

Chapitre 15

Fonctions trigonométriques

I. Cercle trigonométrique

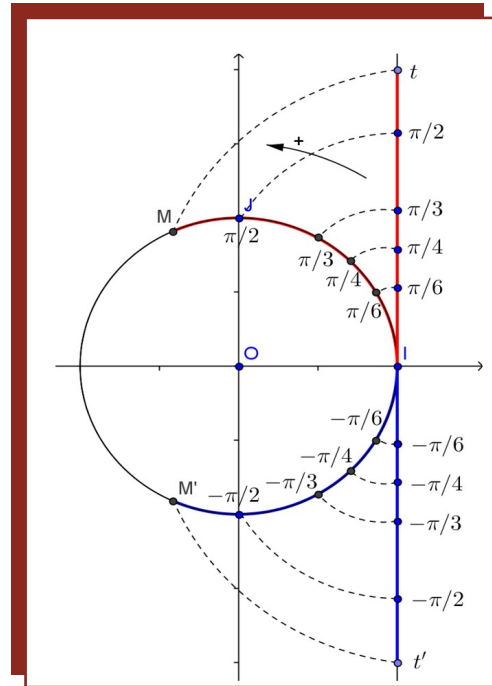
Définition 1

Le **cercle trigonométrique** est un cercle de centre O et de rayon 1 sur lequel on choisit un sens de parcours, le sens direct ou indirect.

Enroulement de la droite des réels :

Soit d une droite numérique graduée dont le zéro coïncide avec le point I . Quand on enroule, sur le cercle C , la demi-droite des réels positifs dans le sens direct, et celle des réels négatifs dans le sens indirect, chaque réel t vient s'appliquer sur un point M du cercle C . On dit alors que M est l'image de t sur le cercle C .

La longueur (périmètre) du cercle trigonométrique étant 2π , deux réels t_1 et t_2 ont même point image sur C si et seulement si l'enroulement de la droite des réels entre t_1 et t_2 correspond à un nombre entier de tours de C .



Propriété 2

Tout point du cercle est l'image d'une infinité de réels.
Si t est l'un d'eux, les autres sont les réels $t + 2k\pi$, où k est un entier relatif.

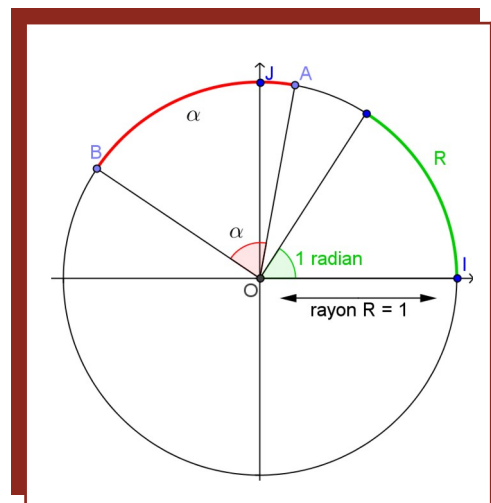
II. Le radian

Définition 3

Le **radian** est l'unité de mesure des angles telle que la mesure en radian d'un angle est égale à la longueur de l'arc que cet angle intercepte sur un cercle de rayon R .

Remarques

- Cette définition ne dépend pas du rayon R de l'arc.
- 1 radian est donc un angle interceptant un arc de longueur égale au rayon du cercle.
- Ci-contre, la mesure de l'angle α en radians est donc la longueur de l'arc \widehat{AB} .



Exemples

un angle plat mesure π radians ; un angle droit mesure $\frac{\pi}{2}$ radians.

Propriété 4

Les mesures en degré et en radian d'un angle sont proportionnelles : $180 \times \alpha = \pi \times d$.

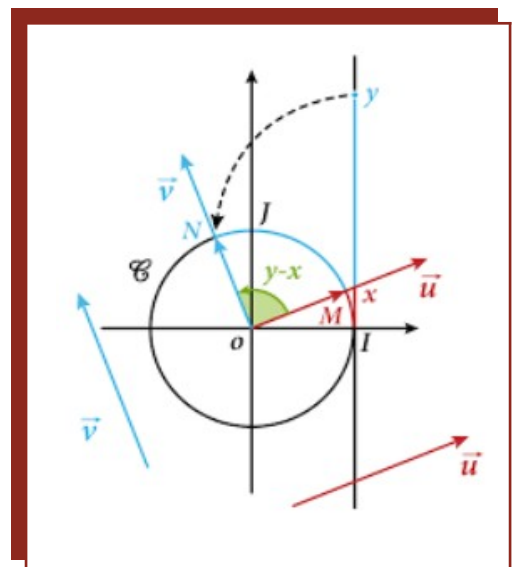
| | | | | | | |
|--|-------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|---|
| Angle d en degré | 180 | 90 | 60 | 45 | 30 | 0 |
| Angle α en radian | π | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{6}$ | 0 |

