Colinéarité de vecteurs

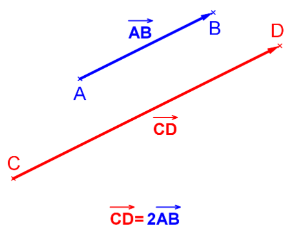
I. Produit d'un vecteur par un réel

Soit k un nombre réel et $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ un vecteur dans un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.
Le vecteur $k\vec{u}$ est le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} kx \\ ky \end{pmatrix}$ dans le même repère.

Soit k et k' deux nombres réels et $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs. On a :
- $k(\vec{u}+\vec{v})=k\vec{u}+k\vec{v}$.
- $(k+k')\vec{u}=k\vec{u}+k'\vec{u}$.
- $k(k')\vec{u}=kk'\vec{u}$.
- $k\vec{u}=\vec{0}$ si et seulement si $k=0$ ou $\vec{u}=\vec{0}$.

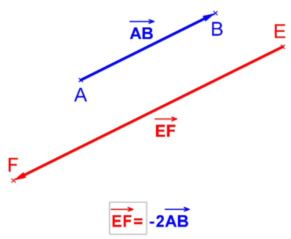
Le produit d'un vecteur $\vec{u}$ par un nombre réel k est un vecteur, noté $k\vec{u}$ tel que :
- Si $k>0$, alors $k\vec{u}$ et $\vec{u}$ ont même direction, sont de même sens et $\|k\vec{u}\|=k\|\vec{u}\|$.
- Si $k<0$, alors $k\vec{u}$ et $\vec{u}$ ont même direction, sont de sens opposé et $\|k\vec{u}\|=-k\|\vec{u}\|$.
- Si $k=0$, alors $k\vec{u}$ est le vecteur nul.

$k>0$



$(AB)\|(CD)$
$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont de même sens
$CD=k\,AB$ (ici $CD=2\,AB$)

$k<0$



$(AB)\|(EF)$
$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{EF}$ sont de sens contraire
$EF=-k\,AB$ (ici $EF=-2\,AB$)

II. Colinéarité de deux vecteurs

Deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont dits **colinéaires** s'ils ont la **même direction**, donc si $(AB)\|(CD)$.

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nul.
Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement s'il existe un réel k non nul tel que $\vec{v}=k\vec{u}$.

Remarques
- Le vecteur nul est colinéaire à tous les vecteurs.
- Dans l'égalité $\vec{v}=k\vec{u}$, k est le **coefficient de colinéarité**.

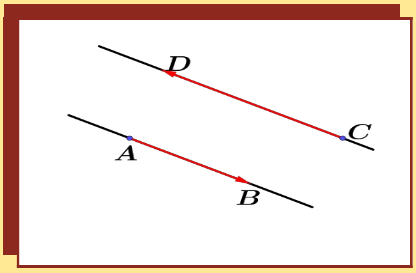
Deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si **leurs coordonnées sont proportionnelles**.

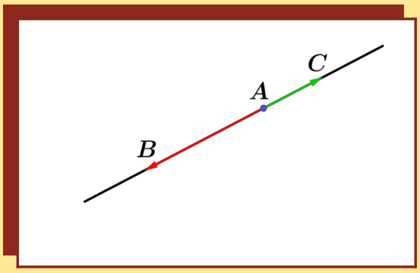
Dans un repère $(\mathrm{O};\vec{i},\vec{j})$, soit les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$.
On appelle **déterminant** des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ le nombre $det(\vec{u},\vec{v})=xy'-x'y$.

Dans un repère $(\mathrm{O};\vec{i},\vec{j})$, soit les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$.
Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si $det(\vec{u},\vec{v})=0$.

III. Parallélisme et alignement

• **Deux droites (AB) et (CD) sont parallèles** si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ sont colinéaires.
• **Trois points A , B et C sont alignés** si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ sont colinéaires.



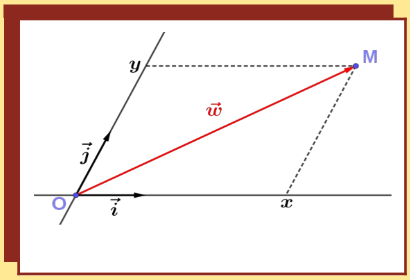


IV. Décomposition d'un vecteur

On appelle **base** du plan tout **couple de deux vecteurs non colinéaires**.

Remarque
Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non colinéaires forment une base notée $(\vec{u},\vec{v})$.

• Dire qu'un point M a pour coordonnées $(x;y)$ dans un repère $(\mathrm{O};\vec{i},\vec{j})$ (ou une base $(\vec{i},\vec{j})$) signifie que $\overrightarrow{OM}=x\,\vec{i}+y\,\vec{j}$.
• Dire qu'un vecteur $\vec{w}$ a pour coordonnées $(x;y)$ dans un repère $(\mathrm{O};\vec{i},\vec{j})$ (ou une base $(\vec{i},\vec{j})$) signifie que $\vec{w}=x\,\vec{i}+y\,\vec{j}$.



Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non colinéaires du plan.
Pour tout vecteur $\vec{w}$ du plan, il existe un unique couple de réels $(a;b)$ tels que $\vec{w}=a\,\vec{u}+b\,\vec{v}$.
Le couple $(a;b)$ est appelé couple des coordonnées du vecteur $\vec{w}$ dans la base $(\vec{u},\vec{v})$.