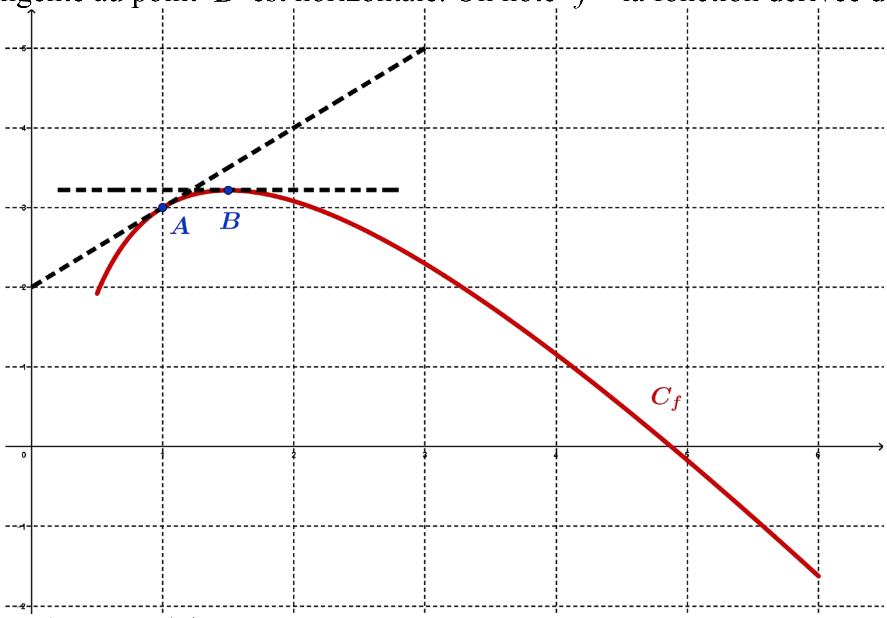
x	$-\infty$		$+\infty$
x^2-x+1		$+$	

Ainsi, l'ensemble solution est $S=\emptyset$.

Thème 2 : Fonctions

Exercice 1

La courbe C_f ci-dessous représente, dans un repère orthonormé, une fonction f définie et dérivable sur $[0,5;6]$. Les points $A(1;3)$ et B d'abscisse $1,5$ sont sur la courbe C_f.
Les tangentes à la courbe C_f aux points A et B sont aussi représentées en pointillés sur ce graphique, la tangente au point B est horizontale. On note f' la fonction dérivée de f.



1. Que vaut $f(1,5)$? Et $f(1)$? (On arrondira les résultats si besoin).
On a $f(1,5) \approx 3,2$ et $f(1)=3$.
2. Déterminer $f'(1,5)$.
On a $f'(1,5)=0$ (coefficient directeur de la tangente horizontale à C_f au point B).
3. En déduire l'équation réduite de la tangente à C_f au point d'abscisse $1,5$.
On a $T_{1,5}: y=f'(1,5)(x-1,5)+f(1,5)$. D'où $T_{1,5}: y=0(x-1,5)+3,2=3,2$.
4. La tangente à la courbe C_f passant par A passe par le point de coordonnées $(0;2)$.
Déterminer une équation de cette tangente.
Le coefficient directeur de la tangente à C_f en A est 1. De plus l'ordonnée à l'origine est 2.
Ainsi $T_1: y=x+2$.

Exercice 2

Dans chacun des cas, donner l'ensemble de définition de f, sa dérivée f' et l'ensemble de dérivabilité de f.
1. $f(x)=2x^2-5x+2$. La fonction f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que somme de telles fonctions sur $\mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x)=4x-5$.
2. $f(x)=\dfrac{1}{x^2+2}$. La fonction f est définie si et seulement si son dénominateur est non nul.
On a $x^2+2=0 \Leftrightarrow x^2=-2$. Cette équation n'admet aucune solution donc $D_f=\mathbb{R}$.
La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que quotient de telles fonctions sur $\mathbb{R}$.
Elle est de la forme $\dfrac{1}{v}$ avec : $v(x)=x^2+2$ et $v'(x)=2x$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x)=-\dfrac{2x}{(x^2+2)^2}$.

