Chapitre 13

Signe d'une fonction et inéquations

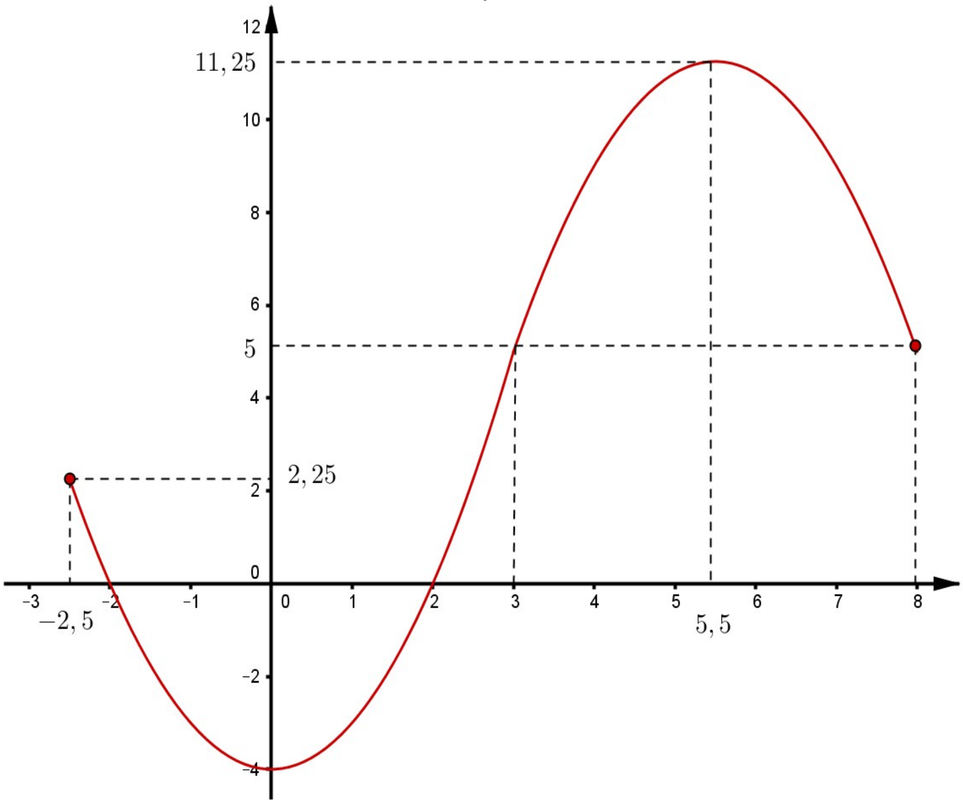
I. Étude du signe d'une fonction

Définition 1

Étudier le signe d'une fonction ou d'une expression $f(x)$ revient à déterminer les valeurs de x pour lesquelles $f(x)$ est positif, nul ou négatif. Le signe est souvent présenté sous la forme d'un **tableau de signes**.

Exemples

• Soit f une fonction définie sur $[-2,5;8]$ et C_f sa courbe représentative donnée ci-dessous :



La fonction f est :

‣ nulle si $x=-2$ ou $x=2$;

‣ positive si $x\in[-2,5;-2]$;

‣ négative si $x\in[-2;2]$;

‣ positive si $x\in[2;8]$.

On présente les résultats dans le tableau de signes suivant :

x	$-2,5$		-2		2		8
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

• Soit g la fonction carrée définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=x^2$. La fonction g est toujours positive et elle s'annule seulement pour $x=0$. On en déduit son tableau de signes :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$+$	

Remarque

Le tableau de signe d'une fonction comporte deux lignes :
• Sur la première ligne, on indique les éléments du domaine de définition de la fonction et les éventuelles valeurs de x pour lesquelles la fonction s'annule.
• Sur la deuxième ligne, on crée des cases dans lesquelles on indique le signe de la fonction ainsi que les zéros en dessous des valeurs de x pour lesquelles la fonction s'annule.

II. Étude du signe d'une fonction affine

Propriété 2

Soit a et b deux réels tels que $a\neq 0$.
La fonction affine f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=ax+b$ s'annule et change de signe une fois et une seule dans son ensemble de définition en $x=-\frac{b}{a}$.

• Si $a>0$, alors $f(x)>0 \Leftrightarrow x>-\frac{b}{a}$.

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	

• Si $a<0$, alors $f(x)>0 \Leftrightarrow x<-\frac{b}{a}$.

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	

Exemple

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=-3x+5$. f est une fonction affine.
On commence par chercher la valeur d'annulation de f :

$$f(x)=0 \Leftrightarrow -3x+5=0 \Leftrightarrow -3x=-5 \Leftrightarrow x=\frac{5}{3}$$

Ensuite, comme $a=-3<0$, la fonction est d'abord positive puis négative.
On en déduit le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		$\frac{5}{3}$		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	

Remarque

Pour trouver le signe d'une fonction affine, il est aussi possible d'utiliser son sens de variations :
Si $a>0$, alors la fonction affine est croissante et donc elle est d'abord négative puis positive.
Si $a<0$, la fonction affine est décroissante et donc elle d'abord positive puis négative.

