

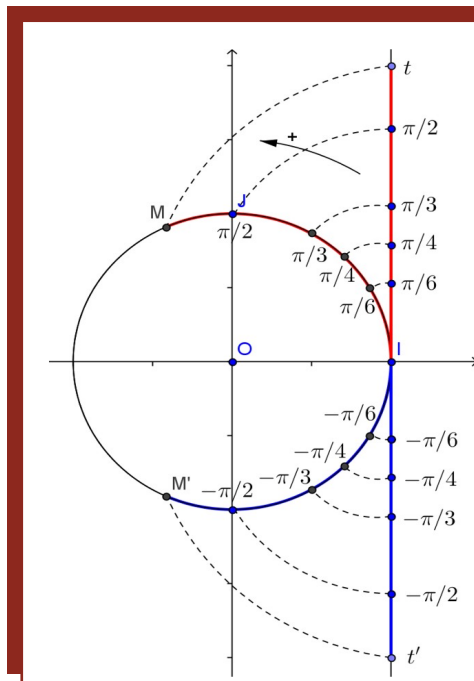
Fonctions trigonométriques

I. Cercle trigonométrique

Le **cercle trigonométrique** est un cercle de centre O et de rayon 1 sur lequel on choisit un sens de parcours, le sens direct ou indirect.

Enroulement de la droite des réels :
 Soit d une droite numérique graduée dont le zéro coïncide avec le point I . Quand on enroule, sur le cercle C , la demi-droite des réels positifs dans le sens direct, et celle des réels négatifs dans le sens indirect, chaque réel t vient s'appliquer sur un point M du cercle C . On dit alors que M est l'image de t sur le cercle C .

La longueur (périmètre) du cercle trigonométrique étant 2π , deux réels t_1 et t_2 ont même point image sur C si et seulement si l'enroulement de la droite des réels entre t_1 et t_2 correspond à un nombre entier de tours de C .

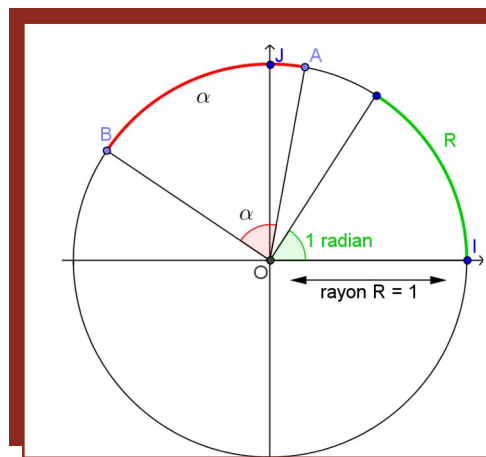


Tout point du cercle est l'image d'une infinité de réels. Si t est l'un deux, les autres sont les réels $t + 2k\pi$, où k est un entier relatif.

II. Le radian

Le **radian** est l'unité de mesure des angles telle que la mesure en radian d'un angle est égale à la longueur de l'arc que cet angle intercepte sur un cercle de rayon R .

Les mesures en degré et en radian d'un angle sont proportionnelles : $180 \times \alpha = \pi \times d$.

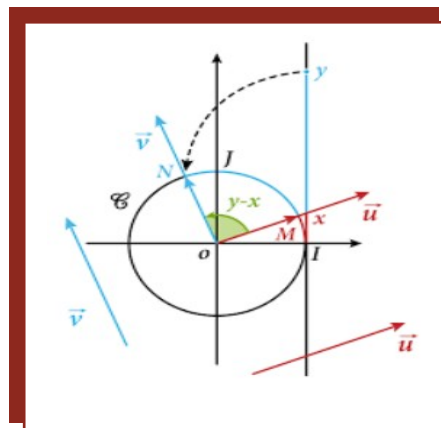


Angle d en degré	180	90	60	45	30	0
Angle α en radian	π	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	0

III. Mesure d'un angle orienté et mesure principale

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
 On considère deux vecteurs non nuls \vec{u} et \vec{v} et on construit sur le cercle trigonométrique les points M et N tels que \vec{OM} soit colinéaire et de même sens que \vec{u} et \vec{ON} soit colinéaire et de même sens que \vec{v} .

- La mesure de l'**angle orienté** (\vec{u}, \vec{v}) est égale à celle de l'angle orienté (\vec{OM}, \vec{ON}) .
- Pour tout réel x associé au point M et tout réel y associé au point N , $y-x$ est une mesure en radian de l'angle orienté (\vec{u}, \vec{v}) .



