

Chapitre 12

Système d'équations

Résoudre un système linéaire de deux équations à deux inconnues x et y revient à déterminer tous les couples $(x; y)$ qui vérifient les deux équations en même temps.

I. Système d'équations

Définition 1

Soit a, b, c, a', b' et c' des réels.

Résoudre le système d'équations à deux inconnues $\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a'x + b'y + c' = 0 \end{cases}$ c'est trouver tous les couples $(x; y)$ de nombres réels vérifiant simultanément les deux équations du système.

Remarque

Résoudre un système revient à chercher les coordonnées du point d'intersection, s'il existe, des droites dont les équations sont celles du système.

Définition 2

On appelle **couple solution** $(x; y)$ tout couple de réels x et y solutions simultanément des deux équations qui composent un système.

Définition 3

Soit a, b, c, a', b' et c' des réels et soit le système d'équations à deux inconnues suivant :

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a'x + b'y + c' = 0 \end{cases}$$

- Si les droites sont sécantes, le système admet **un seul couple solution**.
- Si les droites sont strictement parallèles, le système n'admet **aucune solution**.
- Si les droites sont confondues, le système possède **une infinité de solutions**.

II. Méthode de substitution

Propriété 4

Cette méthode consiste à **isoler une inconnue** :

- On isole une inconnue dans une des deux équations du système.
- On la remplace dans l'autre équation afin d'obtenir une nouvelle équation avec une seule inconnue.
- On résout cette nouvelle équation.
- On remplace l'inconnue trouvée dans l'une des deux équations du système afin de trouver la seconde inconnue.
- On donne l'ensemble des solutions du système.

Exemple

On cherche à résoudre le système suivant :
$$\begin{cases} 2x + 3y - 8 = 0 \\ 3x - 2y + 1 = 0 \end{cases}$$

- À l'aide de l'une des équations, on exprime l'une des deux inconnues en fonction de l'autre :

La première équation peut s'écrire : $2x = -3y + 8$, soit $x = -\frac{3}{2}y + 4$.

- On remplace, dans la deuxième équation, cette inconnue par l'expression obtenue :

$$3\left(-\frac{3}{2}y + 4\right) - 2y + 1 = 0$$

- On obtient ainsi une équation à une seule inconnue que l'on résout :

$$3\left(-\frac{3}{2}x + 4\right) - 2y - 1 = 0 \Leftrightarrow -\frac{9}{2}y + 12 - 2y + 1 = 0 \Leftrightarrow -\frac{13}{2}y = -13 \Leftrightarrow y = 2$$

- On remplace la valeur obtenue à l'étape précédente dans l'une des deux équations. On obtient alors une nouvelle équation à une inconnue que l'on résout pour obtenir la deuxième inconnue.

On décide de remplacer dans la première. On a alors :

$$2x + 3 \times 2 - 8 = 0 \Leftrightarrow 2x + 6 - 8 = 0 \Leftrightarrow 2x = 2 \Leftrightarrow x = 1$$

- Ainsi le système possède un unique couple solution qui est le couple $(1; 2)$.

III. Méthode par combinaison linéaire**Propriété 5**

Cette méthode consiste à **multiplier les deux équations par des nombres** de telle manière qu'en additionnant les équations membre membre, une inconnue s'élimine. Ainsi, il n'y a plus qu'à résoudre une équation à une seule inconnue. Pour trouver la deuxième inconnue, on remplace l'inconnue trouvée dans l'une des deux équations.

On l'appelle aussi la **méthode du pivot de Gauss**.

Exemple

On cherche à résoudre le système suivant :
$$\begin{cases} 2x + 3y - 8 = 0 \\ 3x - 2y + 1 = 0 \end{cases}$$

- En multipliant chacune des deux équations par un nombre adéquat, on égalise les coefficients de l'une des inconnues dans chaque équation.

On décide de multiplier la première équation par 3 et la seconde équation par 2. On a alors :

$$\begin{cases} (2x + 3y - 8) \times 3 = 0 \times 3 \\ (3x - 2y + 1) \times 2 = 0 \times 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x + 9y - 24 = 0 \\ 6x - 4y + 2 = 0 \end{cases}$$

- On soustrait l'une des deux équations à l'autre.

On décide de soustraire la deuxième équation à la première. On a alors :

$$6x + 9y - 24 - (6x - 4y + 2) = 0 - 0$$

- On obtient ainsi une équation à une seule inconnue que l'on résout :

$$6x + 9y - 24 - (6x - 4y + 2) = 0 - 0 \Leftrightarrow 6x + 9y - 24 - 6x + 4y - 2 = 0 \Leftrightarrow 13y = 26 \Leftrightarrow y = 2$$

- On remplace la valeur obtenue à l'étape précédente dans l'une des deux équations. On obtient alors une nouvelle équation à une inconnue que l'on résout pour obtenir la deuxième inconnue.

On décide de remplacer dans la première. On a alors :

$$2x + 3 \times 2 - 8 = 0 \Leftrightarrow 2x + 6 - 8 = 0 \Leftrightarrow 2x = 2 \Leftrightarrow x = 1$$

- Ainsi le système possède un unique couple solution qui est le couple $(1; 2)$.