3. $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2-3}$. La fonction f est définie si et seulement son dénominateur est non nul.
On a $x^2-3=0 \Leftrightarrow x^2=3 \Leftrightarrow x=\sqrt{3}$ ou $x=-\sqrt{3}$. Donc $D_f=\mathbb{R}\setminus\{-\sqrt{3};\sqrt{3}\}$. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{-\sqrt{3};\sqrt{3}\}$ en tant que quotient de telles fonctions sur $\mathbb{R}\setminus\{-\sqrt{3};\sqrt{3}\}$.
Elle est de la forme $\dfrac{u}{v}$ avec : $u(x)=x+1$ et $u'(x)=1$

$v(x)=x^2-3$ et $v'(x)=2x$

Pour tout $x\in D_{f'}$, $f'(x)=\dfrac{x^2-3-2x(x+1)}{(x^2-3)^2}=\dfrac{x^2-3-2x^2-2x}{(x^2-3)^2}=\dfrac{-x^2-2x-3}{(x^2-3)^2}=-\dfrac{x^2+2x+3}{(x^2-3)^2}$.

Exercice 3

Dans chacun des cas, donner l'ensemble de définition, la dérivée et l'ensemble de dérivabilité de la fonction f . Vous donnerez ensuite ses variations.
1. $f(x)=x^2-2x-1$. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que polynôme.
Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f'(x)=2x-2=2(x-1)$.
$f'(x)\geqslant 0 \Leftrightarrow 2(x-1)\geqslant 0 \Leftrightarrow x-1\geqslant 0 \Leftrightarrow x\geqslant 1$.
On en déduit le tableau suivant :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
signe de f'		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	-2	$\nearrow$	

On a $f(1)=1^2-2\times 1-1=-2$.
2. $f(x)=-x^3+2x^2+4x$. La fonction f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que polynôme.
Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f'(x)=-3x^2+4x+4$. On a $\Delta=4^2-4\times(-3)\times 4=16+48=64$.
Comme $\Delta>0$, l'équation $f'(x)=0$ admet deux racines réelles distinctes :

$$x_1=\frac{-4-\sqrt{64}}{2\times(-3)}=\frac{-4-8}{-6}=\frac{-12}{-6}=2 \text{ et } x_2=\frac{-4+\sqrt{64}}{2\times(-3)}=\frac{-4+8}{-6}=\frac{4}{-6}=-\frac{2}{3}$$

On en déduit le tableau suivant :

x	$-\infty$		$-\frac{2}{3}$		2		$+\infty$
signe de f'		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	$-\frac{40}{27}$	$\nearrow$	8	$\searrow$	

On a $f(2)=-2^3+2\times 2^2+4\times 2=8$ et $f\left(-\dfrac{2}{3}\right)=-\left(-\dfrac{2}{3}\right)^3+2\times\left(-\dfrac{2}{3}\right)^2+4\times\left(-\dfrac{2}{3}\right)=-\dfrac{40}{27}$.

3. $f(x)=\dfrac{x^2+5x+5}{x^2+x+1}$. La fonction f est définie si et seulement si son dénominateur est non nul.
On étudie donc le polynôme x^2+x+1 .
$\Delta=1^2-4\times 1\times 1=1-4=-3$. Comme $\Delta<0$, ce polynôme n'admet aucune racine réelle et ne s'annule donc jamais. Donc la fonction est définie sr $\mathbb{R}$. De plus, elle est aussi dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que quotient de telles fonctions sur $\mathbb{R}$.

