

Lois à densité

I. Variables aléatoires à densité

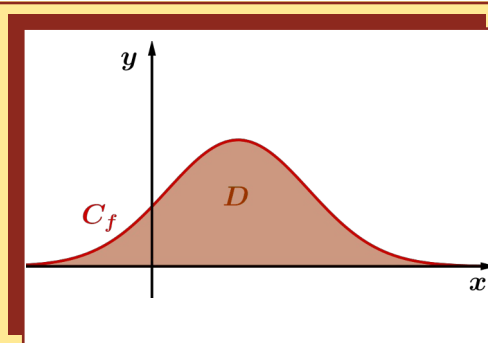
I.1 Variable aléatoire continue

Soit Ω l'univers d'une expérience aléatoire. Une variable aléatoire X définie sur Ω , qui peut prendre comme valeur tous les nombres réels d'un intervalle I de $\mathbb{R}$, est dite **continue**.

I.2 Fonction densité

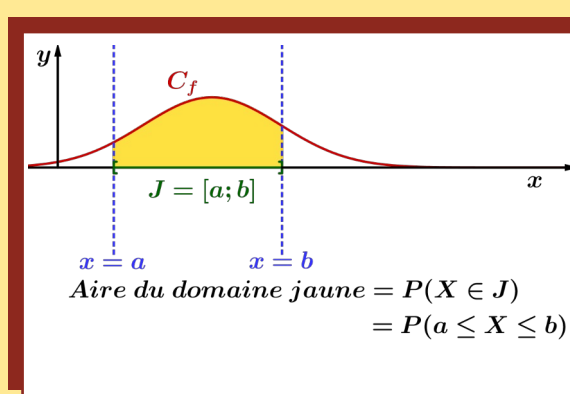
Une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ est appelée **fonction densité**, ou **densité de probabilité**, si :

- f est **positive** sur $\mathbb{R}$.
- f est **continue** sur $\mathbb{R}$ (sauf éventuellement en un nombre fini de points).
- L'**aire du domaine D** , domaine délimité par la courbe représentative C_f de la fonction f dans un repère orthogonal, et par l'axe des abscisses, **est égale à 1**.



I.3 Probabilité d'un événement

Soit Ω l'univers d'une expérience aléatoire et X une variable aléatoire continue de densité f . La probabilité de l'événement $\{X \in J\}$, où J est un intervalle de $\mathbb{R}$, est notée $P(X \in J)$, et est définie comme l'aire du domaine suivant :

$$\{(x; y); x \in J \text{ et } 0 \leq y \leq f(x)\}$$


Remarque

Par cette définition, la probabilité de l'événement $\{X \in \mathbb{R}\}$ correspond à l'aire du domaine D , aire du domaine délimité par la courbe C_f et l'axe des abscisses. Par la troisième caractéristique de la densité f , cette aire est égale à 1 (donc $\int_D f(x) dx = 1$). On a alors $P(X \in \mathbb{R}) = 1$.

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans un intervalle I qui suit la loi à densité f . Alors :
Pour tous réels a et b de I , $P(X \in [a; b]) = P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x) dx$.

Soit X une variable aléatoire qui suit une loi à densité f sur I . Alors :

- $\int_I f(x) dx = 1$.
- Pour tout réel a de I , $P(X=a) = \int_a^a f(x) dx = 0$.
- Pour tout réel a de I , $P(X > a) = 1 - P(X \leq a)$.
- Pour tous réels a et b , $P(a < X < b) = P(X < b) - P(X \leq a)$.
- $P(X \notin J) = 1 - P(X \in J)$.
- Pour tout intervalle J et K inclus dans I , $P(X \in J \cup K) = P(X \in J) + P(X \in K) - P(X \in J \cap K)$.

I.5 Fonction de répartition

Soit X une variable aléatoire continue de densité f dont la courbe représentative est notée C_f . La fonction de répartition associée à la variable aléatoire X est la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$F(x) = P(X \leq x) = P(X \in]a; x])$$

II. Espérance et variance

Soit a et b deux nombres réels distincts tels que $a < b$ et X une variable aléatoire de densité f sur $[a; b]$. Alors l'espérance mathématique et la variance de X sont les réels notés $E(X)$ et $V(X)$ définis par :

$$E(X) = \int_a^b x f(x) dx \quad \text{et} \quad V(X) = \int_a^b (x - E(X))^2 f(x) dx$$

III. Loi uniforme sur $[0; 1]$

Quand on considère une variable aléatoire donnant un nombre réel choisi au hasard entre 0 et 1, on est dans une situation où la probabilité de chaque issue est la même (équiprobabilité).