III. Mesure d'un angle orienté et mesure principale

Définition 5

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j})$. On considère deux vecteurs non nuls \vec{u} et \vec{v} et on construit sur le cercle trigonométrique les points M et N tels que \vec{OM} soit colinéaire et de même sens que \vec{u} et \vec{ON} soit colinéaire et de même sens que \vec{v} .

- La mesure de l'**angle orienté** (\vec{u}, \vec{v}) est égale à celle de l'angle orienté (\vec{OM}, \vec{ON}) .
- Pour tout réel x associé au point M et tout réel y associé au point N , $y-x$ est une mesure en radian de l'angle orienté (\vec{u}, \vec{v}) .



Définition 6

- L'unique mesure en radian de l'angle orienté (\vec{u}, \vec{v}) appartenant à l'intervalle $]-\pi; \pi]$ est appelé la **mesure principale** de cet angle.
- La valeur absolue de la mesure principale de l'angle orienté (\vec{u}, \vec{v}) est égale à la mesure, en radian, de l'**angle géométrique** défini par \vec{u} et \vec{v} .

Remarque

Si α est une mesure de l'angle orienté (\vec{u}, \vec{v}) , alors les autres mesures de cet angle orienté sont les réels $\alpha + 2k\pi$ où k est un entier relatif. On note $(\vec{u}; \vec{v}) = \alpha + 2k\pi$ ou $(\vec{u}; \vec{v}) = \alpha [2\pi]$, qu'on lit « α modulo 2π ». Pour chaque angle orienté, il existe donc une infinité de mesures.

Exemple

Si $(\vec{u}; \vec{v}) = \frac{37\pi}{6}$, alors $(\vec{u}; \vec{v}) = \frac{\pi + 36\pi}{6} = \frac{\pi}{6} + 6\pi = \frac{\pi}{6} + 3 \times 2\pi = \frac{\pi}{6} [2\pi]$.

Méthode : Déterminer la mesure principale d'un angle orienté

Déterminons la mesure principale de l'angle $x = \frac{273\pi}{12}$.

1^{ère} méthode : On cherche $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x = \alpha + 2k\pi$ et $-\pi < \alpha \leq \pi$.

On effectue la division euclidienne de 273 par 12. On a $273 = 12 \times 22 + 9$.

D'où $\frac{273\pi}{12} = \frac{9\pi + 22 \times 12\pi}{12} = \frac{9\pi}{12} + 22\pi = \frac{3\pi}{4} + 2 \times 11\pi = \frac{3\pi}{4} + 22\pi$ (on trouve $k = 11$).

La mesure principale de l'angle $x = \frac{273\pi}{12}$ est $\frac{3\pi}{4}$.

2^e méthode : On cherche $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x = \alpha + 2k\pi$ et $-\pi < \alpha \leq \pi$.

On a alors $\alpha = x - 2k\pi = \frac{273\pi}{12} - 2k\pi$.

$$\begin{aligned} -\pi < \alpha \leq \pi &\Leftrightarrow -\pi < \frac{273\pi}{12} - 2k\pi \leq \pi \\ &\Leftrightarrow -\pi - \frac{273\pi}{12} < -2k\pi \leq \pi - \frac{273\pi}{12} \\ &\Leftrightarrow -\frac{285\pi}{12} < -2k\pi \leq -\frac{261\pi}{12} \\ &\Leftrightarrow 10,875 \leq k < 11,875 \end{aligned}$$

Comme k est un entier relatif, on a $k = 11$.

Donc $\alpha = x - 2k\pi = \frac{273\pi}{12} - 2 \times 11\pi = \frac{273\pi}{12} - \frac{264\pi}{12} = \frac{9\pi}{12} = \frac{3\pi}{4}$.

La mesure principale de l'angle $x = \frac{273\pi}{12}$ est $\frac{3\pi}{4}$.

