

Chapitre 13

Fonctions de référence

I. Fonction carrée

Définition 1

La **fonction carrée** est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$.

Propriété 2

La fonction carrée est une **fonction positive** sur $\mathbb{R}$.

Démonstration

Pour tout réel x , $x^2 \geq 0$. Donc la fonction carrée est positive sur $\mathbb{R}$.

Propriété 3

La fonction carrée est **strictement décroissante** sur l'intervalle $]-\infty; 0]$ et **strictement croissante** sur l'intervalle $[0; +\infty[$.

Démonstration (exigible)

Soit f la fonction carrée et a et b deux réels tels que $a < b$.

On a $f(a) - f(b) = a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$. On cherche alors le signe de $f(a) - f(b)$.

• Sur l'intervalle $]-\infty; 0]$.

On a $a < b \leq 0$. $a < b \Leftrightarrow a - b < 0$ et $a < b \leq 0 \Leftrightarrow a + b < 0$.

Les deux réels $(a + b)$ et $(a - b)$ étant négatifs, on en déduit que $f(a) - f(b)$ est positif.

$f(a) - f(b) > 0 \Leftrightarrow f(a) > f(b)$.

Ainsi, sur $]-\infty; 0]$, si $a < b$, alors $f(a) > f(b)$. Donc la fonction carrée est strictement décroissante sur $]-\infty; 0]$.

• Sur l'intervalle $[0; +\infty[$.

On a $0 \leq a < b$. $a < b \Leftrightarrow a - b < 0$ et $0 \leq a < b \Leftrightarrow a + b > 0$.

Les deux réels $(a + b)$ et $(a - b)$ étant de signes opposés, on en déduit que $f(a) - f(b)$ est négatif.

$f(a) - f(b) < 0 \Leftrightarrow f(a) < f(b)$.

Ainsi, sur $[0; +\infty[$, si $a < b$, alors $f(a) < f(b)$. Donc la fonction carrée est strictement croissante sur $[0; +\infty[$.

