

Colinéarité de vecteurs

I. Produit d'un vecteur par un réel

Soit k un nombre réel et $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ un vecteur dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

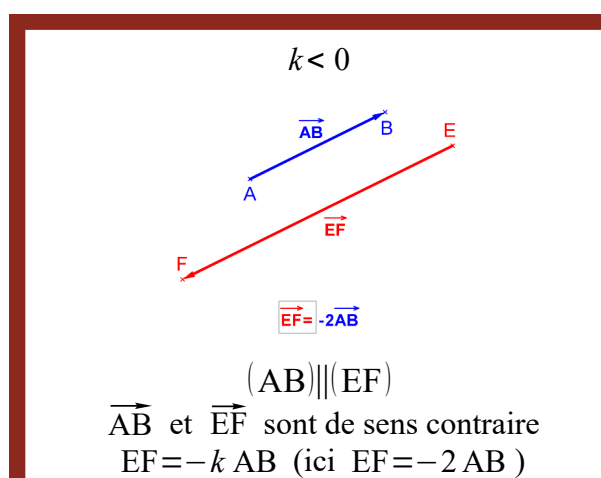
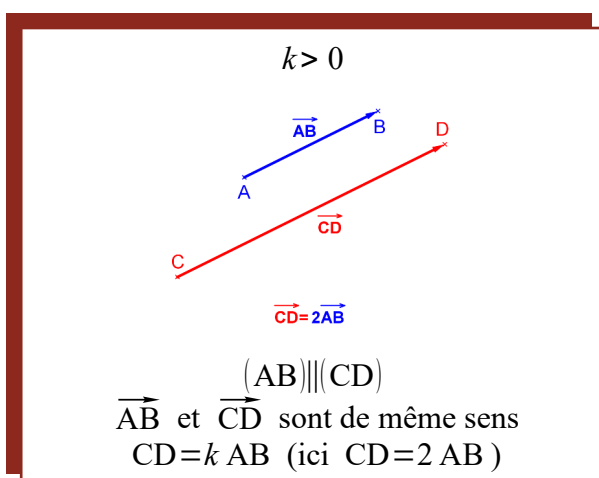
Le vecteur $k\vec{u}$ est le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} kx \\ ky \end{pmatrix}$ dans le même repère.

Soit k et k' deux nombres réels et $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs. On a :

- $k(\vec{u} + \vec{v}) = k\vec{u} + k\vec{v}$.
- $(k + k')\vec{u} = k\vec{u} + k'\vec{u}$.
- $k(k')\vec{u} = kk'\vec{u}$.
- $k\vec{u} = \vec{0}$ si et seulement si $k = 0$ ou $\vec{u} = \vec{0}$.

Le produit d'un vecteur $\vec{u}$ par un nombre réel k est un vecteur, noté $k\vec{u}$ tel que :

- Si $k > 0$, alors $k\vec{u}$ et $\vec{u}$ ont même direction, sont de même sens et $\|k\vec{u}\| = k\|\vec{u}\|$.
- Si $k < 0$, alors $k\vec{u}$ et $\vec{u}$ ont même direction, sont de sens opposé et $\|k\vec{u}\| = -k\|\vec{u}\|$.
- Si $k = 0$, alors $k\vec{u}$ est le vecteur nul.



II. Colinéarité de deux vecteurs

Deux vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{CD}$ sont dits **colinéaires** s'ils ont la **même direction**, donc si $(AB) \parallel (CD)$.

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nul.

Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement s'il existe un réel k non nul tel que $\vec{v} = k\vec{u}$.

Remarques

- Le vecteur nul est colinéaire à tous les vecteurs.
- Dans l'égalité $\vec{v} = k\vec{u}$, k est le **coefficient de colinéarité**.

Deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si **leurs coordonnées sont proportionnelles**.

Dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$, soit les vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$.

On appelle **déterminant** des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ le nombre $\det(\vec{u}, \vec{v}) = xy' - x'y$.

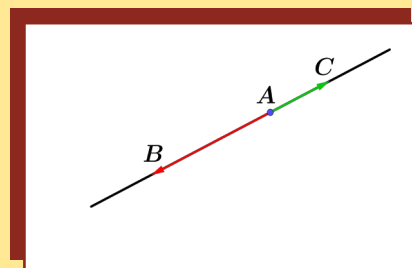
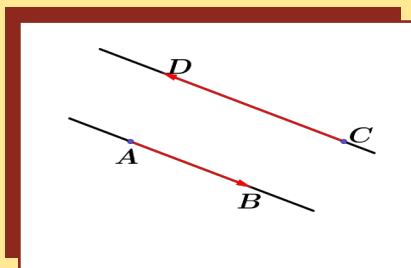
Dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$, soit les vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$.

Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si $\det(\vec{u}, \vec{v}) = 0$.

III. Parallélisme et alignement

• **Deux droites (AB) et (CD) sont parallèles** si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.

• **Trois points A, B et C sont alignés** si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.



IV. Décomposition d'un vecteur

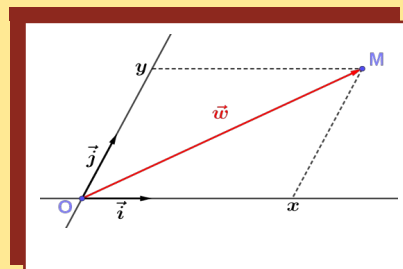
On appelle **base** du plan tout **couple de deux vecteurs non colinéaires**.

Remarque

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non colinéaires forment une base notée $(\vec{u}, \vec{v})$.

• Dire qu'un point M a pour coordonnées $(x; y)$ dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (ou une base $(\vec{i}, \vec{j})$) signifie que $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$.

• Dire qu'un vecteur $\vec{w}$ a pour coordonnées $(x; y)$ dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (ou une base $(\vec{i}, \vec{j})$) signifie que $\vec{w} = x\vec{i} + y\vec{j}$.



Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non colinéaires du plan.

Pour tout vecteur $\vec{w}$ du plan, il existe un unique couple de réels $(a; b)$ tels que $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$.

Le couple $(a; b)$ est appelé couple des coordonnées du vecteur $\vec{w}$ dans la base $(\vec{u}, \vec{v})$.