Fonction exponentielle

Exercice 1

Calculer la dérivée de chacune des fonctions f suivantes :

1. $f(x)=\exp(x)+1$; **2.** $f(x)=\exp(x)+2x$; **3.** $f(x)=x^2-\exp(x)$;
4. $f(x)=5\exp(x)$; **5.** $f(x)=2x\exp(x)$; **6.** $f(x)=x^2\exp(x)$;
7. $f(x)=\dfrac{2\exp(x)}{x}$; **8.** $f(x)=-\exp(x)$; **9.** $f(x)=\dfrac{x}{\exp(x)}$.

Exercice 2

Simplifier les expressions suivantes :

1. $\exp(3)\times\exp(5)$; **2.** $\dfrac{\exp(5)}{\exp(2)}$; **3.** $\exp(-7)\times\exp(2)$;
4. $\exp(3x)\times\exp(2x)$; **5.** $\exp(-x)\times\exp(x)$; **6.** $\exp(-x)\times\exp(-x)$;
7. $\exp(x)\times\exp(2x)$; **8.** $\exp(-2x)\times\exp(4x)$; **9.** $\dfrac{\exp(x+2)}{\exp(x)}$;
10. $\exp(5-2x)\times\exp(-2x)$; **11.** $\exp(4x)\times\exp(-x-2)$; **12.** $\dfrac{\exp(-3x)}{\exp(-2x)}$;
13. $\dfrac{\exp(-3+x)}{\exp(x+1)}$; **14.** $\exp(-3x-1)\times\exp(-2-x)$. **15.** $\dfrac{\exp(2+x)}{\exp(3x-5)}$.

Exercice 3

Établir l'égalité suivante pour tout réel x : $\dfrac{2}{1+\exp(x)}=2-\dfrac{2}{1+\exp(-x)}$.

Exercice 4

Écrire chacune des expressions suivantes en utilisant la notation e^x :

1. $\exp(2x)$; **2.** $(\exp(x))^3$; **3.** $\dfrac{\exp(x+2)}{\exp(x)}$; **4.** $\dfrac{\exp(-x)\exp(2x)}{\exp(3x)}$.

Exercice 5

Simplifier les expressions suivantes :

1. $e^{-5}\times e^3$; **2.** $(e^3)^2\times e^2$; **3.** $\dfrac{e^5}{e^2}$; **4.** $\dfrac{e^{-5}}{e^3}$;
5. $\dfrac{e^3\times e^5}{e^2}$; **6.** $\dfrac{e^{-4}\times e^3}{e^{-1}\times e^5}$; **7.** $e^{-2}\times(e^2)^3$; **8.** $\dfrac{e^2\times e^{-3}}{e^3\times e^{-2}}$.

Exercice 6

Simplifier les expressions données pour tout réel x :

1. $e^x\times e^{-2x}$; **2.** $(e^x)^2\times e^{-x}$; **3.** $e^{2x}\times e^{-2x}$; **4.** $(e^x)^2\times(e^{-x})^3$;
5. $e^{x+2}\times e^{-x}$; **6.** $e^{x+1}\times e^{3-x}$; **7.** $(e^{2x})^3\times(e^{-x})^2$; **8.** $(e^{1-x})^2\times e^{2x}$;
9. $\dfrac{e^{-3x+1}}{e^{2x}}$; **10.** $\dfrac{e^{2x-3}}{e^{3-x}}$; **11.** $\dfrac{e^{x-2}\times e^{3x}}{e^{1-2x}}$; **12.** $\dfrac{e^{-2x}\times e^{5x}}{e^{-3x}\times e^{-4x}}$.

Exercice 7

Simplifier les expressions données pour tout réel x :

1. $\left(e^{x}\right)^{3} e^{-2x}$; **2.** $\dfrac{e^{2x+1}}{e^{-2x}}$; **3.** $\dfrac{e^{3x-1}}{e^{2-x}}$; **4.** $\sqrt{\dfrac{20\,e^{5x}}{5\,e^{-4x}}}$;

5. $e^{-3x} e^{3x}$; **6.** $e^{2x+1} e^{-4x-3}$; **7.** $\sqrt{\dfrac{3\,e^{x-1}}{e^{2x+1}}}$; **8.** $\left(e^{x}\right)^{5} e^{-2x}$;

9. $\dfrac{e^{2x} e^{-4x}}{e^{3x+1}}$; **10.** $\dfrac{e^{2x+3}}{e^{2x-1}}$; **11.** $\dfrac{e^{-x+2} e^{-2x-1}}{e^{3x+2} e^{-x-1}}$; **12.** $\dfrac{e^{x}+e^{-x}}{e^{-x}}$.