IV. Cosinus et sinus

IV.1 Coordonnées d'un point du cercle trigonométrique

Définition 7

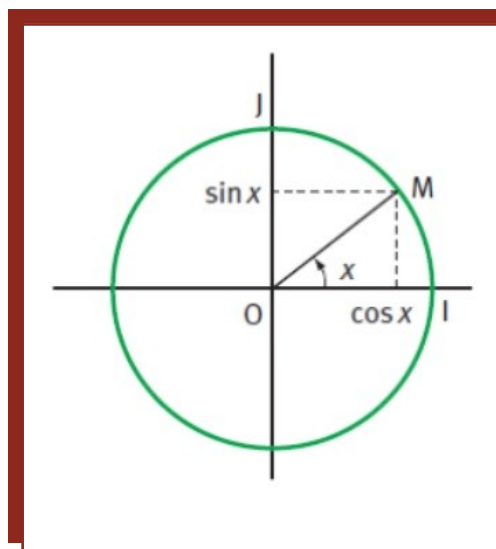
Soit M un point image d'un réel x sur le cercle trigonométrique.

Dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$, le cosinus de x , noté $\cos x$, est l'abscisse du point M et le sinus de x , noté $\sin x$, est son ordonnée.

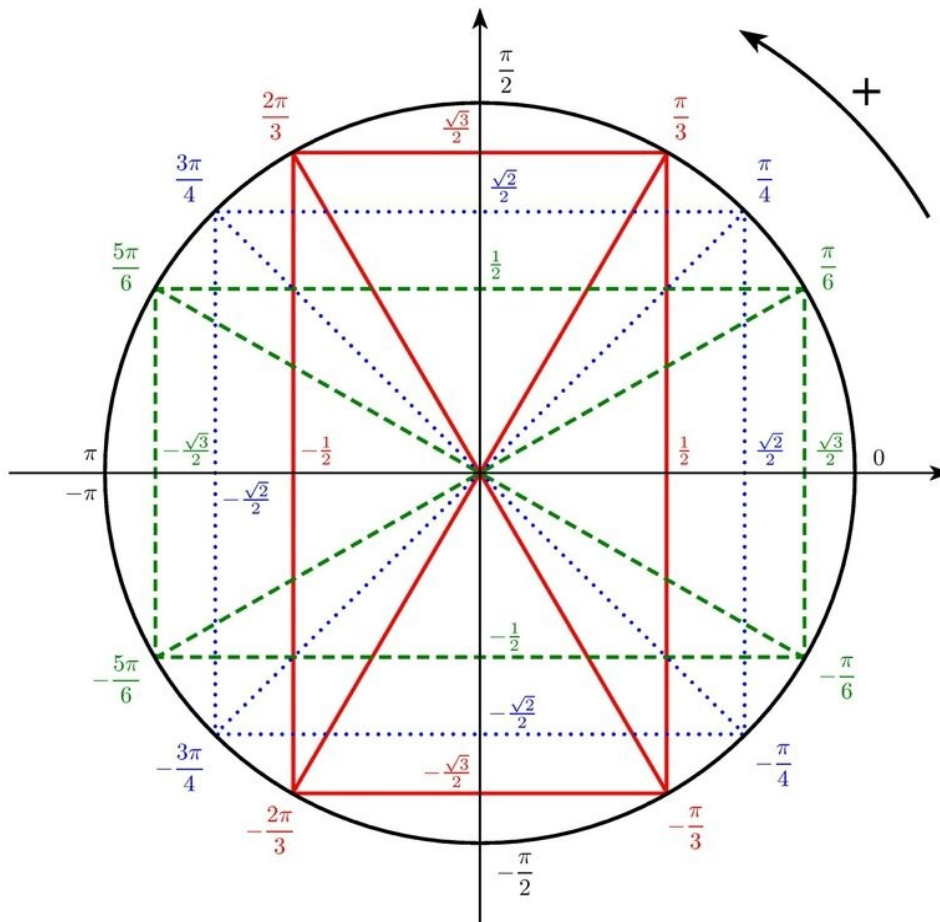
Propriété 8

Soit x un réel et k un entier relatif. On a :

- $-1 \leq \cos x \leq 1$ et $-1 \leq \sin x \leq 1$
- $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$
- $\cos(x + 2k\pi) = \cos x$ et $\sin(x + 2k\pi) = \sin x$



