

Chapitre 13

Combinatoire et dénombrement

I. Définitions générales

I.1 Ensemble et vocabulaire

Définition 1

Un ensemble E est une collection d'objets distincts x qu'on appelle **élément**.
On dit alors que x appartient à E et on note $x \in E$.

Remarques

- Pour lister un ensemble d'éléments isolés les uns des autres, on utilise des accolades.
- L'ensemble qui ne contient aucun élément s'appelle l'ensemble vide et se note \emptyset .
- L'ordre n'intervient pas : $\{a; b\} = \{b; a\}$. De plus, il n'y a pas répétition d'un élément : $\{a; a\} = \{a\}$.

Exemples

- $E = \{1; 2; 3\}$ est un ensemble à trois éléments.
- \mathbb{Z} est l'ensemble des entiers relatifs et possède une infinité d'éléments.

Définition 2

Soit E un ensemble. On appelle partie de E un ensemble F tels que tous les éléments de F appartiennent aussi à E . On dit que F est **inclus** dans E et on note $F \subset E$.

Remarques

- On dit aussi que F est un sous-ensemble de E .
- Une partie à un élément s'appelle un singleton et une partie à deux éléments s'appelle une paire.

Exemple

L'ensemble $F = \{a; b\}$ est une partie de l'ensemble $E = \{a; b; c; d; e\}$.

Définition 3

Soit A et B deux ensembles.

- La réunion $A \cup B$ est l'ensemble des éléments appartenant à A **ou** à B .
- L'intersection $A \cap B$ est l'ensemble des éléments appartenant à A **et** à B .

Définition 4

Soit A et B deux ensembles. A et B sont **disjoints** lorsqu'ils ne possèdent aucun élément en commun, autrement dit quand leur intersection est vide. On note $A \cap B = \emptyset$.

Exemples

- Soit les ensembles $A = \{a; c; d; f\}$ et $B = \{b; c; d\}$. Alors $A \cup B = \{a; b; c; d; f\}$ et $A \cap B = \{c; d\}$.
- Soit l'ensemble A composé des nombres pairs strictement positifs et B l'ensemble des nombres impairs strictement positifs. Alors $A \cup B = \mathbb{N}^*$ et $A \cap B = \emptyset$.

Définition 5

On appelle **k -uplet** ou **k -liste** d'un ensemble E une collection ordonnée d'objets qu'on appelle, selon les cas, coordonnées, composantes ou termes. Un k -uplet s'écrit avec des parenthèses.

Remarques

- Un 2-uplet s'appelle un **couple** et un 3-uplet s'appelle un **triplet**.
- L'ordre intervient, c'est-à-dire que $(a; b) \neq (b; a)$.
- Les objets peuvent être identiques. De ce fait, le couple $(a; a)$ existe.

Exemple

On lance deux fois de suite une pièce de monnaie équilibrée. Chaque résultat de cette expérience est un 2-uplet, c'est-à-dire un couple, formé des lettres P et F . Ainsi $\Omega = \{(P; P); (P; F); (F; P); (F; F)\}$.

I.2 Ensemble fini et cardinal**Définition 6**

Soit un entier naturel n . Un ensemble E est dit **fini** s'il possède n éléments. Le nombre n d'éléments de E est appelé **cardinal** de E , noté $\text{Card}(E)$.

Remarques

- $\text{Card}(\emptyset) = 0$.
- Certains ensembles ne sont pas finis. C'est par exemple le cas de l'ensemble \mathbb{N} et des intervalles.

Exemple

L'ensemble $E = \{a; b; c; d; e\}$ est un ensemble fini à cinq éléments et $\text{Card}(E) = 5$.

II. Principes additif et multiplicatif**II.1 Principe additif****Propriété 7**

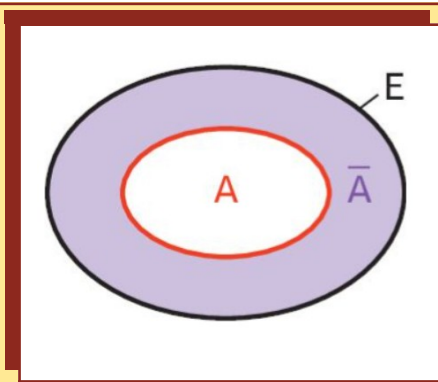
Soit un entier naturel n supérieur ou égal à 2 et A_1, A_2, \dots, A_n des ensembles finis disjoints deux à deux. Alors $\text{Card}(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = \sum_{k=1}^n \text{Card}(A_k) = \text{Card}(A_1) + \text{Card}(A_2) + \dots + \text{Card}(A_n)$.

Démonstration

Cette démonstration est admise car elle est hors programme.

Propriété 8

Soit A une partie d'un ensemble E fini et \bar{A} le complémentaire de A dans E .
Alors $\text{Card}(\bar{A}) = \text{Card}(E) - \text{Card}(A)$.



Démonstration

Cette démonstration est admise car elle est hors programme.

