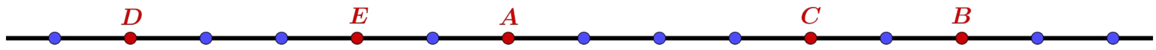
Colinéarité de vecteurs

Exercice 1



Trouvez le réel k tel que $\vec{v}=k\vec{u}$.

1. $\overrightarrow{AB}=........\overrightarrow{AE}$

2. $\overrightarrow{AD}=........\overrightarrow{AE}$

3. $\overrightarrow{EC}=........\overrightarrow{AB}$

4. $\overrightarrow{CD}=........\overrightarrow{AB}$

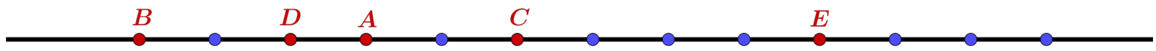
Exercice 2

On donne les points $A(3;-1)$, $B(2;0)$ et $C(1;4)$. M est le point tel que $\overrightarrow{AM}=2\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$.

1. Déterminer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AM}$.

2. Déduisez-en les coordonnées du point M puis placez M .

Exercice 3



Dans chacun des cas suivants, trouvez le nombre k tel que $\vec{v}=k\vec{u}$.

1. $\overrightarrow{AB}=........\overrightarrow{AE}$

2. $\overrightarrow{AD}=........\overrightarrow{BE}$

3. $\overrightarrow{EC}=........\overrightarrow{AB}$

4. $\overrightarrow{CD}=........\overrightarrow{DE}$

Exercice 4

On donne les points $A(5;3)$, $B(-1;0)$ et $C(1;6)$.

1. Calculez les coordonnées des points M et N, milieux respectivement de $[AB]$ et $[AC]$.

2. Vérifiez que $\overrightarrow{BC}=2\overrightarrow{MN}$.

Exercice 5

Pour chaque question, précisez s'il existe une valeur de x pour laquelle les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

1. $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x\\3\end{pmatrix}$.

2. $\vec{u}\begin{pmatrix}-x\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}3\\x\end{pmatrix}$.

Exercice 6

Pour chaque question, les points M, N et P sont-ils alignés ?

1. $M(4;-1)$, $N(7;-3)$ et $P(-5;5)$.

2. $M(-2;3)$, $N(-3;7)$ et $P(-5;14)$.

Exercice 7

On considère un triangle AGF non aplati.

1. Placer les point B et C tels que $\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{AF}$ et $\overrightarrow{GC}=\frac{1}{3}\overrightarrow{GF}$.

2. Démontrer que les points A, B et C sont alignés :

a. Par le calcul vectoriel ; **b.** En choisissant un repère du plan.

Exercice 8

Le plan est muni d'un repère. Dans chacun des cas suivants, dire si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires. Dans l'affirmative, préciser le coefficient de colinéarité.

a. $\vec{u}\begin{pmatrix}5\\12\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}10\\24\end{pmatrix}$; **b.** $\vec{u}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$; **c.** $\vec{u}\begin{pmatrix}-3\\2\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}6\\-4\end{pmatrix}$;

d. $\vec{u}\begin{pmatrix}1-\sqrt{2}\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-1\\3+3\sqrt{2}\end{pmatrix}$; **e.** $\vec{u}\begin{pmatrix}-\frac{2}{33}\\\frac{7}{22}\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}\frac{10}{7}\\-\frac{15}{4}\end{pmatrix}$; **f.** $\vec{u}\begin{pmatrix}5\sqrt{6}\\\sqrt{75}\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\\sqrt{2}\end{pmatrix}$.

Exercice 9

Le plan est muni d'un repère. Dans chacun des cas suivants, déterminer les valeurs possibles du réel x de sorte que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient colinéaires.

a. $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x+1\\2\end{pmatrix}$; **b.** $\vec{u}\begin{pmatrix}x-1\\2\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\x+1\end{pmatrix}$; **c.** $\vec{u}\begin{pmatrix}x+1\\2\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}\frac{1}{x}\\1\end{pmatrix}$

