

Fonctions de référence

Exercice 1

Développer puis simplifier si besoin les expressions suivantes :

- | | |
|---|--|
| <p>a. $A(x) = (5x - 2)^2$;</p> <p>c. $C(x) = (2x + 3)^2 - (3x - 4)^2$;</p> <p>e. $E(x) = (\sqrt{2} - 1)^2$;</p> | <p>b. $B(x) = \left(3x + \frac{5}{2}\right)\left(3x - \frac{5}{2}\right)$;</p> <p>d. $D(x) = (4x - 3)^2 + 2(5 - x)$;</p> <p>f. $F(x) = (3x + 1)^2 - 4x(2x + 1)$.</p> |
|---|--|

Exercice 2

Factoriser les expressions suivantes :

- | | |
|---|--|
| <p>a. $A(x) = (x + 1)^2 - 2(x + 1)$;</p> <p>c. $C(x) = 36x^2 - 25$;</p> <p>e. $E(x) = 4x^2 + 20x + 25$;</p> | <p>b. $B(x) = (2x + 3)^2 + (x - 2)(2x + 3)$;</p> <p>d. $D(x) = x^2 + 2x + 1 - 4(x + 1)$;</p> <p>f. $F(x) = (3x + 4)^2 - (2x + 3)^2$.</p> |
|---|--|

Exercice 3

1. Dresser un tableau de valeurs de la fonction carrée pour x allant de -5 à 5 avec un pas de 1 .
2. Représenter la fonction carrée sur l'intervalle $[-5; 5]$ (on choisira une échelle adaptée).

Exercice 4

Soit la fonction carrée $f(x) = x^2$.

1. Rappeler son ensemble de définition.
2. Calculer l'image de 2 et -2 par f .
3. Déterminer les antécédents de 0 par f .
4. Résoudre $f(x) = 9$ et $f(x) = 5$.

Exercice 5

Comparez les carrés des nombres indiqués en complétant les pointillés.

- a. Si $x > 4$, alors x^2
- b. Si $x \leq -10$, alors x^2
- c. Si $x \geq \sqrt{6}$, alors x^2
- d. Si $x < 0,5$, alors x^2
- e. Si $4 \leq x \leq 11$, alors x^2
- f. Si $-\frac{4}{3} < x < -\frac{1}{2}$, alors x^2

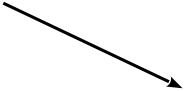
Exercice 6

Comparer sans utiliser la calculatrice les nombres suivants :

1. $A = (\sqrt{3} - 1)^2$ et $B = (\sqrt{5} - 1)^2$.
2. $A = (1 - 10^6)^2$ et $B = (1 - 10^8)^2$.

Exercice 7

On donne ci-dessous le tableau de variations de la fonction $f(x) = x^2$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$		0	

À l'aide du tableau, compléter les inégalités suivantes :

- Si $x \leq -7$, alors x^2
- Si $x \geq 5\sqrt{2}$, alors x^2
- Si $-7 \leq x \leq 5\sqrt{2}$, alors $\leq x^2 \leq$

Exercice 8

Encadrer x^2 dans les cas suivants :

- $-6 \leq x \leq -1$;
- $\frac{1}{4} \leq x < \frac{1}{3}$;
- $-2 < x < \sqrt{3}$.

Exercice 9

Encadrer x^2 lorsque x décrit l'intervalle I .

- $I = \left[\frac{2}{5}; 5 \right]$;
- $I = [-1; 2]$;
- $I =]-7; 4]$.

Exercice 10

Trouver l'intervalle décrit par x^2 dans les cas suivants :

- $x \geq -2$;
- $-3 < x < \sqrt{2}$;
- $x \leq 2\sqrt{3}$.

Exercice 11

Utilisez la parabole d'équation $y = x^2$ ou le tableau de variation pour résoudre les inéquations proposées.

- $x^2 > 16$;
- $x^2 \geq 3$;
- $x^2 < 8$;
- $x^2 \leq 5$;
- $x^2 \geq 18$;
- x négatif et $x^2 \leq 5$.