Elle est de la forme $\frac{u}{v}$ avec : $u(x)=x^2+5x+5$ et $u'(x)=2x+5$

$v(x)=x^2+x+1$ et $v'(x)=2x+1$

Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f'(x)=\frac{(2x+5)(x^2+x+1)-(x^2+5x+5)(2x+1)}{(x^2+x+1)^2}$

$=\frac{2x^3+7x^2+7x+5-2x^3-11x^2-15x-5}{(x^2+x+1)^2}$

$=\frac{-4x^2-8x}{(x^2+x+1)^2}$

$=\frac{-4x(x+2)}{(x^2+x+1)^2}$

Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $(x^2+x+1)^2>0$. Le signe de f' ne dépend que de celui du numérateur.
$-4x(x+2)=0 \Leftrightarrow -4x=0$ ou $x+2=0 \Leftrightarrow x=0$ ou $x=-2$.
On en déduit le tableau suivant :

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$-4x$		$+$		$+$	0	$-$	
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$	
signe de f'		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\searrow$	$-\frac{1}{3}$	$\nearrow$	5	$\searrow$	

On a $f(-2)=\frac{(-2)^2+5\times(-2)+5}{(-2)^2-2+1}=-\frac{1}{3}$ et $f(0)=\frac{0^2+5\times 0+5}{0^2+0+1}=5$.

Exercice 4

Simplifier les expressions données pour tout réel x :

1. $e^x\times e^{-2x}=e^{x-2x}=e^{-x}$.
2. $(e^x)^2\times(e^{-x})^3=e^{2x}\times e^{-3x}=e^{2x-3x}=e^{-x}$.
3. $e^{2x}\times e^{-2x}=e^{2x-2x}=e^0=1$.
4. $(e^{1-x})^2\times e^{2x}=e^{2(1-x)}\times e^{2x}=e^{2(1-x)+2x}=e^2$.
5. $\frac{e^{-3x+1}}{e^{2x}}=e^{-3x+1-2x}=e^{-5x+1}$.
6. $\frac{e^{x-2}\times e^{3x}}{e^{1-2x}}=\frac{e^{x-2+3x}}{e^{1-2x}}=e^{4x-2-(1-2x)}=e^{6x-3}$.

Exercice 5

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et les inéquations suivantes :

1. $e^{2x+1}=e^{\frac{5}{2}}$. $e^{2x+1}=e^{\frac{5}{2}} \Leftrightarrow 2x+1=\frac{5}{2} \Leftrightarrow 2x=\frac{3}{2} \Leftrightarrow x=\frac{3}{4}$.
2. $e^{2x+1}-1=0$. $e^{2x+1}-1=0 \Leftrightarrow e^{2x+1}=1 \Leftrightarrow e^{2x+1}=e^0 \Leftrightarrow 2x+1=0 \Leftrightarrow 2x=-1 \Leftrightarrow x=-\frac{1}{2}$.

3. $e^{x^2-5}=e^{-4x}$. $e^{x^2-5}=e^{-4x} \Leftrightarrow x^2-5=-4x \Leftrightarrow x^2+4x-5=0$.
On remarque que 1 est une solution évidente. Donc le polynôme se factorise par $x-1$.
On a $x^2+4x-5=(x-1)(x+5)$. Ainsi les solutions de l'équation sont -5 et 1.
4. $1\leqslant e^{3x}$. $1\leqslant e^{3x} \Leftrightarrow e^0\leqslant e^{3x} \Leftrightarrow 0\leqslant 3x \Leftrightarrow x\geqslant 0$.
5. $(e^x)^2\geqslant e^{-x-1}$. $(e^x)^2\geqslant e^{-x-1} \Leftrightarrow e^{2x}\geqslant e^{-x-1} \Leftrightarrow 2x\geqslant -x-1 \Leftrightarrow 3x>-1 \Leftrightarrow x>-\frac{1}{3}$.
6. $e^{x+3}\geqslant\frac{1}{e^x}$. $e^{x+3}\geqslant\frac{1}{e^x} \Leftrightarrow e^{x+3}\geqslant e^{-x} \Leftrightarrow x+3\geqslant -x \Leftrightarrow 2x\geqslant -3 \Leftrightarrow x\geqslant -\frac{3}{2}$.