II.2 Principe multiplicatif

Définition 9

Soit E et F deux ensembles non vides. Le **produit cartésien** de E par F , noté $E \times F$, est l'ensemble des couples $(x; y)$ où $x \in E$ et $y \in F$. Ainsi $E \times F = \{(x; y), x \in E, y \in F\}$.

Remarque

$A \times B$ se lit « A croix B ».

Exemple

Soit les ensembles $A = \{1; 2\}$ et $B = \{a; b; c\}$. On a $A \times B = \{(1; a); (1; b); (1; c); (2; a); (2; b); (2; c)\}$ et $B \times A = \{(a; 1); (b; 1); (c; 1); (a; 2); (b; 2); (c; 2)\}$.

Propriété 10

Soit E et F deux ensembles finis non vides. Alors $\text{Card}(E \times F) = \text{Card}(E) \times \text{Card}(F)$.

Attention!

Le signe \times dans $\text{Card}(E \times F)$ désigne le produit cartésien des ensembles E et F , alors que celui dans $\text{Card}(E) \times \text{Card}(F)$ désigne la multiplication du nombre d'éléments de E par celui de F .

Propriété 11

Soit k un entier naturel supérieur ou égal à 2 et E_1, E_2, \dots, E_k, k ensembles non vides. On note les k -uplets $(x_1; x_2; \dots; x_k)$, avec $x_i \in E_i$ pour i allant de 1 à k .

- L'ensemble de ces k -uplets est le produit cartésien $E_1 \times E_2 \times \dots \times E_k$.
- Si les ensembles E_1, E_2, \dots, E_k sont **finis**, alors :

$$\text{Card}(E_1 \times E_2 \times \dots \times E_k) = \prod_{i=1}^k \text{Card}(E_i) = \text{Card}(E_1) \times \text{Card}(E_2) \times \dots \times \text{Card}(E_k)$$

Exemple

Soit l'ensemble $E = \{1; 2; 3; 4; 5\}$. $(1; 3; 5)$ est un arrangement de 3 éléments, ou un 3-arrangement, de E et $(2; 5; 3; 1)$ est un arrangement de 4 éléments, ou un 4-arrangement de E .

Théorème 17

Soit n un entier naturel non nul et k un entier naturel tel que $1 \leq k \leq n$.

Soit E un ensemble fini non vide à n éléments. Le nombre de k -arrangements de E est :

$$A_n^k = n \times (n-1) \times \dots \times (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Démonstration

Pour construire un k -uplet d'éléments distincts de E , on a n choix pour le premier élément, $n-1$ choix pour le second élément, ..., $n-k+1$ choix pour le k -ième.

Ainsi, le nombre de k -arrangements de E est égal à $n \times (n-1) \times \dots \times (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$.

Exemple

On dispose de trois jetons et de cinq boîtes notées A, B, C, D et E . On doit ranger les jetons dans les boîtes, une boîte ne pouvant pas contenir deux jetons. On dispose de cinq possibilités pour le premier jeton, de quatre possibilités pour le deuxième et de trois possibilités pour le troisième. Les rangements possibles sont donc les 3-uplets d'éléments deux à deux distincts de l'ensemble

$$T = \{A; B; C; D; E\}. \text{ Leur nombre est } A_5^3 = \frac{5!}{(5-3)!} = 5 \times 4 \times 3 = 60.$$

III.3 Permutations d'un ensemble**Définition 18**

Soit n un entier naturel et E un ensemble fini non vide à n éléments.

Une permutation de E est un n -uplet d'éléments deux à deux distincts de E .

Remarque

Les permutations d'un ensemble correspondent à tous les ordres possibles dans les n -uplets constitués des éléments de l'ensemble.

Exemple

Soit l'ensemble $E = \{a; b; c\}$.

Les permutations de E sont : $(a; b; c)$, $(a; c; b)$, $(b; a; c)$, $(b; c; a)$, $(c; a; b)$ et $(c; b; a)$.

Théorème 19

Soit n un entier naturel non nul. Le nombre de permutations d'un ensemble fini non vide à n éléments est $n!$.

Démonstration

Cette démonstration est admise car elle est hors programme.

Exemple

Soit l'ensemble $E = \{a; b; c\}$. Le nombre de permutations de E est $3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$.

IV. Combinaisons

IV.1 Partie d'un ensemble fini

Définition 20

Une partie d'un ensemble E est un sous-ensemble de E .

Exemple

Soit l'ensemble $E = \{1; 2; 3; 4\}$. $\{1; 2; 3\}$ et \emptyset sont des parties de E .

Théorème 21

Soit n un entier naturel et E un ensemble fini à n éléments. Le nombre de parties de E est égal au nombre de n -uplets de l'ensemble $\{0; 1\}$, c'est-à-dire 2^n .

Démonstration

Pour constituer une partie de E , il y a deux choix pour chaque élément de E : l'incorporer dans cette partie ou pas. Puisque E possède n éléments, cela donne au total 2^n parties possibles. Ainsi il y a autant de parties de E que de n -uplet de $\{0; 1\}$, soit 2^n .