IV.2 Valeurs remarquables des cosinus et sinus



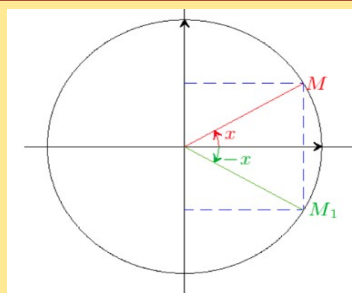
| | | | | | |
|-----------|---|----------------------|----------------------|----------------------|-----------------|
| x | 0 | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ |
| $\cos(x)$ | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | 0 |
| $\sin(x)$ | 0 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 1 |

IV.3 Angles associés

Propriété 9

Pour tout réel x , on a :

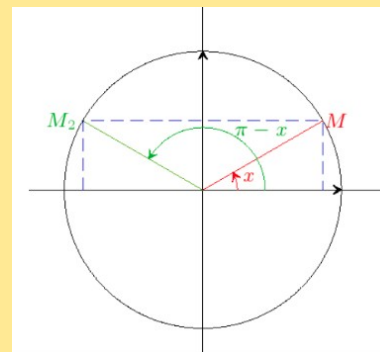
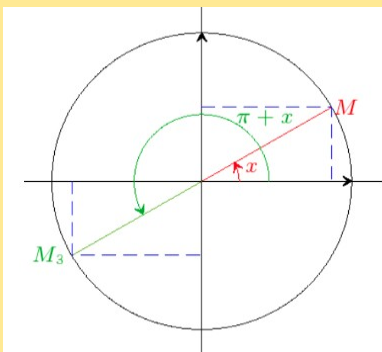
- $\cos(-x) = \cos(x)$
- $\sin(-x) = -\sin(x)$



Propriété 10

Pour tout réel x , on a :

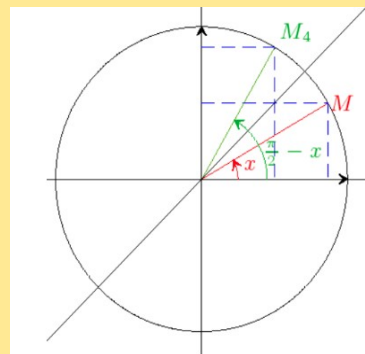
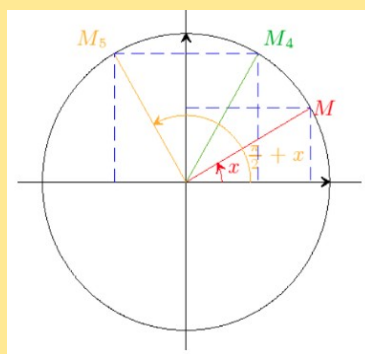
- $\cos(\pi + x) = -\cos(x)$
- $\sin(\pi + x) = -\sin(x)$
- $\cos(\pi - x) = -\cos(x)$
- $\sin(\pi - x) = \sin(x)$



Propriété 11

Pour tout réel x , on a :

- $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin(x)$
- $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos(x)$
- $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x)$
- $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x)$



IV.4 Équations trigonométriques

Propriété 12

Soit a un nombre réel.

Les solutions de l'équation $\cos(x) = \cos(a)$ sont les réels $a + 2k\pi$ et $-a + 2k\pi$, où $k \in \mathbb{Z}$.

Propriété 13

Soit a un nombre réel.

Les solutions de l'équation $\sin(x) = \sin(a)$ sont les réels $a + 2k\pi$ et $\pi - a + 2k\pi$, où $k \in \mathbb{Z}$.

Exemples

Résoudre dans \mathbb{R} les équations $\cos(x) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$ et $\sin(x) = \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)$.

$$\cos(x) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \text{ ou } x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi.$$

$$\sin(x) = \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) \Leftrightarrow x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \text{ ou } x = \pi - \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \Leftrightarrow x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$$

Remarque

$\cos(x)$ et $\sin(x)$ peuvent aussi s'écrire $\cos x$ et $\sin x$ s'il n'y a pas d'ambiguïté.

