Chapitre 12

Fonction exponentielle

I. Généralités sur la fonction exponentielle

Théorème 1

Il existe une unique fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que :
$$\begin{cases} f'=f \\ f(0)=1 \end{cases}$$
Cette fonction est appelée **fonction exponentielle**. On la note **exp**.

Démonstration

On admet l'existence d'une telle fonction. Montrons son unicité en deux étapes.

• On pose pour tout réel x, $h(x)=f(x)\times f(-x)$. La fonction h est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que produit de telles fonctions sur $\mathbb{R}$ et on a :

$h'(x)=f'(x)\times f(-x)+f(x)\times(-1)\times f'(-x)=f(x)\times f(-x)-f(x)\times f(-x)=0$.

La fonction h est donc une fonction constante sur $\mathbb{R}$.

Comme $h(0)=f(0)\times f(-0)=1\times 1=1$, on en déduit que pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f(x)\times f(-x)=1$.

On en déduit de ce résultat que pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f(x)\neq 0$.

• Soit g la fonction qui vérifie les mêmes propriétés que f : $g=g'$ et $g(0)=1$.

On définit la fonction k sur $\mathbb{R}$ par $k(x)=\dfrac{g(x)}{f(x)}$, ce qui est possible sur $\mathbb{R}$ d'après le premier point. La fonction k est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que quotient de telles fonctions sur $\mathbb{R}$ et on a :

$k'(x)=\dfrac{g'(x)f(x)-g(x)f'(x)}{(f(x))^2}=\dfrac{g(x)f(x)-g(x)f(x)}{(f(x))^2}=0$.

On en déduit que k est une fonction constante.

Or $k(0)=\dfrac{g(0)}{f(0)}=\dfrac{1}{1}=1$, donc pour tout $x\in\mathbb{R}$, $k(x)=1$.

On en déduit que pour tout réel x, $g(x)=f(x)$. Donc la fonction f est unique.

Remarque

Ceci signifie que pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f'(x)=f(x)$.

Par exemple, si un nombre vérifie $\exp(a)=2$, alors le nombre dérivé en a vaut aussi 2.

Définition 2

La fonction exponentielle est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\exp(x)$ telle que $\exp(0)=1$ et pour tout $x\in\mathbb{R}$, $\exp'(x)=\exp(x)$.

II. Propriétés algébriques

Propriété 3

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\exp(x) \times \exp(-x) = 1$.

Démonstration

Posons pour tout réel x, $h(x) = \exp(x) \times \exp(-x)$. La fonction h est dérivable en tant que produit de telles fonction sur $\mathbb{R}$ et on a :
$h'(x) = \exp'(x) \times \exp(-x) + \exp(x) \times (-1) \times \exp(-x) = \exp(x) \times \exp(-x) - \exp(x) \times \exp(-x) = 0$.
On en déduit que h est constante sur $\mathbb{R}$. Or $h(0) = \exp(0) \times \exp(-0) = 1 \times 1 = 1$.
Ainsi, pour tout réel x, on a $h(x) = 1$, c'est-à-dire $\exp(x) \times \exp(-x) = 1$.

Propriété 4

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\exp(x) \neq 0$.

Démonstration

On utilise un raisonnement par l'absurde.
Si $\exp(0) = 0$, alors $\exp(x) \times \exp(-x) = 0$. Or ceci contredit la propriété 3.
On en déduit que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\exp(x) \neq 0$.

Propriété 5

Pour tous réels x et y, on a $\exp(x+y) = \exp(x) \times \exp(y)$.
Cette relation est appelée **relation fonctionnelle**.

Démonstration

Soit y un réel fixé. On définit la fonction h sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = \dfrac{\exp(x+y)}{\exp(y)}$.

La fonction h est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que quotient de telles fonctions sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$h'(x) = \frac{1}{\exp(y)} \times 1 \times \exp(x+y) = \frac{\exp(x+y)}{\exp(y)} = h(x).$$

De plus, $h(0) = \dfrac{\exp(0+y)}{\exp(y)} = \dfrac{\exp(y)}{\exp(y)} = 1$.

On en déduit par unicité de la fonction exponentielle que pour tout réel x, $h(x) = \exp(x)$.

On a alors $\dfrac{\exp(x+y)}{\exp(y)} = \exp(x)$, c'est-à-dire $\exp(x+y) = \exp(x) \times \exp(y)$.

Remarque

On dit que l'exponentielle transforme les sommes en produits.