Exercice 10

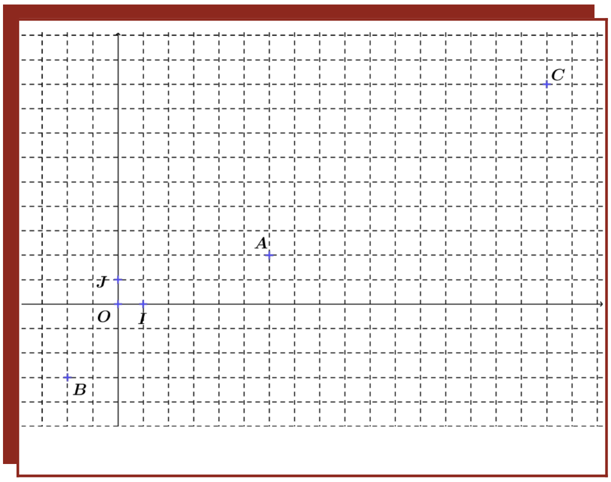
Dans un repère $(O;I,J)$ du plan, soit les points $A(1;-2)$, $B(3;5)$, $C(1;-1)$ et $D(x;3)$.
Déterminer x pour que les droites (AB) et (CD) soient parallèles.

Exercice 11

On considère les points A, B et C du plan rapporté au repère $(O;I,J)$.

1. Que peut-on dire des points A, B et C ?
Vérifier votre conjecture.

2. Si le point D a pour coordonnées $(120;75)$, le quadrilatère $BADO$ est-il un trapèze ?



Exercice 12

Placez les points $A(5;1)$, $B(-4;4)$, $C(-3;-2)$ et $D(0;-3)$.
Prouvez que le quadrilatère $ABCD$ est un trapèze.

Exercice 13

Dans un repère du plan, on considère les ponts $A(0;1)$, $B(1,5;2)$, $C(5,5;3)$ et $D(1;0)$.
Les droites (AB) et (CD) sont-elles parallèles ?

Exercice 14

Dans un repère du plan, on considère les ponts $A(1;-1)$, $B(-2;3)$, $C(5;-6)$ et $D(1297;-1729)$. Les points A, B, C et D sont -ils alignés ?

Exercice 15

Démontrer que les points A, B et C sont alignés si et seulement si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

Exercice 16

Le plan est muni d'un repère. Préciser si les points A, B et C sont alignés dans chacun des cas suivants :

a. $A(3;4)$, $B(0;2)$ et $C(-2;1)$.

b. $A(-100;145)$, $B(-50;15)$ et $C(40;-219)$.

c. $A\left(\frac{5}{4};3\right)$, $B\left(\frac{1}{2};4\right)$ et $C\left(\frac{1}{4};\frac{13}{3}\right)$.

Exercice 17

Soit a un réel. On considère dans un repère les points $A(-1;2)$, $B(0;3)$ et $C(a^2;3a+1)$.

1. Déterminer les valeurs de a pour lesquelles les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ soient colinéaires.

2. Déterminer les valeurs de a pour lesquelles les points A, B et C sont alignés.

Exercice 18

$ABCD$ est un parallélogramme. I et J sont les points définis par $\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{CJ}=\overrightarrow{CD}$.

Démontrer que $[AJ]$ et $[CI]$ ont le même milieu.

Exercice 19

Soit A et B deux points distincts. On se propose de construire le point M tel que :

$$\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{AB}$$

1. Démontrer que $3\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}$.

2. Pourquoi le point M est-il un point de la droite (AB) ? Construisez-le.

Exercice 20

Soit ABC un triangle.

1. Construire le point D tel que $5\overrightarrow{AD}=3\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}$.

2. Démontrer que $\overrightarrow{BD}=\frac{2}{5}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})$.

3. En déduire que les points B, C et D sont alignés.

Exercice 21

On donne les points $A(-4;4)$, $B(5;8)$, $C(-2;0)$ et $D(8;2)$.