Exercice 8

Démontrer pour tout réel x les égalités suivantes :

1. $\dfrac{e^{-x}}{e^{x}+1}=\dfrac{e^{-2x}}{1+e^{-x}}$; **2.** $\dfrac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}}=\dfrac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}}$;

3. $\dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}=\dfrac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}}$; **4.** $\dfrac{e^{2x}-1}{e^{x}+1}=e^{x}\dfrac{1-e^{-2x}}{1+e^{-x}}$;

5. $\left(e^{x}+e^{-x}\right)^{2}-\left(e^{x}-e^{-x}\right)^{2}=4$; **6.** $\dfrac{e^{x}-1}{e^{x}+1}=\dfrac{1-e^{-x}}{1+e^{-x}}$;

7. $e^{-x}-e^{-2x}=\dfrac{e^{x}-1}{e^{2x}}$; **8.** $\dfrac{e^{x}}{e^{x}+1}=\dfrac{1}{e^{-x}+1}$.

Exercice 9

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\dfrac{e^{x}-1}{e^{x}+1}$.

Calculer $f(-x)$ puis comparer avec $f(x)$. Qu'en déduit-on ?

Exercice 10

Dans chacun des cas, donner l'ensemble de définition de f , sa dérivée f' et l'ensemble de dérivabilité de f .

1. $f(x)=e^{x}$; **2.** $f(x)=-3\,e^{x}$; **3.** $f(x)=x+e^{x}$;

4. $f(x)=(0,4x-2)e^{x}$; **5.** $f(x)=(x+1)^{2}e^{x}$; **6.** $f(x)=x^{2}e^{x}$;

7. $f(x)=2x-1+\dfrac{e^{x}}{e^{x}+1}$; **8.** $f(x)=\dfrac{e^{x}}{x^{2}+1}$; **9.** $f(x)=\dfrac{2\,e^{x}-1}{e^{x}+3}$;

10. $f(x)=e^{x}-3x-1$; **11.** $f(x)=xe^{x}-1$; **12.** $f(x)=\dfrac{e^{x}-2}{e^{x}+2}$.

Exercice 11

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $\left(e^{x}\right)^{3}=e^{x-1}$; **2.** $e^{x}=1$; **3.** $e^{2x}=e$;

4. $e^{x}=e^{-x}$; **5.** $e^{2x+1}=e^{\frac{5}{2}}$; **6.** $\left(e^{x}\right)^{2}=\left(e^{-x}\right)^{2}e^{3}$;

7. $\dfrac{e^{-x}-3}{e^{-x}-5}=\dfrac{1}{2}$; **8.** $e^{6x}+2\,e^{3x}-3=0$; **9.** $e^{x}+e^{1-x}-(e+1)=0$.

Exercice 12

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $e^{x}=-4$; **2.** $\left(e^{x}-3\right)^{2}=9$; **3.** $2e^{2x}-e^{x}+1=0$;
4. $e^{x^2-5}=e^{-4x}$; **5.** $e^{x+1}\times e^{3x+5}=1$; **6.** $e^{2x+1}-1=0$;
7. $\left(e^{x}\right)^{2}=e^{5x+4}$; **8.** $\left(e^{-x}-e\right)\left(e^{3x}+5\right)=0$; **9.** $e^{x}-e^{-x}=0$;
10. $e^{5x}=-1$; **11.** $e^{\cos(x)}=e^{\frac{1}{2}}$; **12.** $\left(e^{2}-e^{3x}\right)\left(1-e^{x}\right)=0$.

Exercice 13

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

1. $e^{x}<1$; **2.** $4e^{2x}<3e^{x}+1$; **3.** $e^{2x-1}>\sqrt{e}$;
4. $1\leqslant e^{3x}$; **5.** $e^{x+3}\geqslant\dfrac{1}{e^{x}}$; **6.** $e^{-x}\leqslant e^{x}$;
7. $e^{x}<e^{-x}+1$; **8.** $\left(e^{x}\right)^{2}\geqslant e^{-x-1}$; **9.** $e^{x}>e$;
10. $e^{2x}\leqslant 1$; **11.** $\left(e^{x}\right)^{3}\leqslant\dfrac{1}{e}$; **12.** $e^{x}-\dfrac{1}{e^{x}}>0$.