IV.2 Combinaisons

Définition 22

Soit n et k deux entiers naturels tels que $0 \leq k \leq n$ et E un ensemble fini de cardinal n . On appelle **combinaison** de k éléments de E toute partie de E ayant k éléments.

Le nombre de combinaisons de k éléments parmi n est noté $\binom{n}{k}$.

Remarque

Les nombres $\binom{n}{k}$ sont appelés les **coefficients binomiaux**.

Exemple

Au bridge, chaque joueur possède une main de 13 cartes extraites d'un jeu de 52 cartes. Il y a donc $\binom{52}{13}$ nombre de mains possibles.

Propriété 23

Soit n et k deux entiers naturels tels que $0 \leq k \leq n$. Alors $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Exemple

On considère les mots de longueur 3 formés avec les lettres de l'alphabet $E = \{a; b\}$. Construire un mot contenant exactement deux lettres a revient à déterminer la position des deux lettres a dans le mot de trois lettres, c'est-à-dire une combinaison de deux lettres de l'ensemble $\{1; 2; 3\}$.

Or il y en a $\binom{3}{2} = \frac{3!}{2!(3-2)!} = \frac{3!}{2! \times 1!} = \frac{3!}{2!} = 3$.

Remarque

On peut aussi déterminer les combinaisons à l'aide de la calculatrice.

Méthode pour déterminer les coefficients binomiaux avec la calculatrice :

- Casio 35+ et supérieur : Pour calculer $\binom{5}{2}$, dans le menu RUN (calcul), appuyer sur la touche OPTN, puis choisir PROB. Tapez 5, puis choisir nCr, puis taper 2 et EXE.
- TI 82 et supérieur : Pour calculer $\binom{5}{2}$, taper 5, puis appuyer sur la touche MATH, choisir le menu PROB, puis choisir nCr ou Combinaison (version fr), puis taper 2 et ENTER.

IV.3 Propriétés des combinaisons**Propriété 24**

Soit n un entier naturel.

- $\binom{n}{0} = 1$. Dans un ensemble à n éléments, il existe une seule partie à 0 élément : la partie vide.
- $\binom{n}{1} = n$. Dans un ensemble à n éléments, il existe n parties ayant un élément.
- $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$. Dans un ensemble à n éléments, il y a $\frac{n(n-1)}{2}$ parties ayant deux éléments.
- $\binom{n}{n} = 1$. Dans un ensemble à n éléments, il y a une seule partie à n éléments : l'ensemble lui-même.

Propriété 25 (Propriété de symétrie)

Pour tous entiers n et k vérifiant $0 \leq k \leq n$, $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$. Dénombrer les parties à k éléments revient à dénombrer les parties à $(n-k)$ éléments qui en sont les complémentaires.

Exemple

Pour $n=5$ et $k=2$, on a bien $\binom{5}{2}=10$ et $\binom{5}{5-2}=\binom{5}{3}=10$.

Théorème 26 (Relation de Pascal)

Pour tous entiers naturels $n \geq 2$ et k vérifiant $1 \leq k \leq n-1$, $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$.

Remarque

Ces propriétés permettent de tracer le triangle de Pascal.

- $\binom{n}{0} = 1$ assure que la première colonne ne contient que des 1 ;
- $\binom{n}{n} = 1$ assure que la diagonale ne contient que des 1 ;
- $\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}$ permet de déterminer n'importe quel coefficient binomial à partir de deux connus auparavant.

Par exemple, pour $n=5$ et $k=2$, on a

$$\binom{5}{2} = \binom{4}{1} + \binom{4}{2} = 4 + 6 = 10.$$

$n \backslash k$	0	1	2	3	4	5
0	1					
1	1	1				
2	1	2	1			
3	1	3	3	1		
4	1	4	6	4	1	
5	1	5	10	10	5	1

Remarque

On peut facilement faire le lien avec les identités remarquables avec a et b deux réels :

- $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
- $(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$
- $(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$. Cette dernière formule est appelée **formule du binôme de Newton**.

Propriété 27

Pour tout entier naturel n , $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$.

Démonstration

Soit E un ensemble fini à n éléments. Pour tout entier naturel k inférieur ou égal à n , on note E_k l'ensemble des parties de E composées de k éléments. On a alors $\text{Card}(E_k) = \binom{n}{k}$.

Les E_k sont deux à deux disjoints et leur réunion est E .

$$\text{Ainsi } 2^n = \text{Card}(E) = \text{Card}(E_1 \cup \dots \cup E_k) = \sum_{k=0}^n \text{Card}(E_k) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}.$$

V. Critères à retenir

Pour dénombrer toutes les éventualités d'un problème, les deux critères à prendre en compte sont :

- les éléments peuvent-ils être répétés ?
- l'ordre des éléments est-il à prendre en compte ?

On résume alors les différentes réponses dans le tableau suivant :

Critères	Répétition	Pas de répétition
Ordre	k -listes ou k -uplets (n^k)	k -listes d'éléments distincts (arrangement ou permutation)
Pas d'ordre	Combinaisons avec répétition (hors programme)	Combinaisons $\binom{n}{k}$