1. Démontrez que les droites (AC) et (BD) sont parallèles.

2. Démontrez que les droites (AB) et (CD) sont sécantes.

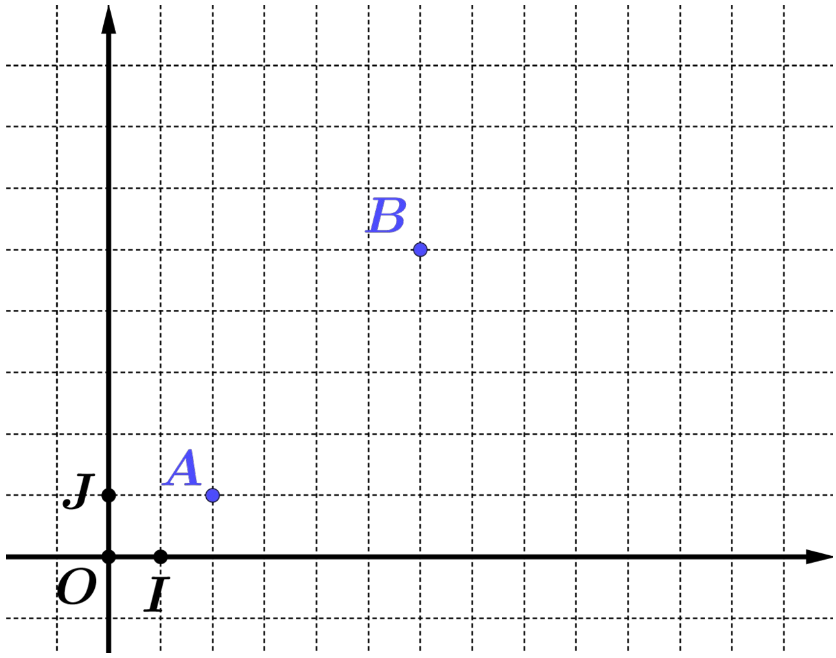
3. Quelle est la nature du quadrilatère $ABDC$?

Exercice 22

A et B sont deux points donnés. C est le point tel que $3\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC}=\vec{0}$.

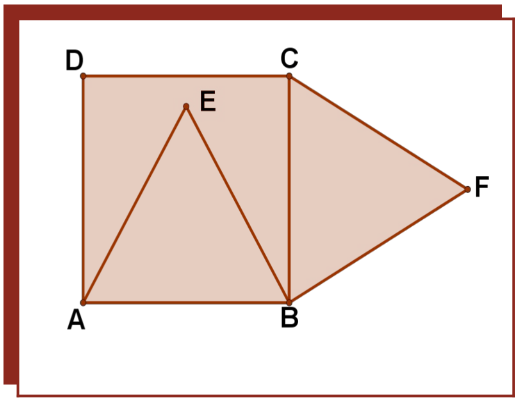
1. Justifiez que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

2. Placez le point C.



Exercice 23

$ABCD$ est un carré et les triangles AEB et BCF sont équilatéraux.



1. Justifier que $(A;B,D)$ est un repère du plan.

2. Quelles sont les coordonnées des points D, E et F dans ce repère ?

3. Démontrer que les points D, E et F sont alignés.

4. Autre méthode : Démontrer l'alignement des points D, E et F en prouvant que l'angle $\widehat{FED}$ est un angle plat (Indication : $\cos 60° = \dfrac{1}{2}$ et $\sin 60° = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$).

Exercice 24

On considère $(O;\vec{i},\vec{j})$ un repère du plan. Soit les points $A(6;-1)$ et $B(-2;3)$.

Écrire en fonction de $\vec{i}$ et $\vec{j}$ les vecteurs suivants :

a. $\overrightarrow{OA}$; **b.** $\overrightarrow{OB}$; **c.** $\overrightarrow{AB}$.

Exercice 25

Soit ABC un triangle. Le point I est tel que $\overrightarrow{BI}=\dfrac{2}{5}\overrightarrow{BA}$, le point J est l'image de C par la translation de vecteur $\overrightarrow{AC}$, et le point K est défini par la relation vectorielle :

$$-3\overrightarrow{AK}+3\overrightarrow{BK}+10\overrightarrow{CK}=\vec{0}$$

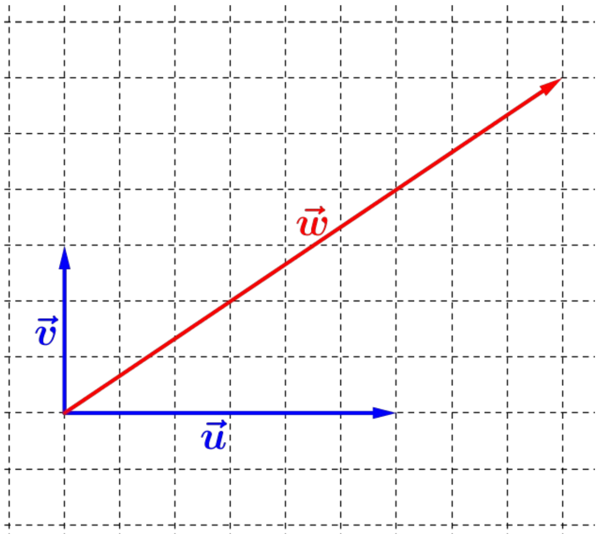
1. Montrer que les points I, J et K sont alignés.