IV.4 Formules trigonométriques

Propriété 14 (formules d'addition)

Soit deux réels a et b . On a :

$$\begin{aligned} \bullet \cos(a+b) &= \cos a \cos b - \sin a \sin b & \bullet \sin(a+b) &= \sin a \cos b + \cos a \sin b \\ \bullet \cos(a-b) &= \cos a \cos b + \sin a \sin b & \bullet \sin(a-b) &= \sin a \cos b - \cos a \sin b \end{aligned}$$

Propriété 15 (formules de duplication)

$$\bullet \cos(2x) = 1 - \sin^2(x) \qquad \bullet \sin(2x) = 2 \sin x \cos x$$

Propriété 16 (formules de linéarisation)

$$\bullet \cos^2 x = \frac{1 + \cos(2x)}{2} \qquad \bullet \sin^2 x = \frac{1 - \cos(2x)}{2}$$

Propriété 17 (formules de factorisation)

$$\bullet 1 + \cos x = 2 \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) \qquad \bullet 1 - \cos x = 2 \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)$$

V. Fonctions cosinus et sinus

V.1 Fonction sinus

Définition 18

La **fonction sinus** est la fonction définie sur \mathbb{R} par $x \rightarrow \sin x$.
La courbe représentative de la fonction sinus est une **sinusoïde**.

Propriété 19

La fonction sinus est **périodique** de période 2π . Elle est dite **2π -périodique**.
Pour tout réel x , $\sin(x + 2k\pi) = \sin x$.

Propriété 20

La fonction sinus est une fonction **impaire**. Pour tout réel x , $\sin(-x) = -\sin x$.
Sa courbe représentative est **symétrique par rapport à l'origine du repère**.

Propriété 21

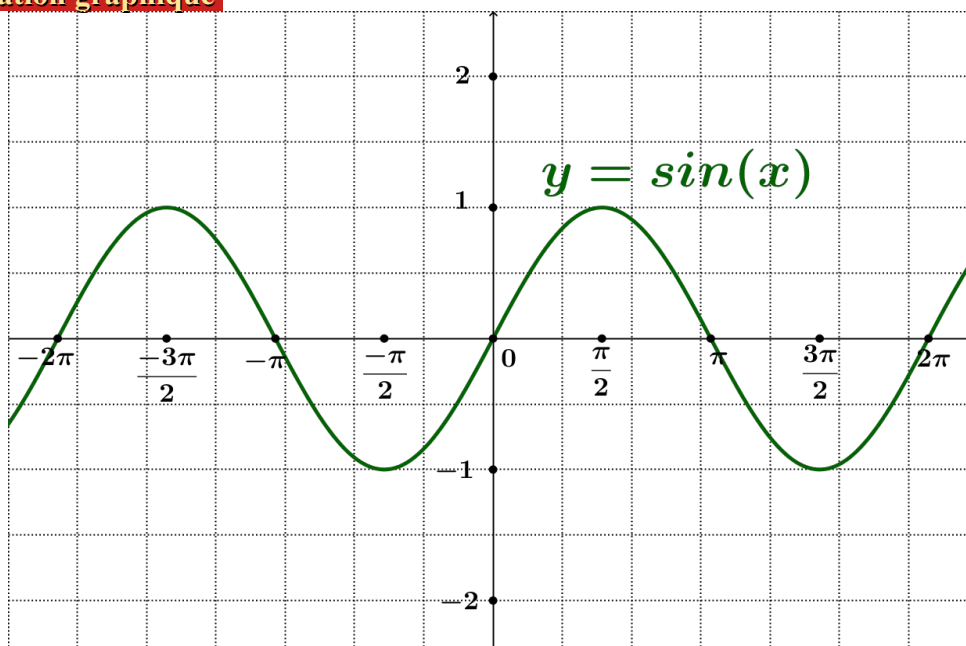
La fonction sinus est dérivable sur \mathbb{R} et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sin'(x) = \cos x$.

Tableau de variations

La fonction sinus étant périodique de période 2π , il suffit de l'étudier sur un intervalle d'amplitude 2π . On choisit l'intervalle $]-\pi; \pi]$.

| | | | | |
|----------------------|--------|------------------|-----------------|-------|
| x | $-\pi$ | $-\frac{\pi}{2}$ | $\frac{\pi}{2}$ | π |
| $\sin'(x) = \cos(x)$ | - | 0 | + | 0 |
| $\sin(x)$ | 0 | -1 | 1 | 0 |

Représentation graphique



Propriété 22

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I .
 La fonction f définie sur I par $f(x) = \sin(u(x))$ est dérivable sur I .
 Pour tout réel x , $f'(x) = u'(x) \cos(u(x))$.