Tableau de variations

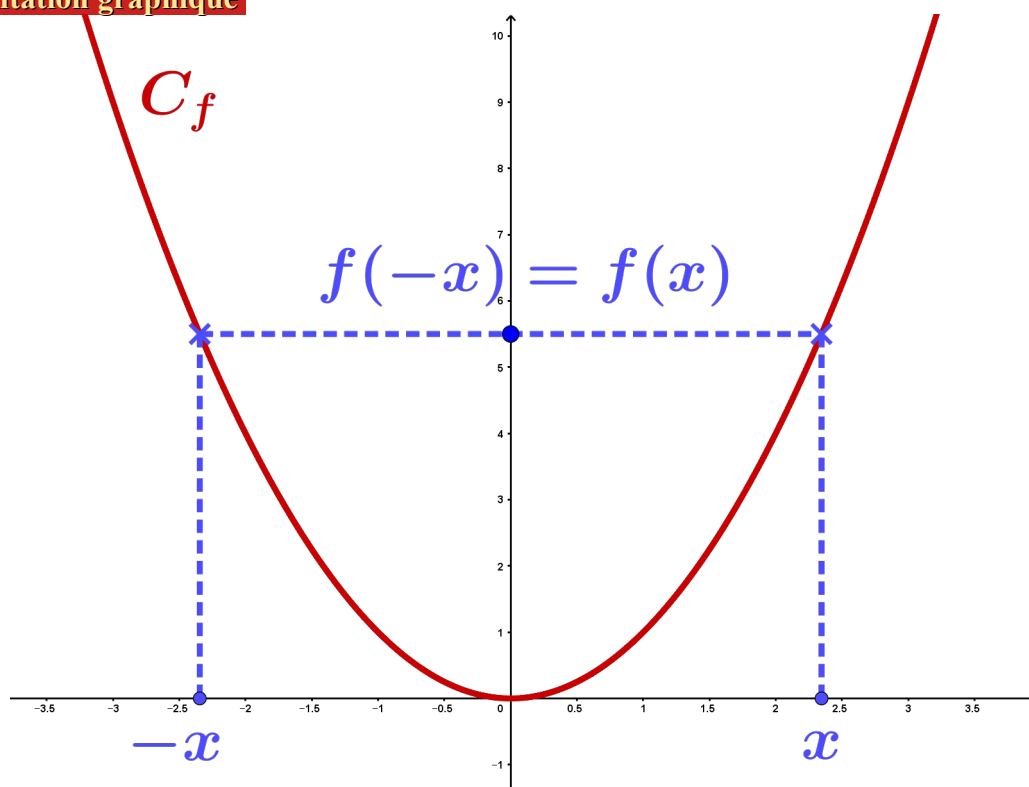
x	$-\infty$	0	$+\infty$
x^2			

Propriété 4

- Deux nombres positifs et leurs carrés sont rangés dans le même ordre :
si $0 \leq a \leq b$ alors $0 \leq a^2 \leq b^2$
- Deux nombres négatifs et leurs carrés sont rangés dans l'ordre inverse :
si $a \leq b \leq 0$ alors $0 \leq b^2 \leq a^2$

Exemples

- Soit un nombre réel x tel que $x \geq 5$.
Cette inéquation revient à écrire $x \geq 5 \geq 0$.
Comme la fonction carrée est croissante sur $[0; +\infty[$, le sens de l'inégalité reste inchangé et on obtient alors $x^2 \geq 5^2$, c'est-à-dire $x^2 \geq 25$.
- Soit un nombre réel x tel que $1 \leq x \leq 3$.
Comme la fonction carrée est croissante sur $[0; +\infty[$, le sens de l'inégalité reste inchangé et on obtient alors $1^2 \leq x^2 \leq 3^2$, c'est-à-dire $1 \leq x^2 \leq 9$.
- Soit un nombre réel x tel que $x < -2$.
Cette inéquation revient à écrire $x < -2 < 0$.
Comme la fonction carrée est décroissante sur $] -\infty; 0]$, le sens de l'inégalité change et on obtient alors $x^2 > (-2)^2$, c'est-à-dire $x^2 > 4$.

Représentation graphique**Remarques**

- La courbe représentative de la fonction carrée est une courbe appelée **parabole**.
- La courbe représentative de la fonction carrée est **symétrique par rapport à l'axe des ordonnées**.

Propriété 5

Soit a un nombre réel. On considère l'équation $x^2 = a$ dans $\mathbb{R}$. Alors :

- Si $a < 0$, l'équation n'admet aucune solution.
- Si $a = 0$, l'équation admet $x = 0$ comme unique solution.
- Si $a > 0$, l'équation admet deux solutions $x = \sqrt{a}$ et $x = -\sqrt{a}$.

Exemples

- L'équation $x^2 = 2$ admet deux solutions : $x = \sqrt{2}$ ou $x = -\sqrt{2}$.
- L'équation $x^2 + 1 = 0$ n'admet aucune solution. En effet, cette équation est équivalente à $x^2 = -1$. Or un carré est toujours positif ou nul.

Propriété 6

Soit a un nombre réel. On considère l'inéquation $x^2 \leq a$ dans $\mathbb{R}$. Alors :

- Si $a < 0$, l'inéquation n'admet aucune solution.
- Si $a = 0$, l'inéquation admet $x = 0$ comme unique solution.
- Si $a > 0$, l'inéquation admet l'ensemble solutions $[-\sqrt{a}; \sqrt{a}]$.

Exemples

- L'inéquation $x^2 \leq -2$ n'admet aucune solution.
- L'inéquation $x^2 \leq 5$ admet l'ensemble solution $[-\sqrt{5}; \sqrt{5}]$.

II. Fonction inverse**Définition 7**

La **fonction inverse** est la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \frac{1}{x}$.

Remarque

La fonction inverse n'est pas définie en 0 car on ne peut pas diviser par 0. On dit qu'elle admet une **valeur interdite en 0**.

Propriété 8

La fonction inverse est une **fonction négative** sur $] -\infty ; 0[$ et **positive** sur $] 0 ; +\infty [$.