2. Préciser la position de K sur $[IJ]$.

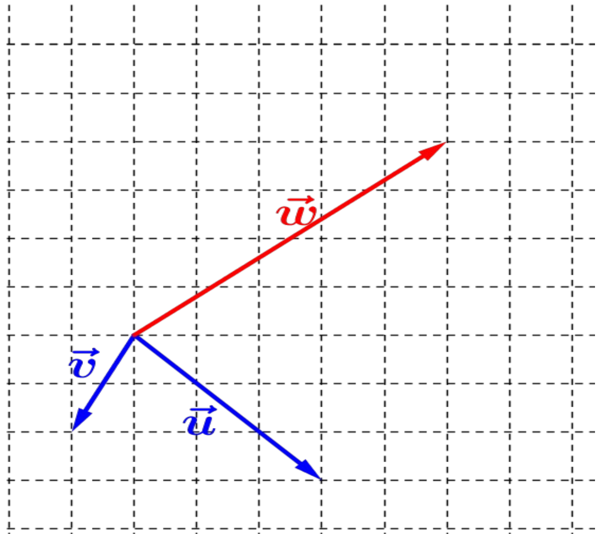
Exercice 26

Dans chacun des cas, décomposer le vecteur $\vec{w}$ en fonction des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

a.



b.



Exercice 27

Soit A, B, C des points non alignés et N et P tels que $\overrightarrow{AN}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BP}=\frac{2}{5}\overrightarrow{BC}$.

1. Faire une figure.
2. Décomposer le vecteur $\overrightarrow{AP}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
3. En déduire que les vecteurs $\overrightarrow{AP}$ et $\overrightarrow{AN}$ sont colinéaires.
Qu'en déduit-on pour les points A, P et N ?

Exercice 28

Soit A, B, C des points non alignés et N et P tels que $\overrightarrow{AN}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BP}=\frac{2}{5}\overrightarrow{BC}$.

1. Faire une figure et expliquer pourquoi $\left(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)$ est un repère du plan.
2. Quelles sont les coordonnées des points A, B et C dans ce repère ?
3. Calculer les coordonnées du point P puis montrer que les points A, P et N sont alignés.

Exercice 29

Soit ABC un triangle. Soit M et N les points tels que $\overrightarrow{AM}=2\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BN}=-\overrightarrow{AC}$.
Déterminer les coordonnées de M et N dans le repère $\left(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)$.

Exercice 30

Soit A, B et C trois points non alignés. Les points D, E et F sont définis par :

$$\overrightarrow{AD}=3\overrightarrow{AB},\quad \overrightarrow{AE}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AC} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{BF}=2\overrightarrow{BC}$$

Démontrer que les points D, E et F sont alignés.

Exercice 31

Soit un carré $ABCD$ de côté a, E le milieu de $[AD]$ et F le milieu de $[BC]$.

1. Faire une figure.

2. On souhaite démontrer que les droites (EB) et (DF) sont parallèles de différentes manières.

a. *Méthode 1 :* Exprimer le vecteur $\overrightarrow{EB}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$.
Faire de même pour le vecteur $\overrightarrow{DF}$. Conclure.

b. *Méthode 2 :* Dans le repère $(D;\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DA})$, donner les coordonnées des points D, C, B, A, E et F. Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{EB}$ et $\overrightarrow{DF}$. Conclure.

c. *Méthode 3 :* Pour finir, démontrer le résultat en considérant les angles.

Exercice 32

Le plan étant muni d'un repère orthonormé, on considère les points $A(-3;1)$, $B(1;-1)$, $C(3;3)$ et I milieu du segment $[AC]$.