Exemples

- $\exp(5) = \exp(2+3) = \exp(2) \times \exp(3)$
- $\exp(x+2) = \exp(x) \times \exp(2)$
- $\exp(3x) = \exp(x+2x) = \exp(x) \times \exp(2x) = \exp(x) \times \exp(x) \times \exp(x) = \exp(x)^3$

Propriété 6

Pour tous réels x et y et tout entier relatif n, on a :
- $\exp(-x)=\dfrac{1}{\exp(x)}$
- $\exp(x-y)=\dfrac{\exp(x)}{\exp(y)}$
- $\exp(x)^n=\exp(nx)$

Démonstration

• Pour tout réel x, $\exp(x)\times\exp(-x)=1$. Or $\exp(x)\neq 0$. D'où $\exp(-x)=\dfrac{1}{\exp(x)}$.

• Pour tous réels x et y, $\exp(x-y)=\exp(x)\times\exp(-y)=\exp(x)\times\dfrac{1}{\exp(y)}=\dfrac{\exp(x)}{\exp(y)}$.

• Cette démonstration est hors programme et donc admise.

Exemples

- $\exp(-5)=\dfrac{1}{\exp(5)}$
- $\exp(7-2x)=\dfrac{\exp(7)}{\exp(2x)}=\dfrac{\exp(7)}{\exp(2)\times\exp(x)}$
- $\exp(5)^3=\exp(3\times 5)=\exp(15)$

III. La notation e

Définition 7

On note $\exp(1)=\mathrm{e}$ où e est un nombre irrationnel tel que $\mathrm{e}\approx 2{,}718$.

Propriété 8

Pour tout nombre entier relatif n, $\exp(n)=\exp(n\times 1)=\exp(1)^n=\mathrm{e}^n$.
Par extension, pour tout nombre réel x, $\exp(x)=\mathrm{e}^x$.

Remarques

• La notation puissance demeure problématique car d'après la définition, l'exponentielle est définie sur $\mathbb{R}$ or on connaît les puissances entières d'un nombre (2^3, 2^{-3}, etc...). On peut définir les puissances rationnelles sous certaines conditions ($2^{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}$, $2^{\frac{5}{2}}=\left(2^{\frac{1}{2}}\right)^5$, etc...) et on pourrait définir par exemple $2^{\frac{1}{3}}$ comme le nombre vérifiant $\left(2^{\frac{1}{3}}\right)^3=2$ mais les puissances réelles sont nouvelles. On admet que e^x a bien « du sens » (donc qu'il est calculable).

• Le nombre e est irrationnel, on admet que ce nombre ne peut pas s'écrire sous la forme $\dfrac{a}{b}$, où a et b sont des réels.

Propriété 9

Pour tous réels x et y et tout entier relatif n, on a :
- $e^x \times e^{-x} = 1$
- $e^x \neq 0$
- $e^{x+y} = e^x \times e^y$
- $e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}$
- $e^{x-y} = \dfrac{e^x}{e^y}$
- $\left(e^x\right)^n = e^{nx}$

Exemples
- $e^2 \times e^{-2} = 1$
- $e^2 \times e^3 = e^{2+3} = e^5$
- $\dfrac{1}{e^{-5}} = e^5$
- $e^{x-2t} = \dfrac{e^x}{e^{2t}}$
- $\left(e^{x-2}\right)^2 = e^{2(x-2)} = e^{2x-4}$

Remarque

En résumé, l'exponentielle a la particularité de transformer les sommes en produits, les différences en quotients et les multiplications en puissances.

IV. Étude de la fonction exponentielle

IV.1 Signe et variation

Propriété 10

La fonction exponentielle est **définie** et **dérivable** sur $\mathbb{R}$. De plus, elle est **égale à sa fonction dérivée**. Pour tout réel x, $f(x) = e^x$.

Propriété 11

La fonction exponentielle est **strictement positive** sur $\mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x > 0$.

Démonstration

Cette démonstration est admise car elle est hors programme.

Propriété 12

La fonction exponentielle est **strictement croissante** sur $\mathbb{R}$.

Démonstration

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\left(e^x\right)' = e^x$. Or $e^x > 0$. Comme la dérivée est strictement positive, alors la fonction exponentielle est strictement croissante.