Démonstration

Si $x < 0$, alors $\frac{1}{x} < 0$. Ainsi la fonction inverse est négative sur $] -\infty ; 0[$.

Si $x > 0$, alors $\frac{1}{x} > 0$. Ainsi la fonction inverse est positive sur $] 0 ; +\infty [$.

Propriété 9

La fonction inverse est **strictement décroissante** sur $]-\infty; 0[$ et également **strictement décroissante** sur $]0; +\infty[$.

Démonstration (exigible)

Soit f la fonction inverse et a et b deux réels tels que $a < b$.

On a $f(a) - f(b) = \frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{b}{ab} - \frac{a}{ab} = \frac{b-a}{ab}$. On cherche alors le signe de $f(a) - f(b)$.

• Sur l'intervalle $]-\infty; 0[$.

On a $a < b < 0$. $a < b \Leftrightarrow b - a > 0$ et $a < b \leq 0 \Leftrightarrow ab > 0$.

Les deux réels $(a+b)$ et $(a-b)$ étant positifs, on en déduit que $f(a) - f(b)$ est positif.

$f(a) - f(b) > 0 \Leftrightarrow f(a) > f(b)$.

Ainsi, sur $]-\infty; 0[$, si $a < b$, alors $f(a) > f(b)$. Donc la fonction inverse est strictement décroissante sur $]-\infty; 0[$.

• Sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

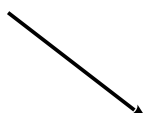
On a $0 < a < b$. $a < b \Leftrightarrow b - a > 0$ et $0 < a < b \Leftrightarrow ab > 0$.

Les deux réels $(a+b)$ et $(a-b)$ étant positifs, on en déduit que $f(a) - f(b)$ est positif.

$f(a) - f(b) > 0 \Leftrightarrow f(a) > f(b)$.

Ainsi, sur $]0; +\infty[$, si $a < b$, alors $f(a) > f(b)$. Donc la fonction inverse est strictement décroissante sur $]0; +\infty[$.

Tableau de variations

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\frac{1}{x}$			

Remarque

Les variations d'une fonction ne peuvent s'étudier que sur un intervalle.

On ne peut donc pas évoquer de décroissance sur $]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$ qui n'est pas un intervalle mais conclure de manière séparée que la fonction inverse est décroissante sur l'intervalle $]-\infty; 0[$ et décroissante sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

Propriété 10

• Deux nombres positifs et leurs inverses sont rangés dans l'ordre inverse :

$$\text{si } 0 < a \leq b, \text{ alors } \frac{1}{a} \geq \frac{1}{b}$$

• Deux nombres négatifs et leurs inverses sont rangés dans l'ordre inverse :

