

Chapitre 12

Colinéarité de vecteurs

I. Produit d'un vecteur par un réel

Définition 1

Soit k un nombre réel et $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ un vecteur dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Le vecteur $k\vec{u}$ est le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} kx \\ ky \end{pmatrix}$ dans le même repère.

Remarque

On admet que le vecteur $k\vec{u}$ ainsi défini est indépendant du repère choisi.

Exemple

Soit le réel $k = -3$ et le vecteur $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$. Alors $-3\vec{u} \begin{pmatrix} -3 \times 2 \\ -3 \times (-1) \end{pmatrix} = -\vec{u} \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Propriété 2

Soit k et k' deux nombres réels et $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs. On a :

- $k(\vec{u} + \vec{v}) = k\vec{u} + k\vec{v}$.
- $(k + k')\vec{u} = k\vec{u} + k'\vec{u}$.
- $k(k')\vec{u} = kk'\vec{u}$.
- $k\vec{u} = \vec{0}$ si et seulement si $k = 0$ ou $\vec{u} = \vec{0}$.

Propriété 3

Le produit d'un vecteur $\vec{u}$ par un nombre réel k est un vecteur, noté $k\vec{u}$ tel que :

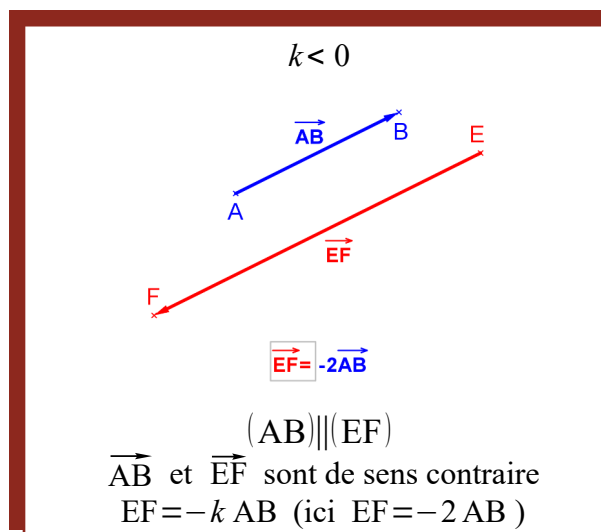
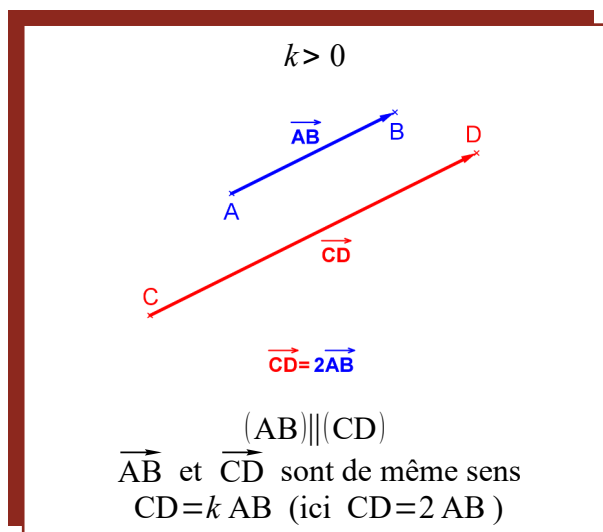
- Si $k > 0$, alors $k\vec{u}$ et $\vec{u}$ ont même direction, sont de même sens et $\|k\vec{u}\| = k\|\vec{u}\|$.
- Si $k < 0$, alors $k\vec{u}$ et $\vec{u}$ ont même direction, sont de sens opposé et $\|k\vec{u}\| = -k\|\vec{u}\|$.
- Si $k = 0$, alors $k\vec{u}$ est le vecteur nul.

Démonstration

Soit k un réel et $\vec{u}$ un vecteur.

On a $\|k\vec{u}\| = \sqrt{(kx)^2 + (ky)^2} = \sqrt{k^2x^2 + k^2y^2} = \sqrt{k^2(x^2 + y^2)} = \sqrt{k^2} \times \sqrt{x^2 + y^2} = |k| \times \|\vec{u}\|$

- Si $k > 0$, alors $|k| = k$ et $\|k\vec{u}\| = k\|\vec{u}\|$.
- Si $k < 0$, alors $|k| = -k$ et $\|k\vec{u}\| = -k\|\vec{u}\|$.
- Si $k = 0$, alors $|k| = 0$ et $\|k\vec{u}\| = 0$.

**Remarque**

I est le milieu du segment $[AB]$ si et seulement si $\vec{AI} = \frac{1}{2} \vec{AB} = \vec{IB}$ (ou $\vec{AB} = 2 \vec{AI}$).

II. Colinéarité de deux vecteurs**Définition 4**

Deux vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{CD}$ sont dits **colinéaires** s'ils ont la **même direction**, donc si $(AB) \parallel (CD)$.

Attention!

On dit que deux vecteurs sont colinéaires et que deux droites sont parallèles. Mais deux vecteurs ne sont jamais parallèles et deux droites ne sont jamais colinéaires !

Théorème 5

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nul.

Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement s'il existe un réel k non nul tel que $\vec{v} = k \vec{u}$.

Exemple

Les vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 15 \\ -9 \end{pmatrix}$ sont colinéaires car $\vec{v} = -3 \vec{u}$.

Remarque

- Le vecteur nul est colinéaire à tous les vecteurs.
- Dans l'égalité $\vec{v} = k \vec{u}$, k est le **coefficient de colinéarité**.