Exercice 14

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

1. $\dfrac{2e^{x}+3}{e^{x}+3}<\dfrac{1}{2}$; **2.** $\left(e^{x}\right)^{2}\leqslant\left(e^{-x}\right)^{2}$; **3.** $(x+2)\left(e^{x}-1\right)\geqslant 0$;
4. $\dfrac{e^{5x+3}}{e^{x-4}}\leqslant\dfrac{1}{e}$; **5.** $e^{7-3x^2}>e^{2-2x}$; **6.** $\dfrac{e^{x}+3}{e^{x}+1}>2$;
7. $e^{-x^2}\leqslant e^{x-2}$; **8.** $e^{x+3}-e^{x^2+x-1}\leqslant 0$; **9.** $e^{-x-2}\leqslant\dfrac{1}{e^{x}}$.

Exercice 16

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r et de premier terme a . Démontrer que la suite (v_n) définie par $v_n=e^{u_n}$ est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

Exercice 17

Donner la nature et la raison des suites ci-dessous :

1. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n=e^{n}$; **2.** Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n=e^{-6n}$;
3. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n=e^{3n}$; **4.** Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n=e^{2}n$.

Exercice 18

Étudier le sens de variations des suites ci-dessous :

1. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n=e^{5n}$; **2.** Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n=e^{-n}$;
3. $u_0=2$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}=e^{0,5}u_n$; **4.** $u_1=-1$ et pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $u_{n+1}=u_n+e^{-2}$.

Exercice 19

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $e^{x^2+2}=\dfrac{e^{2x}}{e}$.

Exercice 20

Soit un entier naturel n non nul. On considère la somme $\mathrm{S}=\sum_{k=0}^{n} e^k=1+\mathrm{e}+\mathrm{e}^2+\ldots+\mathrm{e}^n$.

1. Démontrer que S est la somme des termes consécutifs d'une suite géométrique.
2. Déterminer S en fonction de n.
3. Pour quelle valeur de n la somme S va-t-elle dépasser un milliard ?

Exercice 21

Soit n un entier naturel. Déterminer une expression des sommes suivantes en fonction de n :

1. $\mathrm{S}=\sum_{k=0}^{n} e^{2k}=1+e^2+e^4+\ldots+e^{2n}$; **2.** $\mathrm{S}=\sum_{k=0}^{n} e^{0,5k}=1+e^{0,5}+e+e^{1,5}+\ldots+e^{0,5n}$.

Exercice 22

Déterminer une valeur approchée à 10^{-2} près des sommes suivantes :

1. $\mathrm{S}=\sum_{k=0}^{5} e^{2k}=1+e+e^4+\ldots+e^{10}$; **2.** $\mathrm{S}=\sum_{k=0}^{10} e^{0,01k}=1+e^{0,01}+e+e^{0,02}+\ldots+e^{0,1}$.

Exercice 23

Étudier le signe des expressions suivantes sur $\mathbb{R}$:

1. $x^2\mathrm{e}^x$; **2.** $-3\mathrm{e}^{5-x}$; **3.** $(x+1)(\mathrm{e}^x-1)$;
4. $x\,\mathrm{e}^{-x^2+1}$; **5.** $4\mathrm{e}^{-x^2}$; **6.** $\mathrm{e}^{2x}-3x\mathrm{e}^{2x}$.

Exercice 24

Dans chacun des cas, donner l'ensemble de définition de f, sa dérivée f' et l'ensemble de dérivabilité de f.

1. $f(x)=\mathrm{e}^{3x}-3\mathrm{e}^x$; **2.** $f(x)=(0,4x-2)\mathrm{e}^{-0,1x}$; **3.** $f(x)=\mathrm{e}^{-x^3}$;
4. $f(x)=\mathrm{e}^{\frac{2x+1}{x+4}}$; **5.** $f(x)=x e^{-x^2}$; **6.** $f(x)=\dfrac{3}{1+\mathrm{e}^{-2x}}$;
7. $f(x)=x+1-3xe^{-x^2}$; **8.** $f(x)=\dfrac{3\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x-2}$; **9.** $f(x)=x+(1-x)\mathrm{e}^{2x}$.