Exercice 12

Utilisez la parabole d'équation $y = x^2$ ou le tableau de variation pour résoudre les inéquations proposées.

- $4 \leq x^2 \leq 9$;
- $0 < x^2 < 6$;
- $6 < x^2 \leq 9$.

Exercice 13

Soit la fonction f définie par $f(x) = x^4$.

- Quel est le signe de f ? Justifier.
- Résoudre $f(x) = 4$.

Exercise 14

Dans chacun des cas suivant, compléter par une inégalité ou un intervalle (ou réunion d'intervalles).

a. Si $2 \leq x \leq 7$ alors $\frac{1}{x}$

b. Si $-3 \leq x \leq -2$ alors $\frac{1}{x}$

c. Si $-4 \leq x \leq 1$ alors $\frac{1}{x} \in \dots\dots\dots$

Exercise 15

Dans chacun des cas suivant, donner l'intervalle (ou réunion d'intervalles) auquel appartient x .

a. Si $0 < \frac{1}{x} \leq \frac{1}{5}$ alors $x \in \dots\dots\dots$

b. Si $\frac{1}{x} \geq \frac{1}{2}$ alors $x \in \dots\dots\dots$

c. Si $\frac{1}{x} < \frac{1}{2}$ alors $x \in \dots\dots\dots$

Exercice 16

Déterminer le plus grand ensemble qui contient l'inverse de x dans chacun des cas.

a. $\frac{2}{7} \leq x \leq \frac{5}{8}$; b. $7 < x$; c. $-5 \leq x < 0$;

d. $-\frac{3}{2} > x \geq -\frac{5}{3}$; **e.** $\frac{7}{2} \geq x > 0$; **f.** $-\frac{1}{6} \leq x$.

Exercice 17

Soit f la fonction homographique définie par $f(x) = \frac{2x-4}{x-3}$.

1. Donner l'ensemble de définition de la fonction f .

2. Compléter le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$	$+\infty$
$2x-4$		
$x-3$		
$f(x)$		

L'ensemble solution de l'inéquation $f(x) \geq 0$ est donc $S =$

3. Selon le même principe, donner l'ensemble de définition de la fonction g définie par

$g(x) = \frac{-x+2}{x+3}$ et résoudre à l'aide d'un tableau de signes $g(x) < 0$.

Exercice 18

Comparer $\frac{1}{a}$ et $\frac{1}{b}$ sans utiliser la calculatrice.

a. $a=25$ et $b=26$;

b. $a = -\frac{2}{3}$ et $b = -0,66$;

c. $a=-2$ et $b=3$:

d. $a=\pi$ et $b=3,14$.

Exercice 19

On considère la fonction f définie par $f(x) = \frac{2x-1}{x+3}$.

On note C_f sa courbe représentative dans un repère $(O; I, J)$ du plan.

- Déterminer l'ensemble de définition D_f de la fonction f .
- Calculer les images de $\frac{2}{3}$ et $\sqrt{2}$ par la fonction f .
- Déterminer les antécédents de -4 et de 2 par la fonction f .
- Démontrer que, pour tout réel $x \in D_f$, $f(x) = 2 - \frac{7}{x+3}$.
- Justifier que f est croissante sur chacun des deux intervalles de son ensemble de définition et dresser son tableau de variations.
- Étudier le signe de $-\frac{7}{x+3}$ suivant les valeurs de x et en déduire la position de C_f par rapport à la droite d'équation $y=2$.
- Compléter, en utilisant la calculatrice, le tableau de valeurs suivant :

[illegible]

8. Tracer dans un repère $(O; I, J)$ les droites d'équations $x = -3$ et $y = 2$, ainsi que la courbe C_f .
9. a. Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) \leq 1$.
b. Résoudre algébriquement l'inéquation $f(x) \leq 1$.

Exercice 20

Soit a et b deux réels non nuls et f la fonction inverse. Le but de cet exercice est de déterminer tous les couples $(a; b)$ qui vérifient l'égalité (E) suivante : $f(a \times b) = f(a) \times f(b)$.