Exercice 6

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $\mathbb{R}$ par $f(x)=(3-x)e^x+1$.
1. Montrer que, pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $\mathbb{R}$, $f'(x)=(2-x)e^x$.
La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que composée de telles fonctions sur $\mathbb{R}$.
Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f'(x)=-e^x+(3-x)e^x=(3-x-1)e^x=(2-x)e^x$.
2. Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $\mathbb{R}$.
Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $e^x>0$. Donc le signe de f ne dépend que de celui de $2-x$.
$2-x\geqslant 0 \Leftrightarrow -x\geqslant -2 \Leftrightarrow x\leqslant 2$.
On en déduit le tableau suivant :

x	$-\infty$		2		$+\infty$
signe de f'		$+$	0	$-$	
$f(x)$	1	$\nearrow$	e^2+1	$\searrow$	$-\infty$

Avec $f(2)=(3-2)e^2+1=e^2+1$.

Remarque

On verra cette année l'étude des limites de fonction. En voici un premier aperçu ci-dessous.
De plus, $\lim\limits_{x\to+\infty}(3-x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}e^x=+\infty$.
Ainsi, par produit et somme, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$.
De plus, $f(x)=3e^x-xe^x+1$.
$\lim\limits_{x\to-\infty}3e^x=0$ et par croissances comparées, $\lim\limits_{x\to-\infty}xe^x=0$.
Ainsi, par produit et somme, $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=1$.

3. a. Soit T la tangente à la courbe représentative de la fonction f au point d'abscisse 3 .
Montrer que T a pour équation $y=-e^3x+3e^3+1$.
$T: y=f'(3)(x-3)+f(3)$. Or $f(3)=(3-3)e^3+1=1$ et $f'(3)=(2-3)e^3=-e^3$.
D'où $T: y=-e^3(x-3)+1$ et donc $T: y=-e^3x+3e^3+1$.
b. Déterminer les coordonnées du point d'intersection de la droite T et de l'axe des abscisses.
Le point d'intersection entre la droite T et l'axe des abscisses possède une ordonnée nulle.
$-e^3x+3e^3+1=0 \Leftrightarrow -e^3x=-3e^3-1 \Leftrightarrow x=\frac{-3e^3-1}{-e^3} \Leftrightarrow x=\frac{3e^3+1}{e^3} \Leftrightarrow x=3+e^{-3}$.
Ainsi, le point d'intersection entre T et l'axe des abscisses a pour coordonnées $(3+e^{-3};0)$.