- L'unique mesure en radian d'un angle orienté (\vec{u}, \vec{v}) appartenant à l'intervalle $]-\pi; \pi]$ est appelé la **mesure principale** de cet angle.
- La valeur absolue de la mesure principale d'un angle orienté (\vec{u}, \vec{v}) est égale à la mesure, en radian, de l'**angle géométrique** défini par \vec{u} et \vec{v} .

Méthode : Déterminer la mesure principale d'un angle orienté

Déterminons la mesure principale de l'angle $x = \frac{273\pi}{12}$.

1^{ère} méthode : On cherche $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x = \alpha + 2k\pi$ et $-\pi < \alpha \leq \pi$.

On effectue la division euclidienne de 273 par 12. On a $273 = 12 \times 22 + 9$.

D'où $\frac{273\pi}{12} = \frac{9\pi + 22 \times 12\pi}{12} = \frac{9\pi}{12} + 22\pi = \frac{3\pi}{4} + 2 \times 11\pi = \frac{3\pi}{4} + 22\pi$ (on trouve $k = 11$).

La mesure principale de l'angle $x = \frac{273\pi}{12}$ est $\frac{3\pi}{4}$.

2^e méthode : On cherche $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x = \alpha + 2k\pi$ et $-\pi < \alpha \leq \pi$.

On a alors $\alpha = x - 2k\pi = \frac{273\pi}{12} - 2k\pi$.

$$-\pi < \alpha \leq \pi \Leftrightarrow -\pi < \frac{273\pi}{12} - 2k\pi \leq \pi$$

$$\Leftrightarrow -\pi - \frac{273\pi}{12} < -2k\pi \leq \pi - \frac{273\pi}{12}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{285\pi}{12} < -2k\pi \leq -\frac{261\pi}{12}$$

$$\Leftrightarrow 10,875 \leq k < 11,875$$

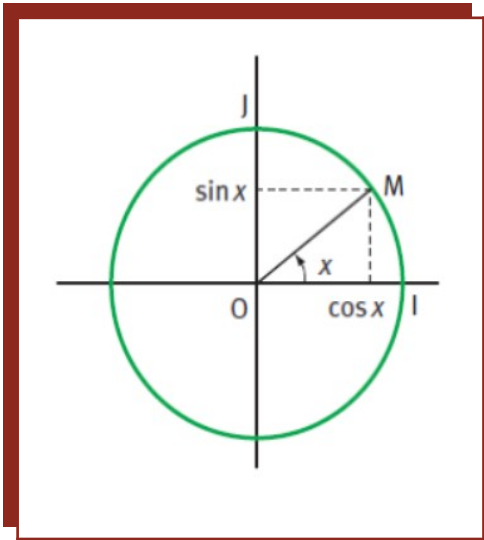
Comme k est un entier relatif, on a $k = 11$.

Donc $\alpha = x - 2k\pi = \frac{273\pi}{12} - 2 \times 11\pi = \frac{273\pi}{12} - \frac{264\pi}{12} = \frac{9\pi}{12} = \frac{3\pi}{4}$.

La mesure principale de l'angle $x = \frac{273\pi}{12}$ est $\frac{3\pi}{4}$.