1. Montrer que les couples $\left(\frac{1}{4}; \frac{1}{3}\right)$ et $(4; -3)$ satisfont l'équation (E).
2. Déterminer b pour que le couple $(3; b)$ vérifie (E).
3. Montrer qu'il n'existe pas de couple $(a; 1)$ vérifiant (E).
4. Déterminer tous les couples $(a; b)$ vérifiant (E).

Exercice 21

Déterminer, dans chacun des cas suivants, l'ensemble des nombres réels x pour lesquels l'expression est définie :

a. $\sqrt{2x+5}$; b. $\sqrt{0,5x-7}$; c. $\sqrt{-3x+1}$; d. $\sqrt{-1,5x-9}$.

Exercice 22

Ranger les nombres suivants par ordre croissant : $\sqrt{3}$, $\sqrt{\frac{5}{3}}$, $\sqrt{\pi}$, $\sqrt{3,8}$ et $\sqrt{0,1287}$.

Exercice 23

Dans chacun des cas, donner un encadrement de $\sqrt{x}$.

- a. $1 < x < 2$; b. $4 \leq x < 12$; c. $5 \leq 4x < 16$; d. $1,44 < x \leq \pi^2 + 2\pi + 1$.

Exercice 24

Résoudre les équations suivantes :

- a. $\sqrt{x} = 4$; b. $\sqrt{x} = -2$; c. $\sqrt{x} = 2$.

Exercice 25

Résoudre les inéquations suivantes :

- a. $\sqrt{x} < \sqrt{2}$; b. $\sqrt{x} \geq 4$; c. $\sqrt{2-x} < 3$;
d. $\sqrt{x} \leq 3$; e. $\sqrt{x} < \pi$; f. $\sqrt{x+2} > 5$.

Exercice 26

Écrire les expressions suivantes sans racine carrée au dénominateur :

- a. $\frac{2}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$; b. $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{5}}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}$; c. $\frac{1+2\sqrt{3}}{1+\sqrt{2}}$;
d. $\frac{5-\sqrt{2}}{\sqrt{2}+\sqrt{\pi+1}}$; e. $\frac{2-3\sqrt{5}}{\sqrt{6}}$; f. $\frac{1+5\sqrt{2}}{3\sqrt{2}}$.

Exercice 27

ABC est un triangle rectangle en A avec $AB=4$ et $2 < AC < 2,1$.

Donner un encadrement de BC par deux nombres décimaux avec un chiffre après la virgule.

Exercice 28

Calculer $S = \frac{1}{\sqrt{2}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{3}}$.

Exercice 29

Soit a et b deux réels positifs. Montrer que les réels suivants ont le même signe.

- a. $9-a$ et $3-\sqrt{a}$; b. $b-a$ et $\sqrt{b}-\sqrt{a}$; c. $b-5$ et $\sqrt{b}-\sqrt{5}$.

Exercice 30

Sans calculatrice, ranger les nombres suivants par ordre croissant.

1. $(-3)^3$; π^3 ; $(\sqrt{3})^3$; $(\sqrt{2}-2)^3$; 0.
2. $-\frac{\pi^3}{8}$; $5\sqrt{5}$; 8 ; $-\frac{27}{8}$; $-\frac{64}{125}$; $(\sqrt{2})^3$.

Exercice 31

Déterminer un encadrement de x^3 ou une inégalité que vérifie x^3 dans chacun des cas suivants :

- a. $-3 \leq x < 2$; b. $-\sqrt{2} < 2x \leq 1$; c. $x \geq \frac{5}{6}$; d. $x < \frac{\sqrt[3]{5}}{2}$.

Exercice 32

Déterminer les racines cubiques des nombres suivants :

- a. -64 ; b. $\sqrt[3]{216}$; c. $\frac{27}{8}$;
d. $7\sqrt[3]{7}$; e. 16 ; f. $\frac{64\pi^3}{125}$.

Exercice 33

Parmi les nombres suivants, lesquels sont égaux à leur valeur absolue ?