Exercice 25

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\dfrac{2}{\mathrm{e}^{x-1}+1}$ et on note C_f sa courbe représentative dans un repère. Déterminer l'équation réduite de la tangente T à C_f en $x=1$.

Exercice 26

Soit f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=(x-2)\mathrm{e}^x+x+1$ et $g(x)=(x-1)\mathrm{e}^x+1$.
1. Étudier les variations de la fonction g. En déduire que, pour tout $x\in\mathbb{R}$, $g(x)\geqslant 0$.
2. Déterminer la dérivée de f et vérifier que $f'(x)=g(x)$.
3. En déduire les variations de la fonction f.

Problèmes

Problème 1 *...Équation de tangente...*

On considère f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=xe^{-x}+1$.

1. a. Montrer que, pour tout réel x, $f'(x)=\mathrm{e}^{-x}(1-x)$.

b. En déduire le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$.

2. Montrer que l'équation réduite de la tangente T à C_f au point d'abscisse 0 est $y=x+1$.

Problème 2 *...Étude classique...*

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $\mathbb{R}$ par $f(x)=(3-x)\mathrm{e}^{x}+1$.

1. Montrer que, pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $\mathbb{R}$, $f'(x)=(2-x)\mathrm{e}^{x}$.

2. Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $\mathbb{R}$.

3. a. Soit T la tangente à la courbe représentative de la fonction f au point d'abscisse 3.

Montrer que T a pour équation $y=-e^{3}x+3\mathrm{e}^{3}+1$.

b. Déterminer les coordonnées du point d'intersection de la droite T et de l'axe des abscisses.

Problème 3 *...Étude à l'aide d'une fonction auxiliaire...*

Soit la fonction f définie et dérivable sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=\mathrm{e}^{x}+\dfrac{1}{x}$.

Partie A : Étude d'une fonction auxiliaire

1. Soit la fonction g définie et dérivable sur $[0;+\infty[$ par $g(x)=x^{2}\mathrm{e}^{x}-1$.
Étudier le sens de variations de la fonction g et déterminer sa limite en $+\infty$. On dressera son tableau de variations.

2. On suppose qu'il existe un unique réel α dans $[0;+\infty[$ tel que $g(\alpha)=0$.
En déduire le signe de la fonction g sur $[0;+\infty[$.

Partie B : Étude de la fonction f

1. Déterminer les limites de la fonction f en 0 et $+\infty$.

2. On note f' la fonction dérivée de f sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

Démontrer que pour tout réel strictement positif, $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^{2}}$.

3. En déduire le sens de variations de la fonction f et dresser son tableau de variations sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

4. Démontrer que la fonction f admet pour minimum le nombre réel $m=\dfrac{1}{\alpha^{2}}+\dfrac{1}{\alpha}$.

5. Justifier que $3,43<m<3,45$.

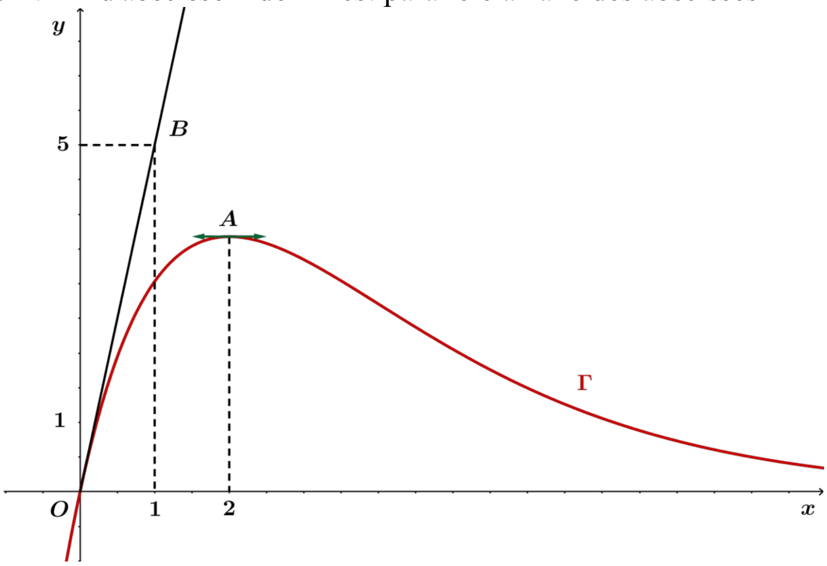
Problème 4 *...Des inconnues...*

Le graphique ci-dessous donne, dans un repère orthogonal, la courbe représentative de Γ d'une fonction f définie sur $[0\,;+\infty[$ et dérivable sur cet intervalle. On précise que :