IV. Cosinus et sinus

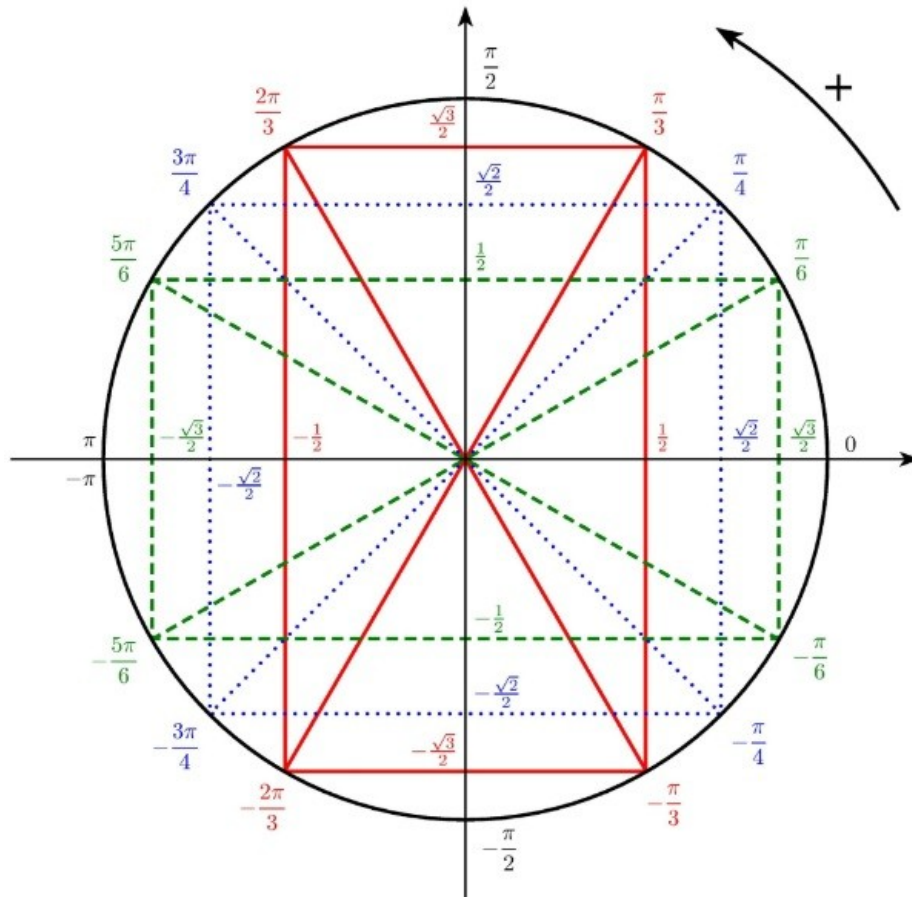
Soit M un point image d'un réel x sur le cercle trigonométrique.
 Dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$, le cosinus de x , noté $\cos x$, est l'abscisse du point M et le sinus de x , noté $\sin x$, est son ordonnée.



Soit x un réel et k un entier relatif. On a :

- $-1 \leq \cos x \leq 1$ et $-1 \leq \sin x \leq 1$
- $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$
- $\cos(x + 2k\pi) = \cos x$ et $\sin(x + 2k\pi) = \sin x$

Valeurs remarquables



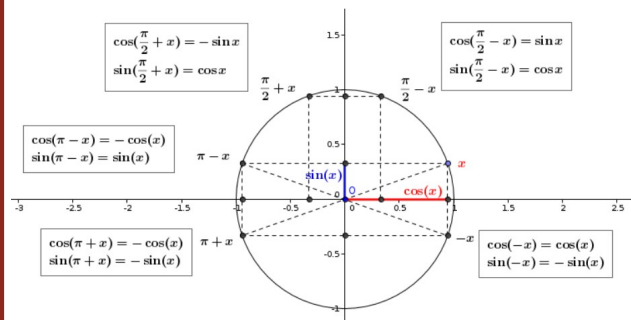
x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

V. Formules et équations

Angles associés

Pour tout réel x , on a :

- $\cos(-x) = \cos x$ et $\sin(-x) = -\sin x$
- $\cos(\pi + x) = -\cos x$ et $\sin(\pi + x) = -\sin x$
- $\cos(\pi - x) = -\cos x$ et $\sin(\pi - x) = \sin x$
- $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x$ et $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$
- $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$ et $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$



Équations trigonométriques

Soit x et a deux réels.

L'équation $\cos x = \cos a$ admet les solutions suivantes :

$$x = a + 2k\pi \text{ ou } x = -a + 2k\pi, \text{ avec } k \in \mathbb{Z}$$

L'équation $\sin x = \sin a$ admet les solutions suivantes :

$$x = a + 2k\pi \text{ ou } x = \pi - a + 2k\pi, \text{ avec } k \in \mathbb{Z}$$

Formules d'addition

- $\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$
- $\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$
- $\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$
- $\sin(a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$

Formules de duplication

- $\cos(2x) = 1 - \sin^2 x$
- $\sin(2x) = 2 \sin x \cos x$

Formules de linéarisation

- $\cos^2 x = \frac{1 + \cos(2x)}{2}$
- $\sin^2 x = \frac{1 - \cos(2x)}{2}$

Formules de factorisation

- $1 + \cos x = 2 \cos^2\left(\frac{x}{2}\right)$
- $1 - \cos x = 2 \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)$

VI. Fonctions cosinus et sinus

VI.1 Définitions

- La **fonction sinus** est la fonction définie sur \mathbb{R} par $x \rightarrow \sin x$.
- La **fonction cosinus** est la fonction définie sur \mathbb{R} par $x \rightarrow \cos x$.

VI.2 Périodicité

Les fonctions sinus et cosinus sont **périodiques** de période 2π . Elles sont dites **2π -périodiques**. Pour tout réel x , $\sin(x + 2k\pi) = \sin x$ et $\cos(x + 2k\pi) = \cos x$.