Thème 3 : Probabilités

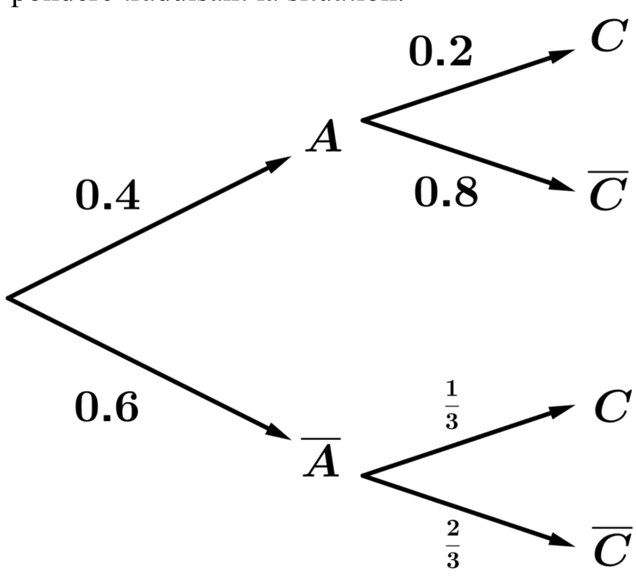
Exercice 1

Un magasin de téléphonie mobile lance une offre sur ses smartphones de la marque Pomme vendus à 800€ : il propose une assurance complémentaire pour 50€ ainsi qu'une coque à 20€.
Ce magasin a fait les constatations suivantes concernant les acheteurs de ce smartphone : 40% des acheteurs ont souscrit à l'assurance complémentaire.
Parmi les acheteurs qui ont souscrit à l'assurance complémentaire, 20% ont acheté en plus la coque.
Parmi les acheteurs qui n'ont pas souscrit à l'assurance complémentaire, deux sur trois n'ont pas acheté la coque.
On interroge au hasard un client de ce magasin ayant acheté un smartphone de la marque Pomme.
On considère les évènements suivants :

- A : « le client a souscrit à l'assurance complémentaire » ;
- C : « le client a acheté la coque ».

Partie A

1. Construire un arbre pondéré traduisant la situation.



2. Calculer la probabilité que le client ait souscrit à l'assurance complémentaire et ait acheté la coque.
On cherche la probabilité de l'événement de $A \cap C$.
On a $P(A \cap C) = P(A) \times P_A(C) = 0,4 \times 0,2 = 0,08$.
Ainsi la probabilité que le client ait souscrit à l'assurance complémentaire et ait acheté la coque est $0,08$.

3. Montrer que $P(C) = 0,28$.
On cherche la probabilité de l'événement C. D'après la formule des probabilités totales, on a :

$$P(C) = P(A \cap C) + P(\overline{A} \cap C) = P(A) \times P_A(C) + P(\overline{A}) \times P_{\overline{A}}(C) = 0,08 + 0,6 \times \frac{1}{3} = 0,08 + 0,2 = 0,28 .$$

Ainsi la probabilité que le client ait acheté le coque est $0,28$.

4. Le client interrogé a acheté la coque. Quelle est la probabilité qu'il n'ait pas souscrit à l'assurance complémentaire ? Vous arrondirez votre résultat à 10^{-3} près.
On cherche la probabilité $P_C(\overline{A})$. On a $P_C(\overline{A}) = \frac{P(\overline{A} \cap C)}{P(C)} = \frac{0,2}{0,28} \approx 0,714$.

Ainsi la probabilité que le client n'ait pas souscrit à l'assurance complémentaire sachant qu'il a acheté la coque est environ $0,714$.

5. Les évènements A et C sont-ils indépendants ?

Les événements A et C sont indépendants si et seulement si $P(A\cap C)=P(A)\times P(C)$.

Or $P(A\cap C)=0,08$ et $P(A)\times P(C)=0,4\times 0,28=0,112$. D'où $P(A\cap C)\neq P(A)\times P(C)$.

Ainsi les événements A et C ne sont pas indépendants.

Partie B

On note X la variable aléatoire qui compte la dépense en euros d'un client de ce magasin ayant acheté un smartphone de la marque Pomme.

1. Donner les valeurs prisent par X .

Chaque client paie au départ 800€ pour le téléphone. Ensuite, il y a quatre dépenses supplémentaires différentes :

- Le client prend l'assurance et la coque, cela lui revenant à un total de $800+50+20=870$ €.
- Le client prend l'assurance mais pas la coque, cela lui revenant à $800+50=850$ €.
- Le client prend la coque mais pas l'assurance, cela lui revenant à $800+20=820$ €.
- Le client ne prend ni l'assurance, ni la coque, cela lui revenant à 800€.

Ainsi, X prend les valeurs : 800 ; 820 ; 850 ; 870.

2. Donner la loi de probabilité de X .

La probabilité que le client prenne l'assurance et la coque est $P(A\cap C)=0,08$.

La probabilité que le client prenne l'assurance mais pas la coque est
$P(A\cap\overline{C})=P(A)\times P_A(\overline{C})=0,4\times 0,8=0,32$.

La probabilité que le client prenne la coque mais pas l'assurance est $P(\overline{A}\cap C)=0,2$.