IV.2 Limites

Théorème 13 (hors programme)

- $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$

Démonstration

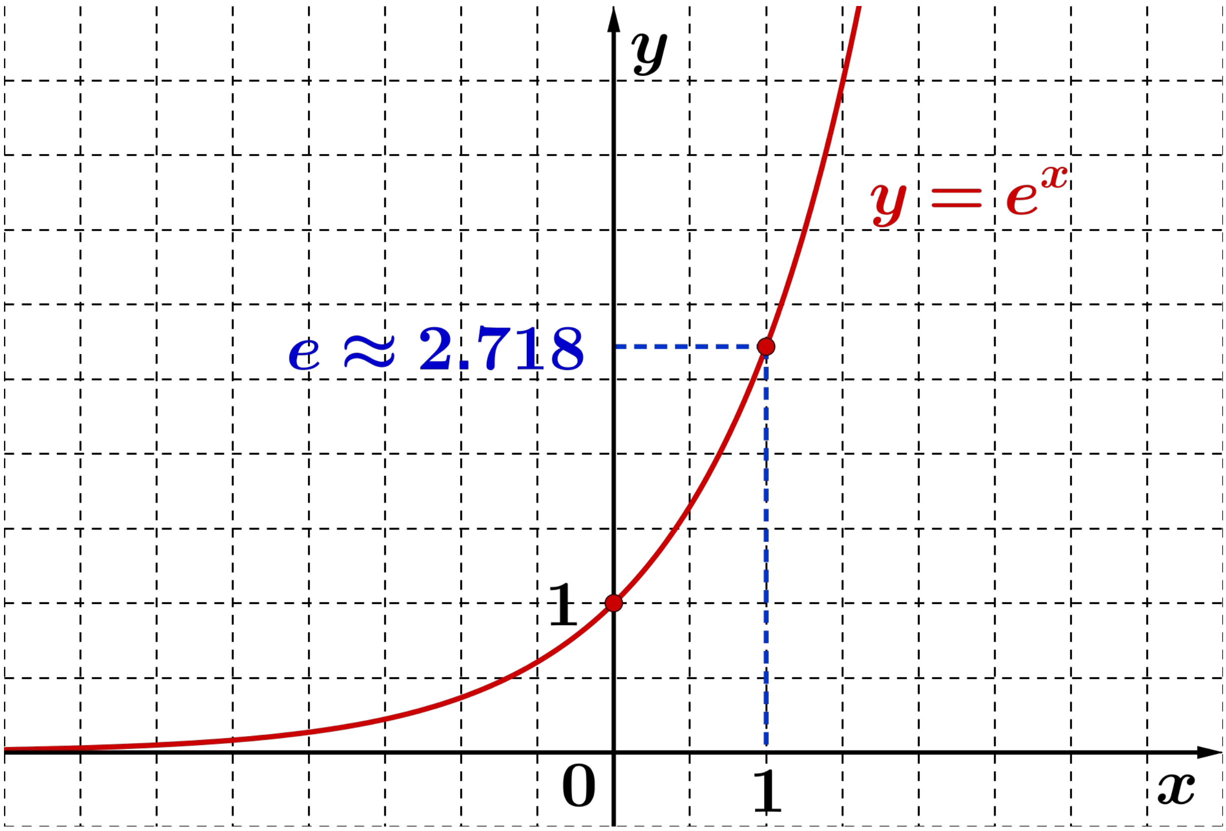
La démonstration nécessite d'utiliser les théorèmes de composition de limites vus en terminale.

IV.3 Tableau de variations et courbe représentative

Tableau de variation

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
e^x	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	e	$\nearrow$	$+\infty$

Représentation graphique



IV.4 Propriétés analytiques

Propriété 14

• Pour tout réel $x \leqslant 0$, $0 < e^x \leqslant 1$.
• Pour tout réel $x \geqslant 0$, $1 \leqslant e^x$.
• Pour tous réels x et y, $e^x = e^y$ si et seulement si $x = y$.
• Pour tous réels x et y, $e^x \leqslant e^y$ si et seulement si $x \leqslant y$.

Démonstration

• Soit $x \in]-\infty ; 0[$. $x \leqslant 0$, donc par croissance de la fonction exponentielle, $e^x \leqslant e^0$ ie $e^x \leqslant 1$.
De plus la fonction exponentielle est strictement positive. Donc $0 < e^x \leqslant 1$.
• Soit $x \in [0 ; +\infty[$. $0 \leqslant x$, donc par croissance de la fonction exponentielle, $e^0 \leqslant e^x$ ie $1 \leqslant e^x$.
• Soit deux réels x et y. Si $x = y$, alors $e^x = e^y$ par stricte croissance de la fonction exponentielle. Le sens indirect est admis.
• Soit deux réels x et y. Si $x \leqslant y$, alors $e^x \leqslant e^y$ par stricte croissance de la fonction exponentielle. Le sens indirect est admis.