VI.3 Parité

- La fonction sinus est une fonction **impaire**. Pour tout réel x , $\sin(-x) = -\sin x$. Sa courbe représentative est **symétrique par rapport à l'origine du repère**.
- La fonction cosinus est une fonction **paire**. Pour tout réel x , $\cos(-x) = \cos x$. Sa courbe représentative est **symétrique par rapport à l'axe des ordonnées**.

VI.4 Dérivées

- La fonction sinus est dérivable sur \mathbb{R} et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sin' x = \cos x$.
- La fonction cosinus est dérivable sur \mathbb{R} et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos' x = -\sin x$.

VI.5 Variations

Les fonctions sinus et cosinus étant périodiques de période 2π , il suffit de les étudier sur un intervalle d'amplitude 2π . On choisit l'intervalle $]-\pi; \pi]$.

• Variations de la fonction sinus

x	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\sin' x = \cos x$	-	0	+	-
$\sin x$	0	-1	1	0

• Variations de la fonction cosinus

x	$-\pi$	0	π
$\cos' x = -\sin x$	+	0	-
$\cos x$	-1	1	-1

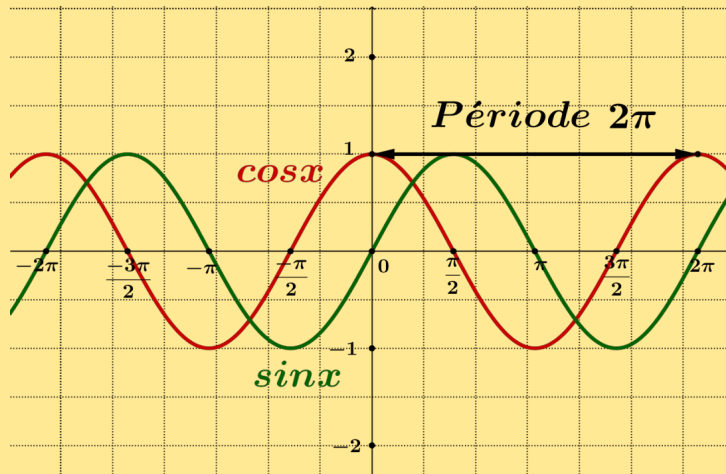
VI.6 Signes

Sur l'intervalle $]-\pi; \pi]$, les fonctions sinus et cosinus ont les signes suivants :

x	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π			
$\sin x$	0	-	-1	-	0	+	1	+
$\cos x$	-1	-	0	+	1	+	0	-

VI.7 Représentations graphiques

Les courbes représentatives des fonctions sinus et cosinus sont des sinusoïdes.



VI.8 Fonctions composées

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I .

- La fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \sin(u(x))$ est dérivable sur I .
Pour tout $x \in I$, $f'(x) = u'(x) \cos(u(x))$.
- La fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \cos(u(x))$ est dérivable sur \mathbb{R} .
Pour tout $x \in I$, $f'(x) = -u'(x) \sin(u(x))$.

VII. Résolution d'inéquations trigonométriques

Inéquations trigonométriques de la forme $\sin x < k$ (k réel)

Méthode 1 : Résolution graphique à l'aide de la courbe représentative de la fonction sinus

Sur la courbe représentative de la fonction sinus, on colorie les points dont l'ordonnée est strictement inférieure à k . Leurs abscisses sont les solutions de l'inéquation $\sin(x) < k$.

Méthode 2 : Résolution graphique à l'aide du cercle trigonométrique

Sur le cercle trigonométrique, on colorie les points associés à un réel dont le sinus est strictement inférieur à k , c'est-à-dire qui ont une ordonnée strictement inférieure à k . On repère les réels auxquels sont associés ces points.

Inéquations trigonométriques de la forme $\cos x < k$ (k réel)

Méthode 1 : Résolution graphique à l'aide de la courbe représentative de la fonction cosinus

Sur la courbe représentative de la fonction cosinus, on colorie les points dont l'ordonnée est strictement inférieure à k . Leurs abscisses sont les solutions de l'inéquation $\cos x < k$.

Méthode 2 : Résolution graphique à l'aide du cercle trigonométrique

Sur le cercle trigonométrique, on colorie les points associés à un réel dont le cosinus est strictement inférieur à k , c'est-à-dire qui ont une abscisse strictement inférieure à k . On repère les réels auxquels sont associés ces points.

VIII. Limites associées aux fonctions trigonométriques

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0$$