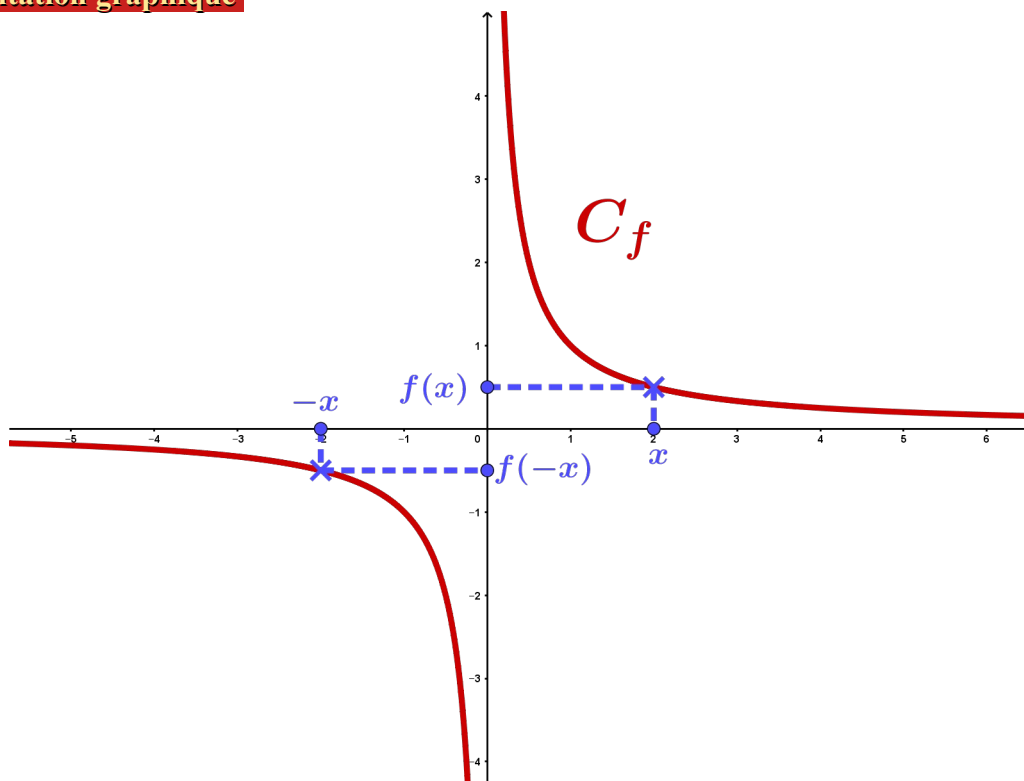
$$\text{si } a \leq b < 0, \text{ alors } \frac{1}{a} \geq \frac{1}{b}$$

Exemple

Soit un nombre réel x tel que $x \geq 4$. Cette inéquation revient à écrire $x \geq 4 > 0$.

Comme la fonction inverse est décroissante sur $]0; +\infty[$, le sens de l'inégalité change et on obtient

alors $\frac{1}{x} \leq \frac{1}{4}$.

Représentation graphique**Remarques**

- La courbe représentative de la fonction inverse est une courbe appelée **hyperbole**.
- La courbe représentative de la fonction inverse est **symétrique par rapport au centre du repère**.

III. Fonction racine carrée**Définition 11**

La **fonction racine carrée** est la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x}$.

Propriété 12

La fonction racine carrée est **positive sur** $[0; +\infty[$.

Propriété 13

La fonction racine carrée est **strictement croissante sur** $[0; +\infty[$.

Démonstration

Soit deux réels a et b tels que $0 \leq a < b$. On veut comparer $f(a) = \sqrt{a}$ et $f(b) = \sqrt{b}$.

Pour cela, on calcule leur différence $f(b) - f(a) = \sqrt{b} - \sqrt{a}$.

On multiplie ensuite ce nombre par son expression conjuguée. On a :

$$f(b) - f(a) = (\sqrt{b} - \sqrt{a}) \times \frac{\sqrt{b} + \sqrt{a}}{\sqrt{b} + \sqrt{a}} = \frac{\sqrt{b^2} - \sqrt{a^2}}{\sqrt{b} + \sqrt{a}} = \frac{b - a}{\sqrt{b} + \sqrt{a}}$$

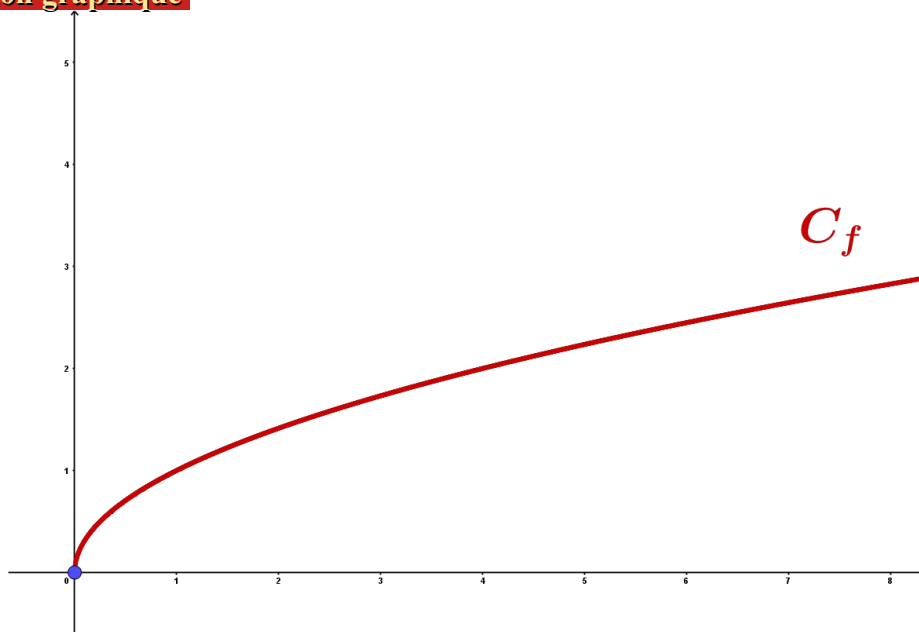
Or $\sqrt{b} + \sqrt{a} > 0$, donc $f(b) - f(a)$ est du signe de $b - a$.