La probabilité que le client ne prenne ni l'assurance ni la coque est

$$P(\overline{A}\cap\overline{C})=P(\overline{A})\times P_{\overline{A}}(\overline{C})=0,6\times\frac{2}{3}=0,4 .$$

On a bien $0,08+0,32+0,2+0,4=1$.

On en déduit la loi de probabilité de X :

x_i	870	850	820	800
$P(X=x_i)$	$0,08$	$0,32$	$0,2$	$0,4$

3. Calculer l'espérance de X . Interpréter votre résultat dans le contexte de l'exercice.

$$E(X)=\sum_{i=1}^{4} p_i x_i=870\times 0{,}08+850\times 0{,}32+820\times 0{,}2+800\times 0{,}4=825{,}6 .$$

Ainsi un client dépense en moyenne $825,6$ €.

4. Calculer la variance et l'écart-type de X . Vous arrondirez l'écart-type à 10^{-2} près.

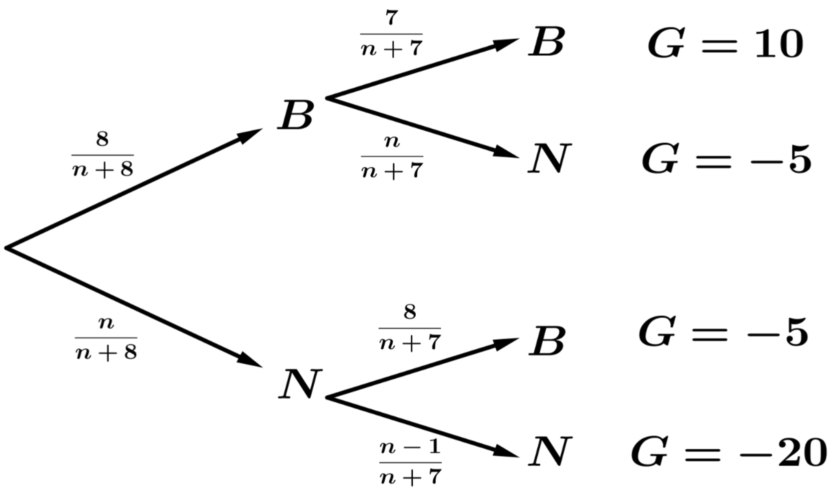
$$V(X)=\sum_{i=1}^{4} p_i(x_i-E(X))^2 .$$
$$=0{,}08(870-825{,}6)^2+0{,}32(850-825{,}6)^2+0{,}2(820-825{,}6)^2+0{,}4(800-825{,}6)^2$$
$$=616{,}64$$
$$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{616,64}\simeq 24,83 .$$

Exercice 2

On désigne par n un entier naturel supérieur à 2.
Une urne contient 8 boules blanches et n boules noires. Les boules sont indiscernables. Un joueur tire sans remise deux boules de l'urne. Il examine leur couleur.
Pour chaque boule blanche tirée, il gagne 5€ et pour chaque boule noire tirée, il perd 10€.
On note G la variable aléatoire qui donne le gain algébrique du joueur sur un tirage.

1. Représenter cette situation par un arbre pondéré.

Il y a au total $n+8$ boules. Au premier tirage, la probabilité de tirer une boule blanche est de $\frac{8}{n+8}$, et celle de tirer une boule noire est de $\frac{n}{n+8}$. Sachant que l'on ne remet pas la boule tirée dans le sac, le deuxième tirage n'est pas identique. Lors du second tirage, la probabilité de tirer une boule blanche aura changé et de même pour la probabilité de tirer une boule noire.
On peut résumer la situation par l'arbre suivant, avec B l'événement « On tire une boule blanche » et N l'événement « On tire une boule noire ».



2. Déterminer l'ensemble des valeurs prises par G.

D'après l'arbre obtenu, G prend les valeurs -20, -5 et 10.