Ainsi, dans cette situation on choisira comme densité de probabilité une fonction constante.

On appelle loi uniforme sur $I = [0; 1]$ la loi de densité de probabilité f , où f est la **fonction constante égale à 1** pour tout x de I . On note $X \sim U([0; 1])$.

Soit X une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[0; 1]$. Alors :

$$\forall (c; d \in [0; 1])^2, \text{ tel que } c < d, \quad P(c \leq X \leq d) = \int_c^d dx = [x]_c^d = d - c.$$

IV. Loi uniforme sur $[a; b]$

Quand on considère une variable aléatoire donnant un nombre réel choisi au hasard entre a et b , on est dans une situation équiprobable. On choisira donc aussi comme densité de probabilité une fonction constante.

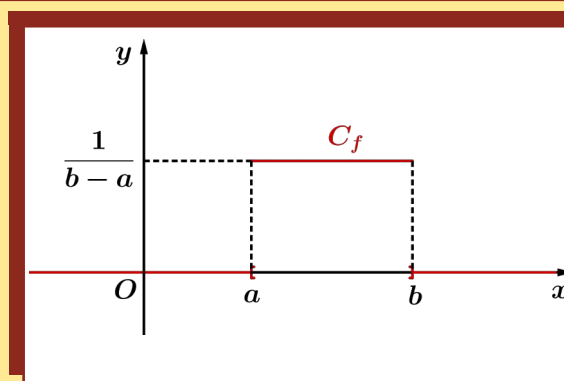
IV.1 Définition

Soit a et b deux réels tels que $a < b$.

On dit qu'une variable aléatoire continue X suit une loi uniforme sur l'intervalle $[a; b]$ si sa densité f est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{si } a \leq x \leq b \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On note $X \sim U([a; b])$.



Soit une variable aléatoire X qui suit une loi uniforme sur $[a; b]$. Alors :

- $\forall x \in [a; b], P(a \leq X \leq x) = \int_a^x \frac{1}{b-a} dt = \frac{x-a}{b-a}$.
- $\forall (c; d) \in [a; b]^2$, tel que $c < d$, $P(c \leq X \leq d) = \int_c^d \frac{1}{b-a} dx = \frac{d-c}{b-a}$.

IV.2 Fonction de répartition

Soit une variable aléatoire X qui suit une loi uniforme sur $[a; b]$. Alors la fonction de répartition de X est la fonction définie sur $[a; b]$ par $F(x) = \frac{x-a}{b-a}$.

IV.3 Espérance et variance

Soit une variable aléatoire X qui suit une loi uniforme sur $[a; b]$.

L'espérance de X est $E(X) = \frac{a+b}{2}$ et la variance de X est $V(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$.

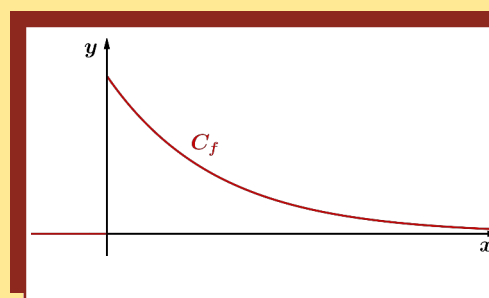
V. Loi exponentielle

V.1 Définition

On dit qu'une variable aléatoire continue X suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ si sa densité f est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

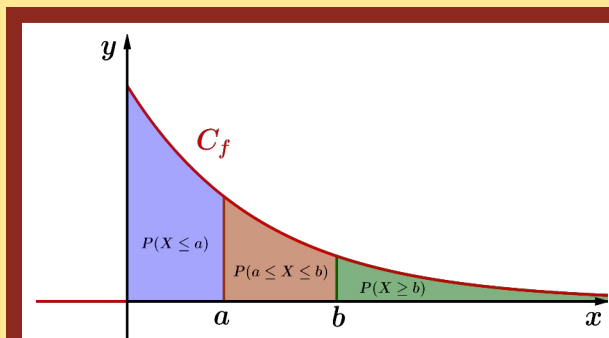
On note $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$.



