Combinatoire et dénombrement

I. Définitions générales

I.1 Ensemble et vocabulaire

Un ensemble E est une collection d'objets distincts x qu'on appelle élément.
On dit alors que x appartient à E et on note $x \in \mathrm{E}$.

Remarques
- Pour lister un ensemble d'éléments isolés les uns des autres, on utilise des accolades.
- L'ensemble qui ne contient aucun élément s'appelle l'ensemble vide et se note $\emptyset$.
- L'ordre n'intervient pas : $\{a;b\}=\{b;a\}$. De plus, il n'y a pas répétition d'un élément : $\{a;a\}=\{a\}$.

Soit E un ensemble. On appelle partie de E un ensemble F tels que tous les éléments de F appartiennent aussi à E. On dit que F est **inclus** dans E et on note $\mathrm{F} \subset \mathrm{E}$.

Soit A et B deux ensembles.
- La réunion $\mathbf{A} \cup \mathbf{B}$ est l'ensemble des éléments appartenant à A **ou** à B.
- L'intersection $\mathbf{A} \cap \mathbf{B}$ est l'ensemble des éléments appartenant à A **et** à B.

Soit A et B deux ensembles. A et B sont **disjoints** lorsqu'ils ne possèdent aucun élément en commun, autrement dit quand leur intersection est vide. On note $\mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \emptyset$.

On appelle ***k*-uplet** ou ***k*-liste** d'un ensemble E une collection ordonnée d'objets qu'on appelle, selon les cas, coordonnées, composantes ou termes. Un k-uplet s'écrit avec des parenthèses.

Remarques
- Un 2-uplet s'appelle un **couple** et un 3-uplet s'appelle un **triplet**.
- L'ordre intervient, c'est-à-dire que $(a;b) \neq (b;a)$.
- Les objets peuvent être identiques. De ce fait, le couple $(a;a)$ existe.

I.2 Ensemble fini et cardinal

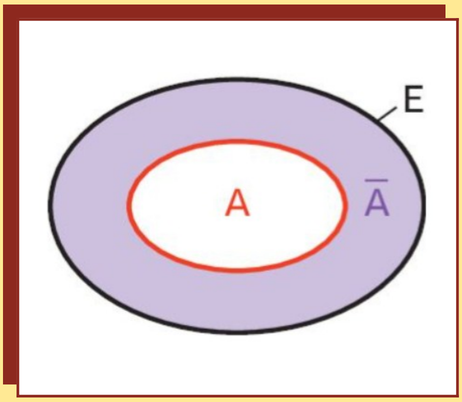
Soit un entier naturel n. Un ensemble E est dit **fini** s'il possède n éléments. Le nombre n d'éléments de E est appelé **cardinal** de E, noté $\mathrm{Card}(\mathrm{E})$.

II. Principes additif et multiplicatif

II.1 Principe additif

Soit un entier naturel n supérieur ou égal à 2 et A_1, A_2, …, A_n des ensembles finis disjoints deux à deux. Alors $\text{Card}(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = \sum_{k=1}^{n} \text{Card}(A_k) = \text{Card}(A_1) + \text{Card}(A_2) + \ldots + \text{Card}(A_n)$.

Soit A une partie d'un ensemble E fini et $\overline{A}$ le complémentaire de A dans E.
Alors $\text{Card}(\overline{A}) = \text{Card}(E) - \text{Card}(A)$.



II.2 Principe multiplicatif

Soit E et F deux ensembles non vides. Le **produit cartésien** de E par F, noté $E \times F$, est l'ensemble des couples $(x;y)$ où $x \in E$ et $y \in F$. Ainsi $E \times F = \{(x;y), x \in E, y \in F\}$.

Remarque
$A \times B$ se lit « A croix B ».

Soit E et F deux ensembles finis non vides. Alors $\text{Card}(E \times F) = \text{Card}(E) \times \text{Card}(F)$.

Attention !
Le signe $\times$ dans $\text{Card}(E \times F)$ désigne le produit cartésien des ensembles E et F, alors que celui dans $\text{Card}(E) \times \text{Card}(F)$ désigne la multiplication du nombre d'éléments de E par celui de F.

Soit k un entier naturel supérieur ou égal à 2 et E_1, E_2, …, E_k, k ensembles non vides.
On note les k-uplets $(x_1; x_2; \ldots x_k)$, avec $x_i \in E_i$ pour i allant de 1 à k.
- L'ensemble de ces k-uplets est le produit cartésien $E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_k$.
- Si les ensembles E_1, E_2, …, E_k sont **finis**, alors :

$$\text{Card}(E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_k) = \prod_{i=1}^{k} E_i = \text{Card}(E_1) \times \text{Card}(E_2) \times \ldots \times \text{Card}(E_k)$$

III. Dénombrement

III.1 Nombre de k-uplet d'un ensemble à n éléments

Soit k un entier naturel non nul et E un ensemble non vide. Un **k-uplet** (ou **k-liste) d'éléments de E** est un élément du produit cartésien $\mathrm{E}^k=\mathrm{E}\times\mathrm{E}\times\ldots\times\mathrm{E}$.

Soit k et n deux entiers naturels non nuls et E un ensemble fini de cardinal n.
Le nombre de k-uplets de E est n^k. On a alors $\mathrm{Card}(\mathrm{E}^k)=[\mathrm{Card}(\mathrm{E})]^k=n^k$.