Exemples

• $e^{2x-8} = e^{-3x+2} \Leftrightarrow 2x - 8 = -3x + 2 \Leftrightarrow 5x = 10 \Leftrightarrow x = 2$
• $e(-3x-9) < e^3 \Leftrightarrow -3x - 9 < 3 \Leftrightarrow -3x < 12 \Leftrightarrow x > -4$
• $e^{4x-3} = 1 \Leftrightarrow e^{4x-3} = e^0 \Leftrightarrow 4x - 3 = 0 \Leftrightarrow 4x = 3 \Leftrightarrow x = \frac{3}{4}$

V. Lien avec les suites géométriques

Propriété 15

Soit $a \in \mathbb{R}$. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier n par $u_n = e^{na}$.
Alors la suite (u_n) est une suite géométrique de raison e^a.

Démonstration

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \neq 0$ car l'exponentielle ne s'annule pas et $u_0 = e^{0 \times a} = 1$.

D'où $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{e^{(n+1)a}}{e^{na}} = \frac{e^{na+a}}{e^{na}} = \frac{e^{na} \times e^a}{e^{na}} = e^a$. Le quotient ne dépend pas de n, il est donc constant.

On en déduit que la suit (u_n) est géométrique de raison e^a et de premier terme 1.

Remarque

On pouvait aussi remarquer que pour tout entier n, $u_n = e^{na} = (e^a)^n$.

Propriété 16

Soit a un réel et la suite (u_n) définie pour tout entier n par $u_n = \mathrm{e}^{na}$.
• La suite (u_n) est strictement croissante si et seulement si $a > 0$.
• La suite (u_n) est strictement décroissante si et seulement si $a < 0$.

Démonstration

• On suppose que la suite (u_n) est strictement croissante.

(u_n) est strictement croissante $\Leftrightarrow \mathrm{e}^a > 1$ car (u_n) est une suite géométrique de raison $\mathrm{e}^a > 0$
$\Leftrightarrow \mathrm{e}^a > \mathrm{e}^0$ car $\mathrm{e}^0 = 1$
$\Leftrightarrow a > 0$ par stricte croissante de l'exponentielle

• On utilise un raisonnement analogue.

Propriété 17

Soit a un réel. Alors :
• Si $a > 0$, $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathrm{e}^{na} = +\infty$.
• Si $a < 0$, $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathrm{e}^{na} = 0$.

Démonstration

Cette démonstration est admise car elle est hors programme.

Exemples

• La suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \mathrm{e}^{\frac{n}{3}}$ est une suite croissante car $\frac{1}{3} > 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.
• La suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = \mathrm{e}^{-2n}$ est une suite décroissante car $-2 < 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$.

VI. Les fonctions exponentielles de la forme e^u

Définition 18

Soit u une fonction définie et dérivable sur un intervalle I .
La fonction e^u définie par $x \to \mathrm{e}^{u(x)}$ est appelé exponentielle de u .

Exemple

Si $u(x) = 2x - 1$, la fonction e^u est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \mathrm{e}^{2x-1}$.

Propriété 19

La fonction $x \to \mathrm{e}^{u(x)}$ est **strictement positive** sur son ensemble de définition.

Démonstration

On peut procéder à l'aide d'un changement de variable en remplaçant $u(x)$ par X .

Propriété 20

Soit f une fonction définie par $f(x)=\mathrm{e}^{u(x)}$ où u est une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.
Alors la fonction f est dérivable sur I et on a pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f'(x)=u'(x)\mathrm{e}^{u(x)}$.

Démonstration

Cette démonstration est admise car elle est hors programme.

Exemple

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\mathrm{e}^{-2x+1}$.
f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et est de la forme $\mathrm{e}^{u(x)}$ avec $u(x)=-2x+1$.
u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a $u'(x)=-2$.
On en déduit donc que $f'(x)=-2\mathrm{e}^{-2x+1}$.

Propriété 21

Soit f une fonction définie par $f(x)=\mathrm{e}^{u(x)}$ où u est une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Alors la fonction f a le même sens de variation que la fonction u.

Démonstration

Pour tout réel x, on a $f'(x)=u'(x)\mathrm{e}^{u(x)}$.
Or pour tout réel x, $\mathrm{e}^{u(x)}>0$. Donc le signe de f' dépend de celui de u', ce qui signifie que f' et u' ont le même signe. Par suite, cela implique que f et u ont les mêmes variations.

Propriété 22

- Soit a un réel strictement positif. Alors :
  $\lim\limits_{x\to-\infty}\mathrm{e}^{ax+b}=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{e}^{ax+b}=+\infty$.
- Soit a un réel strictement négatif. Alors :
  $\lim\limits_{x\to-\infty}\mathrm{e}^{ax+b}=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{e}^{ax+b}=0$.

Démonstration

Cette démonstration est admise car elle est hors programme.