III. Signe et opérations

Propriété 3

Pour déterminer le signe d'un produit ou d'un quotient de deux fonctions, on construit un tableau de signes à quatre lignes.
- La 1ère ligne indique les éléments de l'ensemble de définition et les valeurs de x pour lesquelles les deux fonctions s'annulent. Les valeurs doivent être placées en respectant l'ordre.
- Les 2e et 3e lignes indiquent le signe de chacune des deux fonctions.
- La 4e ligne se remplit avec la règle des signes d'un produit ou d'un quotient :
  - des facteurs de même signe donnent un produit ou un quotient positif ;
  - des facteurs de signes contraires donnent un produit ou un quotient négatif.

Exemples

• Soit la fonction f définie par $f(x)=(7x+14)(-2x+4)$.
La fonction f est un produit de deux fonctions affines et est définie sur $\mathbb{R}$.
‣ On commence par chercher les valeurs d'annulation de $7x+14$ et $-2x+4$.
$7x+14=0 \Leftrightarrow 7x=-14 \Leftrightarrow x=-2$ et $-2x+4=0 \Leftrightarrow -2x=-4 \Leftrightarrow x=2$.
‣ On détermine le signe de chacune des deux expression précédentes.
La fonction $x \rightarrow 7x+14$ est croissante, donc elle est d'abord négative puis positive.
La fonction $x \rightarrow -2x+4$ est décroissante, donc elle est d'abord positive puis négative.
‣ On réunit ses résultats dans un tableau de signes et on le complète.

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$7x+14$		$-$	0	$+$		$+$	
$-2x+4$		$+$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

• Soit la fonction g définie par $g(x)=\dfrac{8x-4}{3x+5}$.

La fonction g est un quotient de deux fonctions affines et est définie sur $\mathbb{R}\setminus\left\{-\dfrac{5}{3}\right\}$.

En effet, un quotient ne peut pas s'annuler.
Or $3x+5=0 \Leftrightarrow 3x=-5 \Leftrightarrow x=-\dfrac{5}{3}$. Donc $-\dfrac{5}{3}$ est une valeur interdite.

‣ On commence par chercher les valeurs d'annulation de $8x-4$ et $3x+5$.

$8x-4=0 \Leftrightarrow 8x=4 \Leftrightarrow x=\dfrac{1}{2}$ et $3x+5=0 \Leftrightarrow 3x=-5 \Leftrightarrow x=-\dfrac{5}{3}$.

‣ On détermine le signe de chacune des deux expression précédentes.
La fonction $x \rightarrow 8x-4$ est croissante, donc elle est d'abord négative puis positive.
La fonction $x \rightarrow 3x+5$ est croissante, donc elle est d'abord négative puis positive.
‣ On réunit ses résultats dans un tableau de signes et on le complète.

x	$-\infty$		$-\frac{5}{3}$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$8x-4$		$-$		$-$	0	$+$	
$3x+5$		$-$	0	$+$		$+$	
$g(x)$		$+$	$\|\|$	$-$	0	$+$	

Remarques

• Le tableau de signes peut être constitué de plus de quatre lignes. Par exemple, si l'expression étudiée est un produit de trois facteurs, alors il y aura une ligne supplémentaire dans le tableau.
• Lorsque l'on étudie le signe d'un quotient, il faut faire attention à ce que celui-ci ne s'annule pas. Il y aura donc une valeur interdite et une double barre.
• Lorsque l'on connaît le signe de termes d'une somme, on ne peut pas en général déterminer son signe, sauf si ses les termes sont tous de même signes.
Par exemple, x^2 et 4 sont chacun positifs pour tout réel x , donc $x^2+4\geqslant 0$.

IV. Signe et inéquations

Étudier le signe d'une expression peut permettre de résoudre une inéquation.
Résolvons l'inéquation $(3x+9)(-x+2)\leqslant 0$.
‣ On commence par chercher les valeurs d'annulation de $3x+9$ et $-x+2$.
$3x+9=0 \Leftrightarrow 3x=-9 \Leftrightarrow x=-3$ et $-x+2=0 \Leftrightarrow -x=-2 \Leftrightarrow x=2$.
‣ On détermine le signe de chacune des deux expressions précédentes.
La fonction $x \rightarrow 3x+9$ est croissante, donc elle est d'abord négative puis positive.
La fonction $x \rightarrow -x+2$ est décroissante, donc elle est d'abord positive puis négative.
‣ On réunit ses résultats dans un tableau de signes et on le complète.

x	$-\infty$		-3		2		$+\infty$
$3x+9$		$-$	0	$+$		$+$	
$-x+2$		$+$		$+$	0	$-$	
$(3x+9)(-x+2)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Ainsi $(3x+9)(-x+2)\leqslant 0 \Leftrightarrow x\in\,]-\infty;-3]\cup[2;+\infty[$.