1. Donner les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BC}$.

2. Soit $E(a;2)$. Déterminer a tel que A, B et E soient alignés.

3. Quelle est la nature du triangle ABC ?

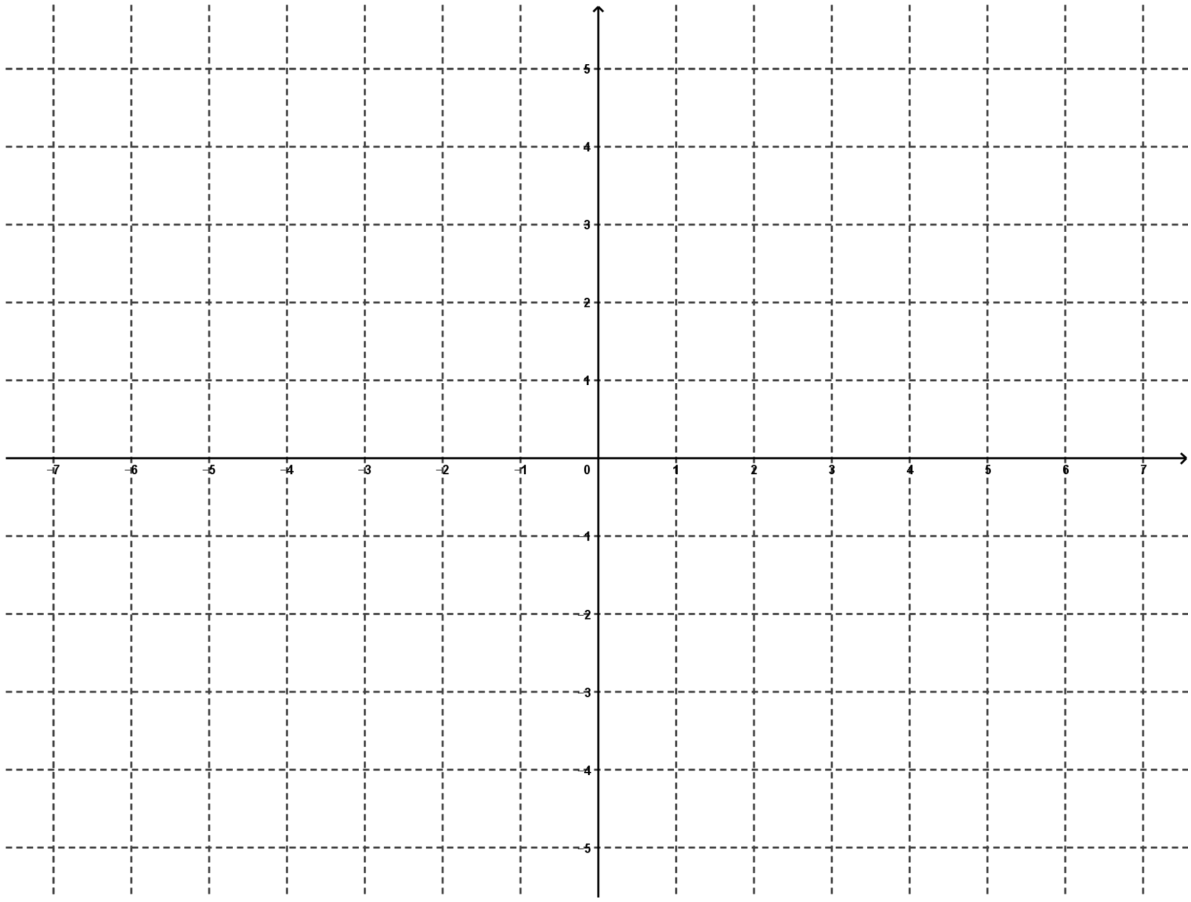
4. a. Déterminer les coordonnées du point D image de A par la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$.

b. Quelle est la nature du quadrilatère $ABCD$?

5. Déterminer les coordonnées du point J, symétrique de A par rapport à B.

6. Déterminer les coordonnées du point F appartenant à l'axe des abscisses tel que A, B et F soient alignés.

7. Déterminer les coordonnées du point G appartenant à l'axe des ordonnées tel que les droites (BG) et (AI) soient parallèles.



Exercice 33

Soit $(O;\vec{i},\vec{j})$ un repère orthonormé du plan et les points $A(2;1)$, $B(7;1)$ et $C(5;4)$. On note $IJKL$ un rectangle construit sur les côtés du triangle ABC ($I\in[AB]$, $J\in[AC]$, $K\in[CB]$ et $L\in[AB]$). Déterminer la position du point I sur le segment $[AB]$ pour que $IJKL$ soit un carré.