3. Déterminer la loi de probabilité de G.

D'après les règles de calcul dans un arbre pondéré, on a alors :

$$P(G=-20)=\frac{n}{n+8}\times\frac{n-1}{n+7}=\frac{n(n-1)}{(n+8)(n+7)}$$

$$P(G=-5)=\frac{8}{n+8}\times\frac{n}{n+7}+\frac{n}{n+8}\times\frac{8}{n+7}=\frac{16n}{(n+8)(n+7)}$$

$$P(G=10)=\frac{8}{n+8}\times\frac{7}{n+7}=\frac{56}{(n+8)(n+7)}$$

On peut résumer tous ces résultats dans le tableau suivant :

g_i	-20	-5	10
$P(G=g_i)$	$\frac{n(n-1)}{(n+8)(n+7)}$	$\frac{16n}{(n+8)(n+7)}$	$\frac{56}{(n+8)(n+7)}$

4. Déterminer, en fonction de n, l'espérance de G.

On a $E(G)=-20\times\frac{n(n-1)}{(n+8)(n+7)}-5\times\frac{16n}{(n+8)(n+7)}+10\times\frac{56}{(n+8)(n+7)}=\frac{-20n^2-60n+560}{(n+8)(n+7)}$.

5. Existe-t-il une valeur de n telle que le jeu soit équitable ?
Le jeu est équitable si l'espérance est nulle, c'est-à-dire si $\mathrm{E}(\mathrm{G})=0$.

Or $\mathrm{E}(\mathrm{G})=0 \Leftrightarrow \dfrac{-20n^2-60n+560}{(n+8)(n+7)}=0 \Leftrightarrow -20n^2-60n+560=0 \Leftrightarrow -n^2-3n+28=0$.

Ceci revient à résoudre une équation du second degré. $\Delta=(-3)^2-4\times(-1)\times 28=9+112=121>0$.
Comme $\Delta>0$, l'équation admet deux racines réelles distinctes :

$$n_1=\frac{-b+\sqrt{121}}{2a}=\frac{3+11}{-2}=\frac{14}{-2}=-7 \text{ et } n_2=\frac{-b-\sqrt{121}}{2a}=\frac{3-11}{-2}=\frac{-8}{-2}=4$$

Or la solution $n_1=-7$ est impossible car n représente un nombre de boule, donc il est nécessairement positif. Ainsi, le jeu est équitable si et seulement si $n=4$.

Thème 4 : Suites

Exercice 1

Déterminer si les suites (u_n) et (v_n) suivantes sont arithmétiques. Si oui, préciser leur raison.

1. La suite (u_n) est définie pour tout entier $n\geqslant 0$ par $u_n=7-6n$.
On a $u_0=7$, $u_1=7-6\times 1=1$, $u_2=7-6\times 2=-5$, $u_3=7-6\times 3=-11$, etc...
La suite (u_n) semble arithmétique de raison -6.
On a $u_{n+1}-u_n=7-6(n+1)-(7-6n)=7-6n-6-7+6n=-6$.
La différence entre deux termes consécutifs est une constante, donc (u_n) est une suite arithmétique.
Sa raison est $r=-6$.

2. La suite (v_n) est définie pour tout entier $n\geqslant 0$ par $v_n=n^2-n$.
1ère méthode : On a $v_0=0^2-0=0$, $v_1=1^2-1=0$, $v_2=2^2-2=2$.
Or $v_1-v_0=0-0=0$ et $v_2-v_1=2-0=2$. Donc la suite (v_n) n'est pas arithmétique car $0\neq 2$.
2e méthode : On a $v_{n+1}-v_n=(n+1)^2-(n+1)-(n^2-n)=n^2+2n+1-n-1-n^2+n=2n$.
La différence entre deux termes consécutifs dépend de n, donc (v_n) n'est pas arithmétique.