Exemple

Soit la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \sin(x^2 + 3)$.
 f est dérivable sur \mathbb{R} en tant que composée d'une fonction polynomiale avec la fonction sinus.
 Elle s'écrit $\sin(u(x))$ avec $u(x) = x^2 + 3$ et $u'(x) = 2x$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 2x \cos(x^2 + 3)$.

V.2 Fonction cosinus

Définition 23

La **fonction cosinus** est la fonction définie sur \mathbb{R} par $x \rightarrow \cos x$.
 La courbe représentative de la fonction cosinus est une **sinusoïde**.

Propriété 24

La fonction cosinus est **périodique** de période 2π . Elle est dite **2π -périodique**.
 Pour tout réel x , $\cos(x + 2k\pi) = \cos x$.

Propriété 25

La fonction cosinus est une fonction **paire**. Pour tout réel x , $\cos(-x) = \cos x$.
 Sa courbe représentative est **symétrique par rapport à l'axe des ordonnées**.

Exemples

Soit la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = 2 + \cos x$.

- On a $f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 2 + \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$.
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = 2 + \cos(-x) = 2 + \cos x = f(x)$. Donc f est une fonction paire.
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x + 2\pi) = 2 + \cos(x + \pi) = 2 + \cos x = f(x)$. Donc f est 2π -périodique.

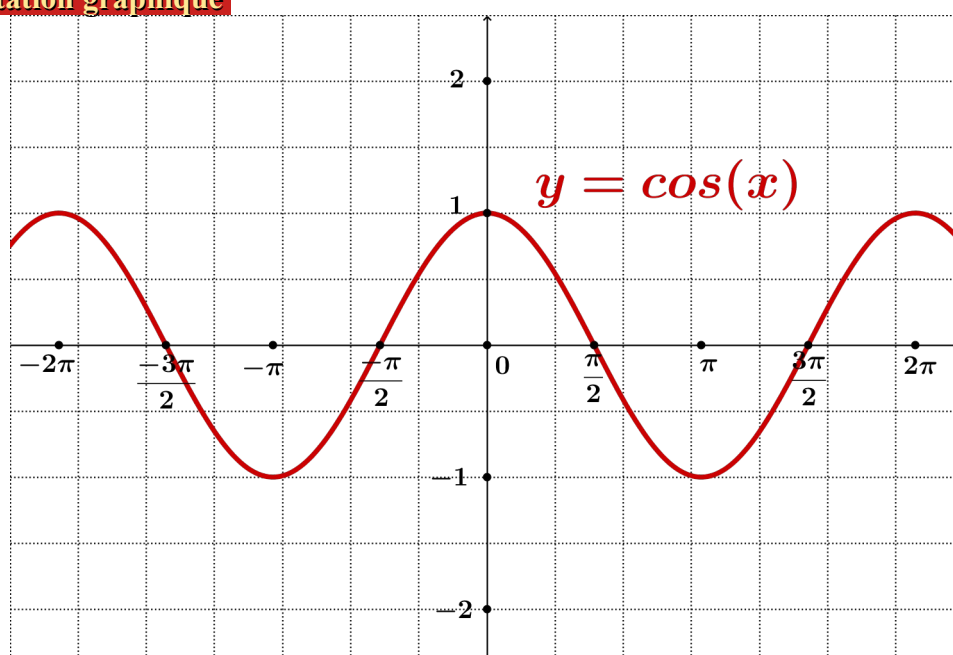
Propriété 26

La fonction cosinus est dérivable sur \mathbb{R} et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos'(x) = -\sin(x)$.

Tableau de variations

La fonction cosinus étant périodique de période 2π , il suffit de l'étudier sur un intervalle d'amplitude 2π . On choisit l'intervalle $]-\pi; \pi]$.

| | | | |
|-----------------------|--------|-----|-------|
| x | $-\pi$ | 0 | π |
| $\cos'(x) = -\sin(x)$ | $+$ | 0 | $-$ |
| $\cos(x)$ | -1 | 1 | -1 |

Représentation graphique**Propriété 27**

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I .
 La fonction f définie sur I par $f(x) = \cos(u(x))$ est dérivable sur I .
 Pour tout réel x , $f'(x) = -u'(x) \sin(u(x))$.

Exemple

Soit la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \cos(\sqrt{x})$.

f est dérivable sur $]0; +\infty[$ en tant que composée de la fonction racine carrée avec la fonction cosinus.