Comme $b - a > 0$, alors $f(b) - f(a) > 0$, donc $f(a) < f(b)$.

La fonction racine carrée est donc strictement croissante sur $[0; +\infty[$.

Tableau de variations

x	0	$+\infty$
$\sqrt{x}$	0	$\nearrow$

Représentation graphique**IV. Fonction cube****Définition 14**

La **fonction cube** est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3$.

Propriété 15

La fonction cube est une **fonction négative** sur $] -\infty; 0[$ et **positive** sur $] 0; +\infty[$.

Démonstration

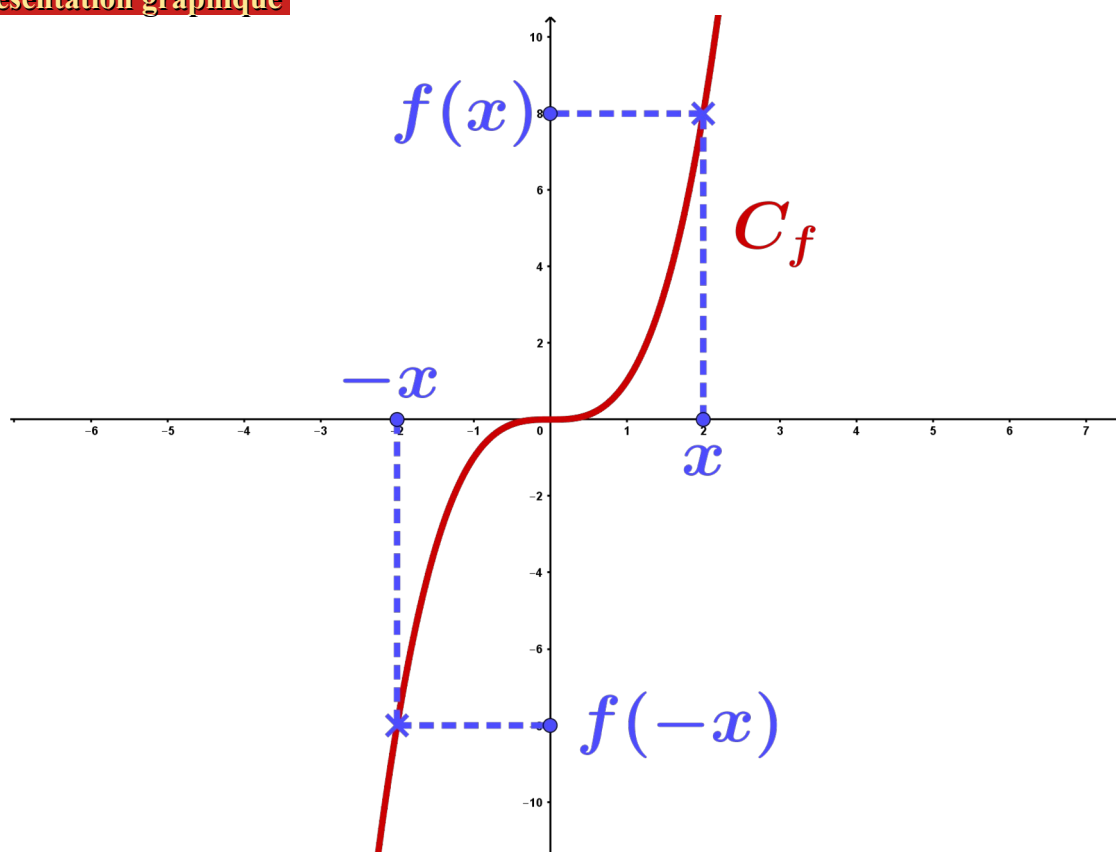
Pour tout réel x , $f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$.