Propriété 6

Deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si **leurs coordonnées sont proportionnelles**.

Propriété 7

Dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$, soit les vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$.

On appelle **déterminant** des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ le nombre $\det(\vec{u}, \vec{v}) = xy' - x'y$.

Exemple

Soit les vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$. On a $\det(\vec{u}, \vec{v}) = 1 \times (-4) - 3 \times (-2) = -4 + 6 = 2$.

Propriété 8

Dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$, soit les vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$.

Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si $\det(\vec{u}, \vec{v}) = 0$.

Démonstration (exigible)

Dans le cas où le vecteur $\vec{u}$ (ou $\vec{v}$) est nul, le résultat est immédiat.

Supposons que les vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ sont non nul.

• Supposons que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et montrons que $xy' - x'y = 0$.

Comme $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, il existe un réel k non nul tel que $\vec{v} = k\vec{u}$, ce qui se traduit sur les coordonnées par $x = kx'$ et $y = ky'$.

On en déduit donc que $xy' - x'y = (kx')y' - x'(ky') = 0$. Ainsi $\det(\vec{u}, \vec{v}) = 0$.

• Supposons maintenant que $\det(\vec{u}, \vec{v}) = 0$ et montrons que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

Comme le vecteur $\vec{u}$ est non nul, l'une de ses coordonnées est non nul. Supposons $x \neq 0$.

On a alors $xy' - x'y = 0$ ie $y' = \frac{x'}{x}y$. Posons $k = \frac{x'}{x}$. On a alors $x' = kx$ et $y' = ky$.

On en déduit donc que $\vec{v} = k\vec{u}$ et que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

Exemple

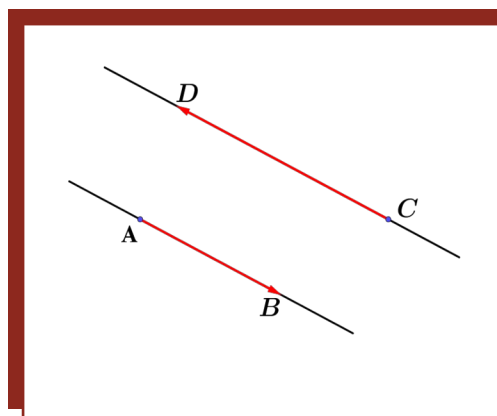
Les vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} \sqrt{5}-1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} -4 \\ \sqrt{5}+1 \end{pmatrix}$ sont colinéaires car :

$$(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1) - (-4)(-1) = (\sqrt{5}^2 - 1^2) - 4 = (5-1) - 4 = 4-4 = 0.$$

III. Parallélisme et alignement

Propriété 9

Deux droites (AB) et (CD) sont **parallèles** si et seulement si les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{CD}$ sont colinéaires.



Propriété 10

Trois points A , B et C sont alignés si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

Démonstration

A , B et C sont alignés $\Leftrightarrow$ les droites (AB) et (AC) sont confondues
 $\Leftrightarrow$ les droites (AB) et (AC) sont parallèles
 $\Leftrightarrow$ les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires

Exemple

Soit les points $A(5;8)$, $B(-3;-1)$ et $C(-1;9)$ dans un repère.

On a $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} = \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -3-5 \\ -1-8 \end{pmatrix} = \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -8 \\ -9 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} x_C - x_A \\ y_C - y_A \end{pmatrix} = \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} -1-5 \\ 9-8 \end{pmatrix} = \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} -6 \\ 1 \end{pmatrix}$.

D'où $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = -8 \times 1 - (-6) \times (-9) = -8 - 54 = -62 \neq 0$.

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires, donc les points A , B et C ne sont pas alignés.

IV. Décomposition d'un vecteur

Définition 11

On appelle **base** du plan tout couple de deux vecteurs non colinéaires.

Remarque

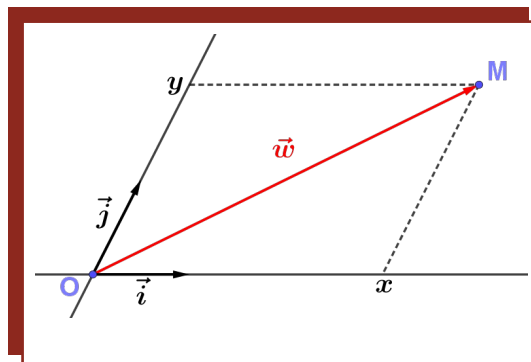
Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non colinéaires forment une base notée $(\vec{u}, \vec{v})$.

Exemples

- Un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ correspond à la base $(\vec{i}, \vec{j})$.
- Les cotés d'un triangle ABC quelconque non aplati permettent de former des bases.

Propriété 12

- Dire qu'un point M a pour coordonnées $(x; y)$ dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (ou une base $(\vec{i}, \vec{j})$) signifie que $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$.
- Dire qu'un vecteur $\vec{w}$ a pour coordonnées $(x; y)$ dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (ou une base $(\vec{i}, \vec{j})$) signifie que $\vec{w} = x\vec{i} + y\vec{j}$.



Théorème 13

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non colinéaires du plan.
 Pour tout vecteur $\vec{w}$ du plan, il existe un unique couple de réels $(a; b)$ tels que $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$.
 Le couple $(a; b)$ est appelé couple des coordonnées du vecteur $\vec{w}$ dans la base $(\vec{u}, \vec{v})$.