Elle s'écrit $\cos(u(x))$ avec $u(x) = \sqrt{x}$ et $u'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{x}} \sin(\sqrt{x})$.

Remarques

- Les fonctions cosinus et sinus sont des fonctions trigonométriques.
- Les fonctions trigonométriques servent à modéliser des phénomènes dits périodiques comme par exemple la position d'un ressort en fonction du temps.

VI. Inéquations trigonométriques

Propriété 28

Soit a un réel.

- Les solutions de l'inéquation $\cos x \leq \cos a$ sont les réels vérifiant :
 $a + 2k\pi \leq x \leq 2\pi - a + 2k\pi$, où $k \in \mathbb{Z}$
- Les solutions de l'inéquation $\sin x \leq \sin a$ sont les réels vérifiant :
 $-\pi - a + 2k\pi \leq x \leq a + 2k\pi$, où $k \in \mathbb{Z}$

Inéquations trigonométriques de la forme $\sin x < k$ (k réel)

Méthode 1 : Résolution graphique à l'aide de la courbe représentative de la fonction sinus

Sur la courbe représentative de la fonction sinus, on colorie les points dont l'ordonnée est strictement inférieure à k . Leurs abscisses sont les solutions de l'inéquation $\sin(x) < k$.

Méthode 2 : Résolution graphique à l'aide du cercle trigonométrique

Sur le cercle trigonométrique, on colorie les points associés à un réel dont le sinus est strictement inférieur à k , c'est-à-dire qui ont une ordonnée strictement inférieure à k . On repère les réels auxquels sont associés ces points.

Exemple

Résolvons graphiquement $\sin(x) < -0,5$ dans $[0; 2\pi]$ puis dans $]-\pi; \pi]$.

$$\text{Dans } [0; 2\pi[, \sin x < -0,5 \Leftrightarrow x \in \left] \frac{7\pi}{6}; \frac{11\pi}{6} \right[.$$

$$\text{Dans }]-\pi; \pi], \sin x < -0,5 \Leftrightarrow x \in \left] -\frac{5\pi}{6}; -\frac{\pi}{6} \right[.$$

Inéquations trigonométriques de la forme $\cos x < k$ (k réel)

Méthode 1 : Résolution graphique à l'aide de la courbe représentative de la fonction sinus

Sur la courbe représentative de la fonction cosinus, on colorie les points dont l'ordonnée est strictement inférieure à k . Leurs abscisses sont les solutions de l'inéquation $\cos x < k$.

Méthode 2 : Résolution graphique à l'aide du cercle trigonométrique

Sur le cercle trigonométrique, on colorie les points associés à un réel dont le cosinus est strictement inférieur à k , c'est-à-dire qui ont une abscisse strictement inférieure à k . On repère les réels auxquels sont associés ces points.

Exemple

Résolvons graphiquement $\cos(x) < 0,5$ dans $[0; 2\pi]$ puis dans $]-\pi; \pi]$.

$$\text{Dans } [0; 2\pi[, \cos x < 0,5 \Leftrightarrow x \in \left] \frac{\pi}{3}; \frac{5\pi}{3} \right[.$$

$$\text{Dans }]-\pi; \pi], \cos x < 0,5 \Leftrightarrow x \in \left[-\pi; -\frac{\pi}{3} \right[\cup \left] \frac{\pi}{3}; \pi \right].$$

VII. Limites associées aux fonctions trigonométriques

Propriété 29 (hors programme)

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0$$

Démonstration

• La fonction $x \rightarrow \sin x$ est dérivable en 0 et $\sin'(0) = \cos 0 = 1$.

$$\text{On a } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(0+x) - \sin 0}{x}.$$

On reconnaît la limite, quand x tend vers 0, du taux d'accroissement de la fonction sinus entre 0 et $0+x$. Cette limite est égale au nombre dérivé du sinus en 0.

$$\text{Ainsi, } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \sin'(0) = 1.$$

• La fonction $x \rightarrow \cos x$ est dérivable en 0 et $\cos'(0) = -\sin 0 = 0$.

$$\text{On a } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(0+x) - \cos 0}{x}.$$

On reconnaît la limite, quand x tend vers 0, du taux d'accroissement de la fonction cosinus entre 0 et $0+x$. Cette limite est égale au nombre dérivé du cosinus en 0.

$$\text{Ainsi, } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x} = \cos'(0) = 0.$$