Propriété 16

La fonction cube est **strictement croissante** sur $\mathbb{R}$.

Tableau de variations

x	$-\infty$	$+\infty$
x^3		

Représentation graphique**Remarque**

La courbe représentative de la fonction inverse est **symétrique par rapport au centre du repère**.

Propriété 17

Soit a un nombre réel. L'équation $x^3 = a$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$ que l'on appelle **racine cubique** de a et que l'on note $\sqrt[3]{a}$ ou $x = a^{\frac{1}{3}}$.

Exemples

- $x^3=8 \Leftrightarrow x=\sqrt[3]{8} \Leftrightarrow x=8^{\frac{1}{3}} \Leftrightarrow x=2$.
- $x^3=-125 \Leftrightarrow x=\sqrt[3]{-125} \Leftrightarrow x=(-125)^{\frac{1}{3}} \Leftrightarrow x=-5$.

V. Fonction valeur absolue**Définition 18**

La **fonction valeur absolue** est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=|x|$.
 Le nombre $|x|$ est égal au nombre x si x est positif et au nombre $-x$ si x est négatif.
 Autrement dit :

- Si $x \geq 0$, alors $|x|=x$.
- Si $x \leq 0$, alors $|x|=-x$.

Exemples

- $|5|=5$
- $|-3|=3$
- $|3-\pi|=-(3-\pi)=\pi-3$

Remarque

Deux nombres opposés ont la même valeur absolue : pour tout réel x , $|x|=|-x|$.

Propriété 19

La fonction valeur absolue est **positive sur** $\mathbb{R}$.

Propriété 20

La fonction racine carrée est **strictement décroissante sur** $] -\infty ; 0]$ et **strictement croissante sur** $[0 ; +\infty [$.

Démonstration

Soit deux réels a et b tels que $a < b$. On veut comparer $f(a)=|a|$ et $f(b)=|b|$.
 Pour cela, on calcule leur différence $f(a)-f(b)=|a|-|b|$.

- Sur l'intervalle $] -\infty ; 0]$.

On a $a < b \leq 0$.

Par définition de la valeur absolue sur $] -\infty ; 0]$, $f(a)-f(b)=-a-(-b)=-a+b=b-a$.

Or $a < b$, donc $0 < b-a$. On en déduit que $f(a)-f(b)$ est positif.

$f(a)-f(b) > 0 \Leftrightarrow f(a) > f(b)$. Ainsi, sur $] -\infty ; 0]$, si $a < b$, alors $f(a) > f(b)$.

Donc la fonction valeur absolue est strictement décroissante sur $] -\infty ; 0]$.

- Sur l'intervalle $[0 ; +\infty [$.

On a $0 \leq a < b$.

Par définition de la valeur absolue sur $] -\infty ; 0]$, $f(a)-f(b)=a-b$.

Or $a < b$, donc $a-b < 0$. On en déduit que $f(a)-f(b)$ est négatif.

$f(a)-f(b) < 0 \Leftrightarrow f(a) < f(b)$. Ainsi, sur $[0 ; +\infty [$, si $a < b$, alors $f(a) < f(b)$.

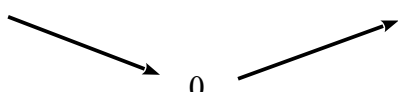
Donc la fonction valeur absolue est strictement croissante sur $[0 ; +\infty [$.

