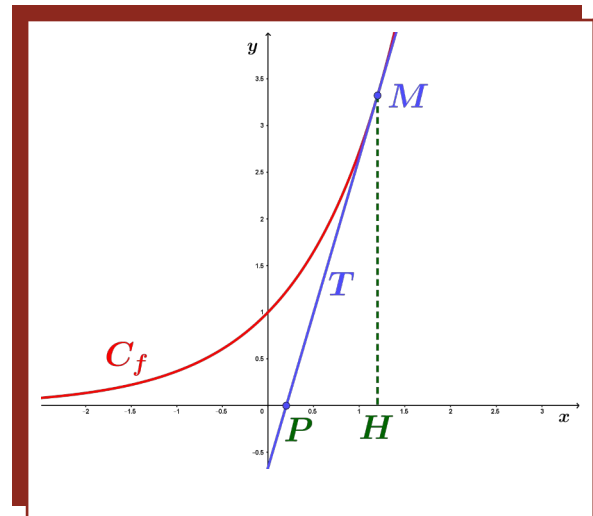


Courbes à sous-tangente constante

On se propose de déterminer une fonction f strictement positive et dérivable sur \mathbb{R} dont la courbe représentative C_f possède la propriété suivante :

« Pour tout point M de la courbe, si P est le point d'intersection de la tangente T en M avec l'axe des abscisses et H le projeté orthogonal de M sur cet axe, alors la distance PH est égale à 1 ».

Le segment $[PH]$ est appelé sous-tangente en M à la courbe C_f .



1. On note a l'abscisse d'un point quelconque M de C_f . Écrire, en fonction de a , une équation de la tangente T en M à la courbe C_f .
2. Montrer que l'abscisse du point P est égale à $a - \frac{f(a)}{f'(a)}$.
3. En déduire que la fonction f cherchée vérifie la condition $\left| \frac{f(a)}{f'(a)} \right| = 1$.
4. Conclure que la fonction f vérifie l'une des égalités $f' = f$ ou $f' = -f$.
5. Parmi les fonctions usuelles de la classe de première, en existe-t-il une qui vérifie $f' = f$ ou $f' = -f$?

Définition du nombre e

Problème

On souhaite rentabiliser au mieux 1€ placé sur un compte selon la méthode de placement suivante :

- on se donne une période de temps représentant une certaine proportion p d'une année
- chaque période de temps, le capital augmente de $100 p \%$

Question

Quelle période choisir pour maximiser son placement ?

Partie A : Quelques exemples

1. On choisit $p=1$.

- À quel(s) moment(s) de l'année gagne t-on de l'argent ?
- Combien y-a-t-il d'argent sur le compte à la fin de l'année ?

2. On choisit $p=\frac{1}{2}$.

- À quel(s) moment(s) de l'année gagne t-on de l'argent ?
- Vérifier que le solde au bout d'un an est de 2,25 €.

3. On choisit $p=\frac{1}{3}$.

a. Montrer que d'un trimestre à l'autre, la valeur du placement est multiplié par $\frac{4}{3}$.

b. Montrer que l'argent sur le compte à la fin de l'année s'élève à $\left(1 + \frac{1}{3}\right)^3$ € et donner une valeur approchée au centime.

Partie B : Généralisation

On se place dans le cas général où $p=\frac{1}{n}$ avec n un entier naturel. On note C_n le capital associé à la fin de l'année.

1. Donner la valeur de C_n .

2. À l'aide des résultats de la partie A, conjecturer les variations de la suite (C_n) . Quel serait la partition d'année idéale ?

3. Calculer la valeur en fin d'année du capital pour un placement augmentant (on considérera qu'une année comporte 365 jours) :

- Chaque mois ;
- Chaque jour ;
- Chaque heure ;
- Chaque minute ;
- Chaque seconde.