• l'origine O du repère appartient à Γ

• la droite d passant par O et par le point B de coordonnées $(1\,;5)$ est tangente en O à Γ

• la tangente au point A d'abscisse 2 de Γ est parallèle à l'axe des abscisses



1. En utilisant le graphique et les renseignements donnés ci-dessus :

a. Préciser $f(0)$, $f'(0)$ et $f'(2)$.

b. Préciser le sens de variations de f. Dresser son tableau de variations.

2. On suppose que la fonction f est définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f(x)=(ax+b)\mathrm{e}^{cx}$, avec a, b et c des réels.

a. En utilisant $f(0)$, déterminer b.

b. Calculer $f'(x)$.

c. En utilisant $f'(0)$ et $f'(2)$, déterminer a et c.

Problème 5 *...Encore une étude à l'aide d'une fonction auxiliaire...*

Partie A

On considère la fonction g définie sur $[0\,;+\infty[$ par $g(x)=\mathrm{e}^x-x-1$.

1. Étudier les variations de la fonction g sur $[0\,;+\infty[$.

2. Déterminer le signe de la fonction g sur $[0\,;+\infty[$.

3. En déduire que pour tout réel $x\in[0\,;+\infty[$, $\mathrm{e}^x-x>0$.

Partie B

On considère la fonction f définie sur $[0\,;1]$ par $f(x)=\dfrac{\mathrm{e}^x-1}{\mathrm{e}^x-x}$. On admet que f est strictement croissante sur $[0\,;1]$.

1. Montrer que pour tout réel $x\in[0\,;1]$, $f(x)\in[0\,;1]$.

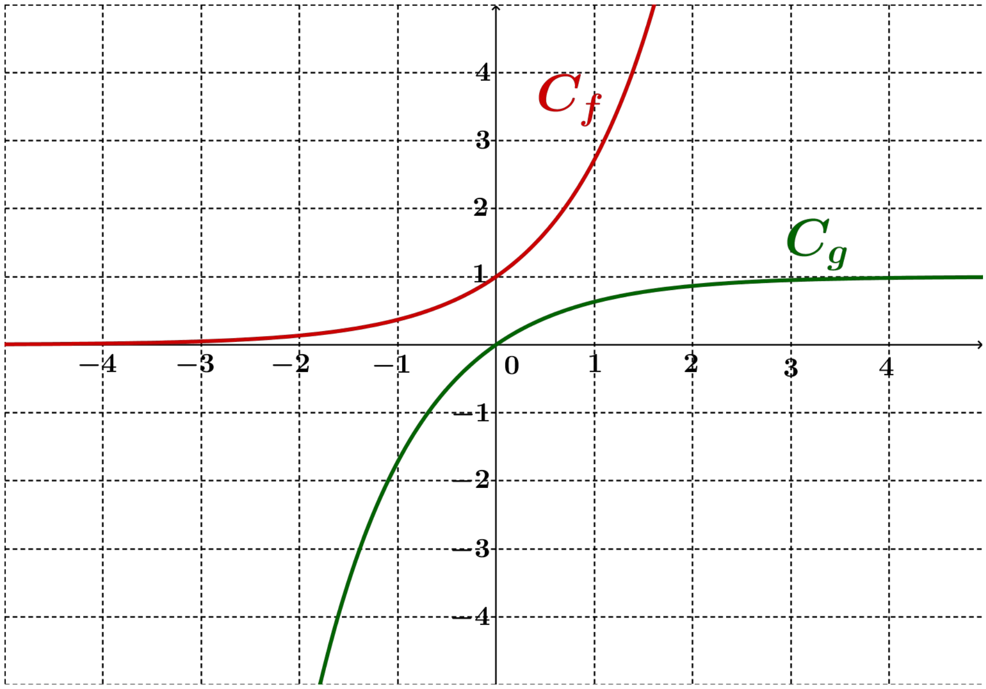
2. Soit D la droite d'équation $y=x$.

a. Montrer que pour tout réel $x\in[0\,;1]$, $f(x)-x=\dfrac{(1-x)\,g(x)}{\mathrm{e}^x-x}$.

b. Étudier la position relative de la droite D et de la courbe représentative de f sur $[0\,;1]$.