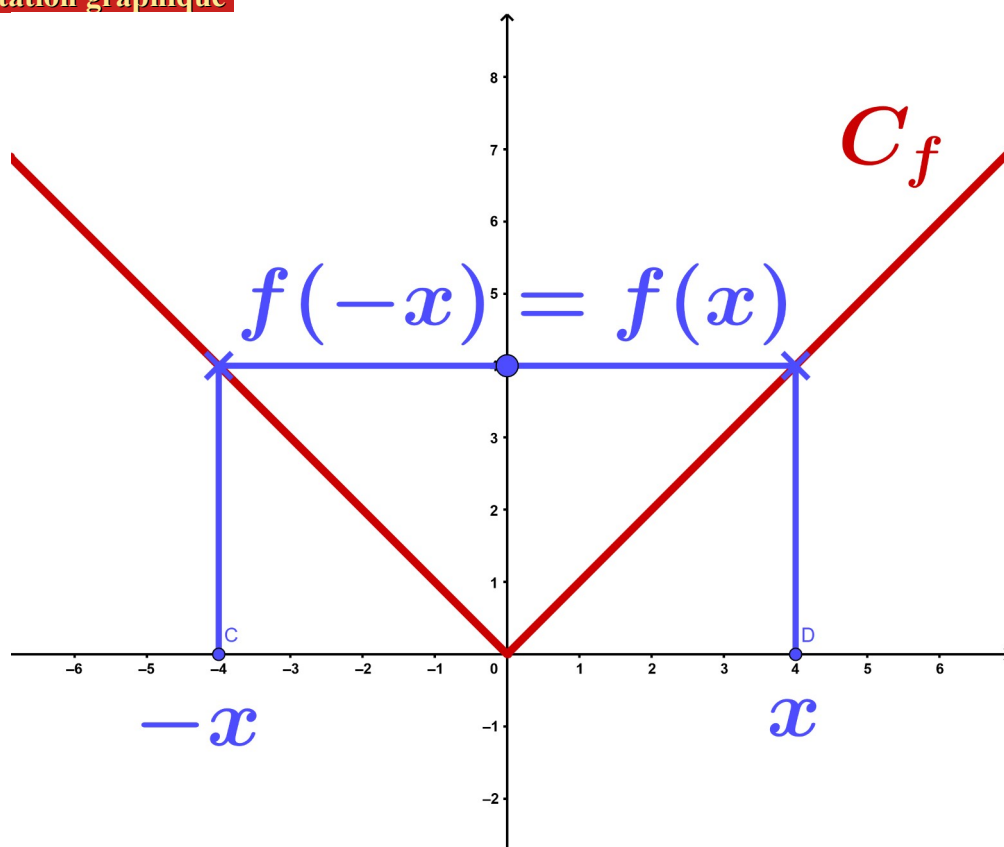
Remarque

On peut aussi utiliser la définition de la valeur absolue et les variations des fonctions affines.

- Soit x un réel négatif. Alors $|x| = -x$. Or la fonction $x \rightarrow -x$ est une fonction affine de coefficient directeur négatif et donc strictement décroissante. Ainsi la fonction valeur absolue est strictement décroissante sur $]-\infty; 0]$.
- Soit x un réel positif. Alors $|x| = x$. Or la fonction $x \rightarrow x$ est une fonction affine de coefficient directeur positif et donc strictement croissante. Ainsi la fonction valeur absolue est strictement croissante sur $[0; +\infty[$.

Tableau de variations

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$ x $			

Représentation graphique

Remarques

- La courbe représentative de la fonction valeur absolue est **symétrique par rapport à l'axe des ordonnées**.
- La courbe représentative de la fonction carrée est une **fonction affine par morceaux**.

Propriété 21

Pour tout réel x , $\sqrt{x^2} = |x|$.