Exercice 2

Une retenue d'eau artificielle est alimentée par un ruisseau dont le débit diminue de 20% d'un jour sur l'autre à cause de la sécheresse. Pour la journée du 1er juin, son débit D_0 est égal à $300\,m^3$.
Pour n entier, on note D_n le débit pour le n-ième jour après le 1er juin, en m^3.

1. Calculer le débit D_1 pour le 2 juin.
On a $\mathrm{D}_1=\left(1-\dfrac{20}{100}\right)\mathrm{D}_0=0,8\,\mathrm{D}_0=0,8\times 300=240$. Le débit sera de $240\,m^3$ le 2 juin.

2. Quelle est la nature de la suite (D_n) ? En déduire l'expression de D_n en fonction de n.
Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\mathrm{D}_{n+1}=0,8\,\mathrm{D}_n$.
Donc (D_n) est une suite géométrique de raison $q=0,8$ et de premier terme $\mathrm{D}_0=300$.
Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\mathrm{D}_n=\mathrm{D}_0\times q^n=300\times 0,8^n$.

3. Calculer le volume d'eau apporté dans la retenue au cours des 30 jours du mois de juin. On arrondira le résultat au mètre cube.
Le volume apporté dans la retenue au cours des 30 jours du mois de juin correspond à la somme des 30 premiers termes de la suite (D_n).

D'où $S_{29}=D_0+D_1+\ldots+D_{29}=\sum_{k=0}^{29} D_k=300\times\frac{1-0{,}8^{29-0+1}}{1-0{,}8}\approx 1498$.

Il y a donc environ $1498\,m^3$ dans la retenue après le 30 juin.

Exercice 3

Soit (u_n) la suite définie par $u_0=10$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}=2u_n-1$.

Soit (v_n) la suite définie pour tout $n\in\mathbb{N}$ par $v_n=u_n-1$.

1. Calculer les trois premiers termes des deux suites.

On a $u_0=10$, $u_1=2u_0-1=2\times10-1=19$ et $u_2=2u_1-1=2\times19-1=37$.

On a $v_0=u_0-1=10-1=9$, $v_1=u_1-1=19-1=18$ et $v_2=u_2-1=37-1=36$.

2. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique. Exprimer alors (v_n) en fonction de n .

D'après les calculs précédents, on peut supposer que la suite (v_n) est géométrique de raison $q=2$.

Démontrons ce résultat.

$v_{n+1}=u_{n+1}-1=2u_n-1-1=2u_n-2=2(u_n-2)=2v_n$.

On retrouve la relation de récurrence d'une suite géométrique : $v_{n+1}=qv_n$.

Ainsi, la suite (v_n) est géométrique de raison $q=2$ et de premier terme $v_0=9$.

Remarque

Si on ne pense pas à factoriser par 2, il est possible de passer par un développement.

En effet, comme $v_n=u_n-1$, on en déduit que $u_n=v_n+1$. On peut alors remplacer u_n par v_n+1 .

On obtient alors $v_{n+1}=2u_n-2=2(v_n+1)-2=2v_n+2-2=2v_n$.

On retrouve le même résultat qu'en factorisant.

3. Démontrer que pour tout entier n on a : $u_n=9\times2^n+1$.

Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $v_n=v_0\times q^n=9\times2^n$.

On sait que $v_n=u_n-1$, donc $u_n=v_n+1$.

Ainsi, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n=9\times2^n+1$.

4. Déterminer le sens de variation de (u_n) .

Pour déterminer les variations de la suite (u_n) , on étudie la différence entre deux termes consécutifs.

On a $u_{n+1}=9\times2^{n+1}+1$.

D'où $u_{n+1}-u_n=9\times2^{n+1}+1-(9\times2^n+1)=9\times2^n\times2+1-9\times2^n-1=9\times2^n(2-1)=9\times2^n$.

Or $9>0$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$, $2^n>0$. Donc $u_{n+1}-u_n>0$.

Ainsi, la suite (u_n) est strictement croissante sur $\mathbb{N}$.