III.2 Factorielle

Soit n un entier naturel non nul. On appelle **factorielle n** (ou **n factorielle**) le nombre :

$$n!=n\times(n-1)\times(n-2)\times\ldots\times3\times2\times1$$

- $0!=1$
- $n!=n(n-1)!$
- $(n+1)!=(n+1)n!$

III.2 Arrangements d'un ensemble

Soit n et k deux entiers naturels tels que $1\leqslant k\leqslant n$ et E un ensemble fini non vide à n éléments. Un **arrangement** de k éléments de E (ou **k-arrangement**) est un k-uplet d'éléments distincts de E.

Soit n un entier naturel non nul et k un entier naturel tel que $1\leqslant k\leqslant n$.
Soit E un ensemble fini non vide à n éléments. Le nombre de k-arrangements de E est :

$$\mathrm{A}_n^k=n\times(n-1)\times\ldots\times(n-k+1)=\frac{n!}{(n-k)!}$$

III.3 Permutations d'un ensemble

Soit n un entier naturel et E un ensemble fini non vide à n éléments.
Une permutation de E est un n-uplet d'éléments deux à deux distincts de E.

Remarque
Les permutations d'un ensemble correspondent à tous les ordres possibles dans les n-uplets constitués des éléments de l'ensemble.

Soit n un entier naturel non nul. Le nombre de permutations d'un ensemble fini non vide à n éléments est $n!$.

IV. Combinaisons

IV.1 Partie d'un ensemble fini

Une partie d'un ensemble E est un sous-ensemble de E.

Soit n un entier naturel et E un ensemble fini à n éléments. Le nombre de parties de E est égal au nombre de n-uplets de l'ensemble $\{0;1\}$, c'est-à-dire 2^n.

IV.2 Combinaisons

Soit n et k deux entiers naturels tels que $0 \leqslant k \leqslant n$ et E un ensemble fini de cardinal n.
On appelle **combinaison** de k éléments de E toute partie de E ayant k éléments.
Le nombre de combinaisons de k éléments parmi n est noté $\binom{n}{k}$.

Remarque
Les nombres $\binom{n}{k}$ sont appelés les **coefficients binomiaux**.

Soit n et k deux entiers naturels tels que $0 \leqslant k \leqslant n$. Alors $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$.

Méthode pour déterminer les coefficients binomiaux avec la calculatrice :
• Casio 35+ et supérieur : Pour calculer $\binom{5}{2}$, dans le menu RUN (calcul), appuyer sur la touche OPTN, puis choisir PROB. Tapez 5, puis choisir nCr, puis taper 2 et EXE.
• TI 82 et supérieur : Pour calculer $\binom{5}{2}$, taper 5, puis appuyer sur la touche MATH, choisir le menu PROB, puis choisir nCr ou Combinaison (version fr), puis taper 2 et ENTER.

IV.3 Propriétés des combinaisons

Soit n un entier naturel.
• $\binom{n}{0} = 1$. Dans un ensemble à n éléments, il existe une seule partie à 0 élément : la partie vide.
• $\binom{n}{1} = n$. Dans un ensemble à n éléments, il existe n parties ayant un élément.
• $\binom{n}{2} = \dfrac{n(n-1)}{2}$. Dans un ensemble à n éléments, il y a $\dfrac{n(n-1)}{2}$ parties ayant deux éléments.
• $\binom{n}{n} = 1$. Dans un ensemble à n éléments, il y a une seule partie à n éléments : l'ensemble lui-même.

Propriété de symétrie
Pour tous entiers n et k vérifiant $0 \leqslant k \leqslant n$, $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$. Dénombrer les parties à k éléments revient à dénombrer les parties à $(n-k)$ éléments qui en sont les complémentaires.

Relation de Pascal
Pour tous entiers naturels $n \geqslant 2$ et k vérifiant $1 \leqslant k \leqslant n-1$, $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$.

Remarque
Ces propriétés permettent de tracer le triangle de Pascal.

- $\binom{n}{0} = 1$ assure que la première colonne ne contient que des 1 ;
- $\binom{n}{n} = 1$ assure que la diagonale ne contient que des 1 ;
- $\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}$ permet de déterminer n'importe quel coefficient binomial à partir de deux connus auparavant.

Par exemple, pour $n = 5$ et $k = 2$, on a $\binom{5}{2} = \binom{4}{1} + \binom{4}{2} = 4 + 6 = 10$.

$n \backslash k$	0	1	2	3	4	5
0	1					
1	1	1				
2	1	2	1			
3	1	3	3	1		
4	1	4	6	4	1	
5	1	5	10	10	5	1

Pour tout entier naturel n, $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$.

V. Critères à retenir

Pour dénombrer toutes les éventualités d'un problème, les deux critères à prendre en compte sont :

- les éléments peuvent-ils être répétés ?
- l'ordre des éléments est-il à prendre en compte ?

On résume alors les différentes réponses dans le tableau suivant :

Critères	Répétition	Pas de répétition
Ordre	k-listes ou k-uplets (n^k)	k-listes d'éléments distincts (arrangement ou permutation)
Pas d'ordre	Combinaisons avec répétition (hors programme)	Combinaisons $\binom{n}{k}$