Exemples

- $\sqrt{36} = \sqrt{6^2} = 6$
- $\sqrt{(-4)^2} = 4$

Propriété 22 (hors programme)

- $|x| = 0$ équivaut à $x = 0$.
- $|x| = |y|$ équivaut à $x = y$ ou $x = -y$.
- Pour tous réels x et y , on a :
 - $|xy| = |x| \times |y|$
 - si $y \neq 0$, $\left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|}$
 - $|x + y| \leq |x| + |y|$ (inégalité triangulaire)

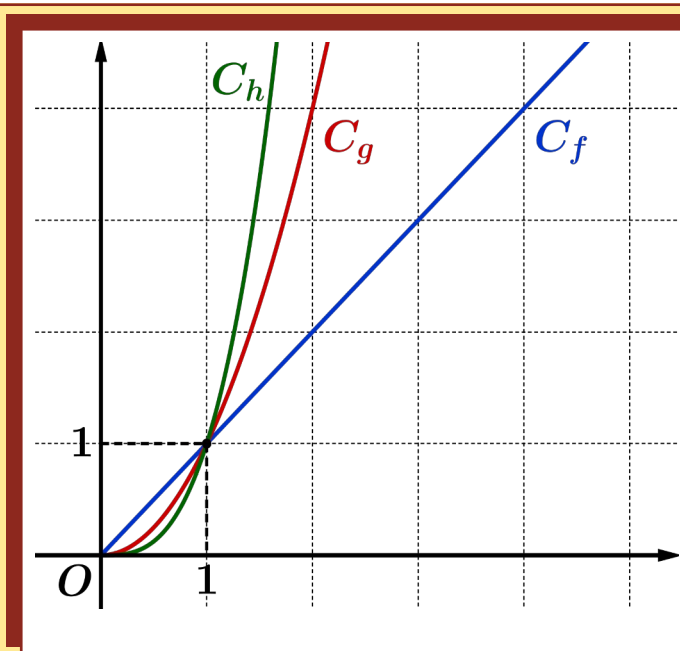
VI. Positions relatives de courbes de référence

Propriété 23

- Soit x un nombre réel positif.
- Si $0 \leq x \leq 1$, alors $x^3 \leq x^2 \leq x$.
 - Si $x \geq 1$, alors $x \leq x^2 \leq x^3$.

Propriété 24

- Soit f , g et h les fonctions définies sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = x$, $g(x) = x^2$ et $h(x) = x^3$. On note C_f , C_g et C_h leurs représentations graphiques respectives dans un repère $(O; I, J)$.
- Si $0 \leq x \leq 1$, alors C_g est « en dessous » de C_f qui est « en dessous » de C_h .
 - Si $x \geq 1$, alors C_h est « en dessous » de C_f qui est « en dessous » de C_g .



Démonstration (exigible)

- Pour comparer x^2 et x , on va étudier le signe de leur différence.

Pour tout réel x positif, on a $x^2 - x = x(x - 1)$.

On étudie le signe du produit à l'aide d'un tableau de signe.

x	0	1	$+\infty$
x	0	+	+
$x-1$	-	0	+
$x(x-1)$	0	-	0
			+

Si $x \in]0; 1[$, $x^2 - x < 0$ donc $x^2 < x$ et donc C_g est située en-dessous de C_f .

Si $x \in]1; +\infty[$, $x^2 - x > 0$ donc $x^2 > x$ et donc C_g est située au-dessus de C_f .

Si $x=0$ ou $x=1$, alors C_g et C_f se croisent.

- De même, on étudie le signe de $x^3 - x^2$.

Pour tout réel x positif, $x^3 - x^2 = x^2(x - 1)$.

On étudie le signe du produit à l'aide d'un tableau de signe.

x	0	1	$+\infty$
x^2	0	+	+
$x-1$	-	0	+
$x^2(x-1)$	0	-	0
			+

Si $x \in]0; 1[$, $x^3 - x^2 < 0$ donc $x^3 < x^2$ et donc C_h est située en-dessous de C_g .

Si $x \in]1; +\infty[$, $x^3 - x^2 > 0$ donc $x^3 > x^2$ et donc C_h est située au-dessus de C_g .

Si $x=0$ ou $x=1$, alors C_h et C_g se croisent.