- a. 2 ; b. $25 - 9\pi$; c. $\sqrt{2} - \sqrt{5}$;
d. $3 - \frac{8}{3}$; e. $\frac{1}{2} - \frac{1}{3}$; f. $-2 + 9 \times (-3)$.

Exercice 34

Donner la valeur absolue des nombres suivants :

- a. -5 ; b. $-\sqrt{289}$; c. $-\frac{2}{3}$; d. $3 - \frac{2}{3} \times (6 - 4)$.

Exercice 35

Calculer les valeurs absolues suivantes :

- a. $|10^{-7} - 10^{-3}|$; b. $|1 - \sqrt{2}|$; c. $|17 - 25|$; d. $|-3 - \pi|$.

Exercice 36

Dans chaque cas, donner la distance entre les deux réels donnés :

- a. -2 et -12 ; b. $-\pi$ et 2π ; c. $\frac{5}{3}$ et $\frac{7}{6}$; d. -4 et 6 .

Exercice 37

On considère les inégalités suivantes : $|x - 3| \leq 2$, $|x - 3| < 1$, $|x + 3| \leq 2$ et $|x - 2| < 1$.

Pour chaque inégalité, justifier si elle est vérifiée par le nombre 2.

Exercice 38

Résoudre les équations suivantes :

- a. $|x| = 8$; b. $|x| = -5$; c. $|x - 1| = 3$; d. $|2x + 1| = 4$.

Exercice 39

Déterminer l'intervalle auquel appartient x dans chacun des cas suivants :

- a. $|x - 2| \leq 3$; b. $|x| \leq 15$; c. $|x| \leq 1$; d. $0 < |x| < 2$.

Exercice 40

Déterminer l'intervalle auquel appartient x dans chacun des cas suivants :

- a. $|x+5| \leq 3$; b. $|x+2| \leq 2$; c. $|x-3| < 1$; d. $|x+5| \leq \frac{1}{3}$.

Exercice 41

Nelson dit que $\sqrt{(x-1)^2} = |x-1|$ pour tout nombre réel x . A-t-il raison ?

Exercice 42

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

- a. $x^2 \leq 20$; b. $2x^2 + 1 < 9$; c. $-x^2 > -7$;
d. $x^2 + 1 \leq \frac{1}{2}$; e. $\frac{5x^3}{3} \leq \frac{12x}{5}$; f. $2x^2 - 3x \leq x^2 - 3x + 8$.

Exercice 43

Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes :

- a. $f(x) = \sqrt{1 - \frac{1}{x}}$; b. $g(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$; c. $h(x) = \sqrt{8 - 2x^2}$; d. $k(x) = \frac{1}{x^3}$.

Exercice 44

Soit f , g et h les fonctions définies sur $[-2; +\infty[$ par :

$$f(x) = 2x + 4, \quad g(x) = (2x + 4)^3 \quad \text{et} \quad h(x) = (2x + 4)^2$$

1. Résoudre sur $[-2; +\infty[$ l'inéquation $0 \leq f(x) \leq 1$.
2. Résoudre sur $[-2; +\infty[$ l'inéquation $f(x) \geq 1$.
3. Dédire des questions précédentes la position relative des courbes C_f , C_g et C_h sur l'intervalle $[-2; +\infty[$.

Exercice 45

Démontrer les propriétés suivantes :

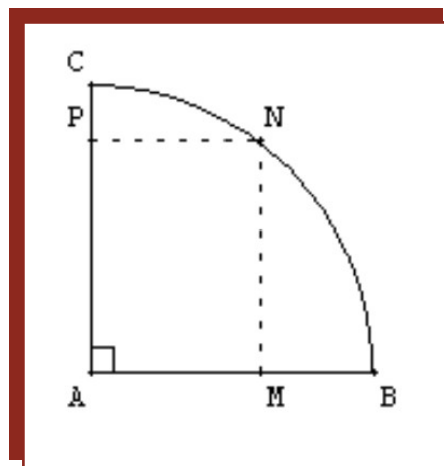
1. Si $0 \leq x \leq 1$, alors $x^2 \leq x \leq \sqrt{x}$.
2. Si $x \geq 1$, alors $\sqrt{x} \leq x \leq x^2$.