Soit X une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

Alors, pour tous réels a et b :

- $P(X \leq a) = 1 - e^{-\lambda a}$.
- $P(a \leq X \leq b) = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}$.
- $P(X \geq b) = e^{-\lambda b}$.



V.2 Fonction de répartition

V.2 Fonction de répartition

Soit une variable aléatoire X qui suit la loi exponentielle. Alors la fonction de répartition de X est la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$.

V.3 Espérance

L'espérance d'une variable aléatoire X qui suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ est définie par :

$$E(X) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x t f(t) dt = \frac{1}{\lambda}$$

V.4 Loi sans vieillissement

Absence de mémoire

Une variable aléatoire X à valeurs positives suit une loi sans vieillissement si :

$$\forall t > 0 \text{ et } \forall h > 0, P_{X \geq t}(X \geq t + h) = P(X \geq h)$$

La loi exponentielle est une loi sans mémoire.

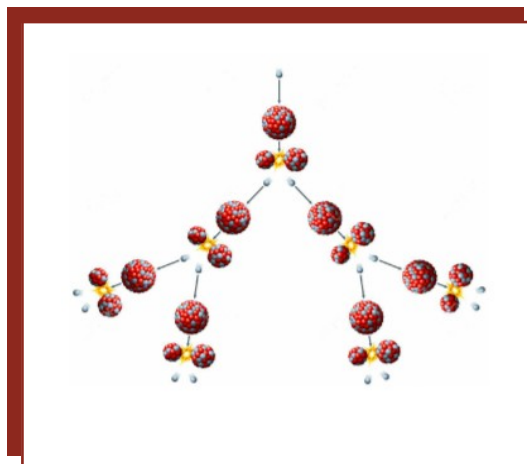
Remarque

On admettra que la loi exponentielle est la seule loi sans mémoire. Autrement dit, toute variable aléatoire à densité sans vieillissement suit une loi exponentielle.

V.5 Application à la physique

La désintégration radioactive est un phénomène aléatoire. c'est à dire que l'on ne peut pas, à l'échelle « microscopique », dire quand un noyau va se désintégrer.

Néanmoins, à l'échelle macroscopique, on a pu établir que la durée de vie d'un noyau radioactif suit une loi de durée de vie sans vieillissement, c'est à dire une loi exponentielle de paramètre λ , λ étant la constante radioactive (en s^{-1}) qui caractérise un radionucléide.



On appelle T la variable aléatoire associée à la durée de vie d'un noyau. La probabilité p qu'un noyau ne soit pas désintégré à l'instant t est donc :

$$p = P(T \geq t) = e^{-\lambda t}$$

Si au départ on compte N_0 noyaux au bout d'un temps t , on en comptera $N(t)$ qui vérifie :

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$$

On appelle demi-vie $t_{1/2}$, le temps nécessaire pour que le nombre de radionucléides soit divisé par deux. On a alors $e^{-\lambda t_{1/2}} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow -\lambda t_{1/2} = \ln\left(\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow -\lambda t_{1/2} = -\ln 2 \Leftrightarrow t_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda}$.

Soit X une variable aléatoire qui suit une loi de durée de vie sans vieillissement.

On appelle demi-vie la durée $t_{1/2}$ tel que $P(X > t_{1/2}) = \frac{1}{2}$. On obtient alors : $t_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda}$.

Remarque

La durée de vie moyenne τ d'un radionucléide est donnée par l'espérance mathématique :

$$\tau = \frac{1}{\lambda} \text{ où } \lambda = \frac{\ln 2}{t_{1/2}} \text{ et donc } \tau = \frac{t_{1/2}}{\ln 2} \approx 1,44 t_{1/2}$$

Soit X une variable aléatoire qui suit une loi de durée de vie sans vieillissement.

La durée de vie moyenne τ est donnée par l'espérance mathématique :

$$\tau = \frac{t_{1/2}}{\ln 2} \approx 1,44 t_{1/2}$$

Remarque

La demi-vie $t_{1/2}$ n'est pas égale à la durée de vie moyenne $\tau = E(X)$ car la courbe de densité de probabilité C_f n'est pas symétrique par rapport à la droite verticale d'équation $x = E(X)$.