Problème 6 *...Une histoire de tangentes...*

On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\mathrm{e}^x$ et $g(x)=1-\mathrm{e}^{-x}$.
Les courbes représentatives de ces fonctions dans un repère orthonormé du plan, notées C_f et C_g, sont données ci-dessous.



Partie A

Ces courbes semblent admettre deux tangentes communes. Tracer au mieux ces tangentes sur la figure ci-dessus.

Partie B

Dans cette partie, on admet l'existence de ces tangentes communes.
On note D l'une d'entre elles. Cette droite est tangente à la courbe C_f au point d'abscisse a et tangente à la courbe C_g au point B d'abscisse b.

1. a. Exprimer en fonction de a le coefficient directeur de la tangente à la courbe C_f au point A.
b. Exprimer en fonction de b le coefficient directeur de la tangente à la courbe C_g au point B.
c. En déduire que $b=-a$.

2. Démontrer que le réel a est solution de l'équation : $2(x-1)\mathrm{e}^x+1=0$.

Partie C

On considère la fonction Φ définie sur $\mathbb{R}$ par $\Phi(x)=2(x-1)\mathrm{e}^x+1$.

1. a. Calculer les limites de la fonction Φ en $-\infty$ et $+\infty$.
b. Déterminer la dérivée de la fonction Φ, puis étudier son signe.
c. Dresser le tableau de variations de la fonction Φ sur $\mathbb{R}$. Préciser la valeur de $\Phi(0)$.

2. On suppose que l'équation $\Phi(x)=0$ admet exactement deux solutions dans $\mathbb{R}$.
On note α la solution négative de l'équation $\Phi(x)=0$ et β la solution positive de cette même équation. Donner une valeur approchée de $\Phi(-2)$ et $\Phi(1)$.
À l'aide d'une calculatrice, donner un encadrement de α et β à 10^{-3} près.

Problème 7 *...Bénéfice hebdomadaire...*
Une entreprise fabrique des poulies utilisées dans l'industrie automobile. On suppose que toute la production est vendue. L'entreprise peut fabriquer entre 0 et 3600 poulies par semaine. On note x le nombre de milliers de poulies fabriquées et vendues en une semaine. (x varie donc dans l'intervalle $[0;3,6]$).
Le bénéfice hebdomadaire est noté $\mathrm{B}(x)$, il est exprimé en milliers d'euros. L'objet de cet exercice est d'étudier cette fonction B. Les parties A et B peuvent être traitées indépendamment l'une de l'autre.

Partie A : Étude graphique
On a représenté, en annexe, la fonction B dans un repère du plan. Chaque résultat sera donné à cent poulies près ou à cent euros près suivant les cas.
Les traits utiles à la compréhension du raisonnement seront laissés sur le graphique et une réponse écrite sur la copie sera attendue pour chaque question posée.
1. Déterminer dans quel intervalle peut varier le nombre de poulies pour que le bénéfice soit supérieur ou égal à 13000 euros.
2. Quel est le bénéfice maximum envisageable pour l'entreprise ? Pour quel nombre N de poulies fabriquées et vendues semble-t-il être réalisé ?
3. a. Justifier que l'équation $\mathrm{B}(x)=13$ admet deux solutions x_1 et x_2, l'une dans l'intervalle $[0;3]$ l'autre dans l'intervalle $[3;3,6]$.
b. À l'aide de la calculatrice, déterminer une valeur approchée à $0,01$ près de chacune des deux solutions.

Partie B : Étude théorique
Le bénéfice hebdomadaire noté $\mathrm{B}(x)$, exprimé en milliers d'euros vaut $\mathrm{B}(x)=-5+(4-x)\mathrm{e}^x$.
1. On note B' la fonction dérivée de la fonction B. Montrer que pour tout réel x de l'intervalle $\mathrm{I}=[0;3,6]$, on a : $\mathrm{B}'(x)=(3-x)\times\mathrm{e}^x$.
2. Déterminer le signe de la fonction dérivée B' sur l'intervalle I.
3. Dresser le tableau de variation de la fonction B sur l'intervalle I. On indiquera les valeurs de la fonction B aux bornes de l'intervalle.