Exercice 46

La figure donnée représente un quart de cercle BC de centre A et de rayon 6 cm . M est un point de $[AB]$. On construit le quadrilatère $AMNP$ tel que N et P appartiennent respectivement à l'arc BC et à $[AC]$.

On veut étudier comment évolue l'aire du rectangle $AMNP$ quand M décrit le segment $[AB]$.

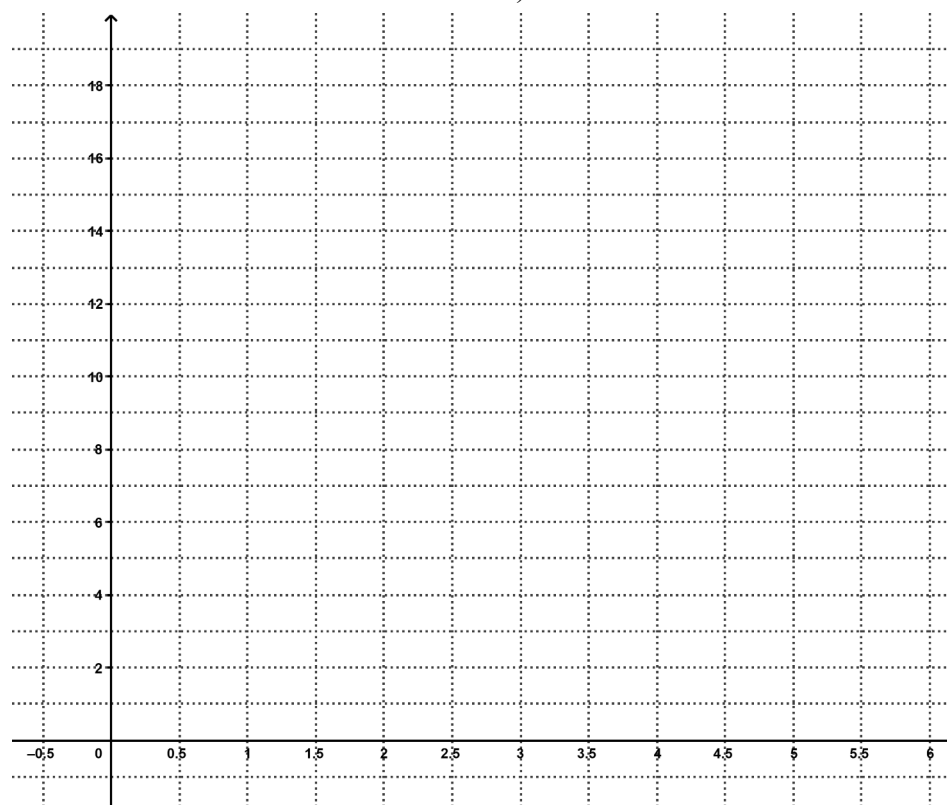
Dans tout l'exercice, l'unité est le centimètre.
On pose $AM = x$.



1. À quel intervalle appartient x ?
2. On note $f(x)$ l'aire du rectangle $AMNP$. Montrer que $f(x) = x\sqrt{36 - x^2}$.
3. À l'aide de votre calculatrice, compléter le tableau suivant :

x	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5	5,5	6
$f(x)$													

4. Tracer la courbe représentative de la fonction f (si vous le souhaitez, vous pouvez placer des points supplémentaires à l'aide de votre calculatrice).



5. À l'aide du graphique, donner une valeur approchée de la longueur AM à choisir si on veut que l'aire de $AMNP$ soit maximale. Que vaut alors (approximativement) l'aire du rectangle ?
6. Toujours à l'aide du graphique, répondre aux questions suivantes :
 - a. Combien de position de M correspondent à une aire de 14 cm^2 ?
 - b. Quelles sont les positions de M telles que l'aire du rectangle $AMNP$ soit supérieure à 12 cm^2 ? Soit inférieure à 6 cm^2 ?