

Chapitre 11

Lois à densité

I. Variables aléatoires à densité

I.1 Variable aléatoire continue

Dans de nombreux domaines, on étudie des variables aléatoires pouvant prendre, du moins théoriquement, toute valeur d'un intervalle I de $\mathbb{R}$.

C'est le cas par exemple lorsque l'on étudie la durée de vie d'un téléphone portable, la hauteur d'un bâtiment ou encore la température de l'eau d'un lac.

Ces variables aléatoires sont dites **continues**.

Définition 1

Soit Ω l'univers d'une expérience aléatoire. Une variable aléatoire X définie sur Ω , qui peut prendre comme valeur tous les nombres réels d'un intervalle I de $\mathbb{R}$, est dite **continue**.

Exemple

Une entreprise produit des ampoules à basse consommation. On peut définir une variable aléatoire X qui, à chaque ampoule produite par cette entreprise, associe sa durée de vie en heures. Cette durée n'est pas nécessairement un nombre entier d'heures et théoriquement, on ne connaît pas la durée maximale d'une telle ampoule. Cette variable aléatoire X est donc continue et l'intervalle I est l'intervalle $[0; +\infty[$.

I.2 Fonction densité

Une fois la variable aléatoire définie, on s'intéresse à sa **loi de probabilité**.

Dans le cas d'une variable aléatoire discrète, la loi de probabilité associée est généralement donnée sous la forme d'un tableau. Elle peut aussi être donnée par l'intermédiaire d'une formule générale.

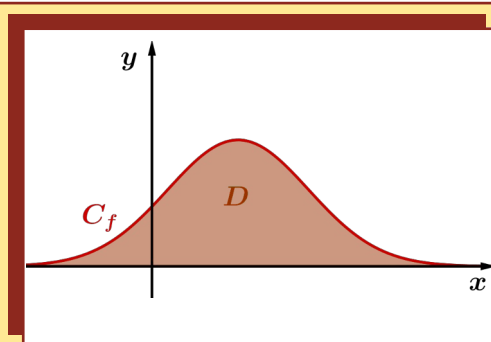
C'est le cas pour les variables aléatoires qui suivent une loi binomiale.

Dans le cas d'une variable aléatoire continue, on a recours à une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et appelée **densité de probabilité**.

Définition 2

Une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ est appelée **fonction densité**, ou **densité de probabilité**, si :

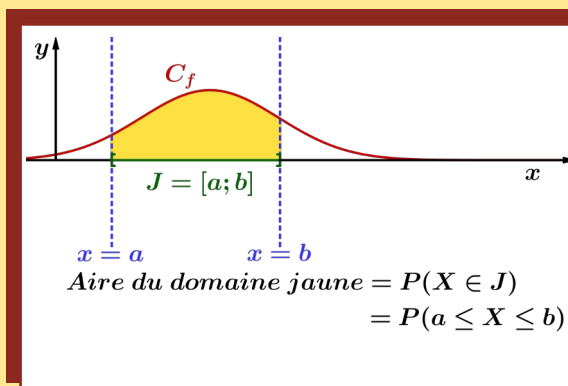
- f est **positive** sur $\mathbb{R}$.
- f est **continue** sur $\mathbb{R}$ (sauf éventuellement en un nombre fini de points).
- L'**aire du domaine D** , domaine délimité par la courbe représentative C_f de la fonction f dans un repère orthogonal, et par l'axe des abscisses, est **égale à 1**.



I.3 Probabilité d'un événement

Définition 3

Soit Ω l'univers d'une expérience aléatoire et X une variable aléatoire continue de densité f . La probabilité de l'événement $\{X \in J\}$, où J est un intervalle de $\mathbb{R}$, est notée $P(X \in J)$, et est définie comme l'aire du domaine suivant :

$$\{(x; y); x \in J \text{ et } 0 \leq y \leq f(x)\}$$
**Remarque**

Par cette définition, la probabilité de l'événement $\{X \in \mathbb{R}\}$ correspond à l'aire du domaine D , aire du domaine délimité par la courbe C_f et l'axe des abscisses. Par la troisième caractéristique de la densité f , cette aire est égale à 1 (donc $\int_D f(x) dx = 1$). On a alors $P(X \in \mathbb{R}) = 1$.

Exemple

Soit X une variable aléatoire continue dont la densité f est définie sur $\mathbb{R}$ par :

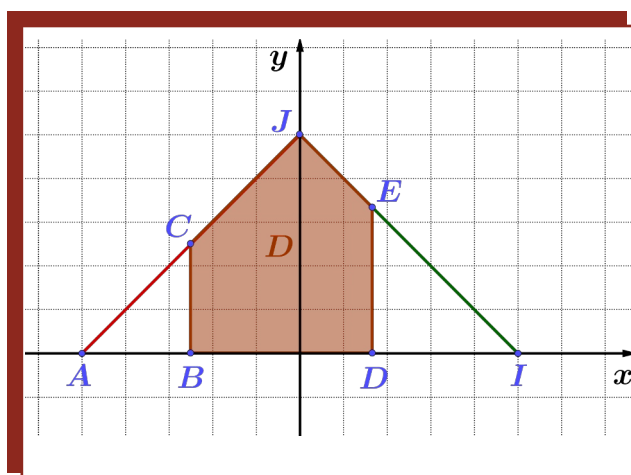
$$E(X) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x t f(t) dt = \frac{1}{\lambda}$$

On désire calculer la probabilité de l'événement $\left\{X \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{3}\right]\right\}$, ce qui se note $P\left(X \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{3}\right]\right)$

ou encore $P\left(-\frac{1}{2} \leq X \leq \frac{1}{3}\right)$. Par définition,

cette probabilité correspond à l'aire du domaine D_1 colorié en marron sur la figure ci-dessous où C_f est la courbe représentative de la densité f dans le repère orthogonal $(O; I, J)$.

En notant A, B, C, D et E les points de coordonnées respectives $(-1; 0)$, $(-\frac{1}{2}; 0)$, $(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2})$, $(\frac{1}{3}; 0)$ et $(\frac{1}{3}; \frac{2}{3})$, l'aire du domaine D est égale à l'aire du triangle AIJ à laquelle il faut soustraire l'aire du triangle ABC et celle du triangle DEI . Par suite, on a :



$$D = A_{AIJ} - A_{ABC} - A_{DEI} = 1 - \frac{1}{8} - \frac{2}{9} = \frac{47}{72}$$

Remarques

- On constate graphiquement que la fonction f est bien positive et continue sur $\mathbb{R}$. En outre, l'aire du domaine D , domaine délimité par la courbe C_f et par l'axe des abscisses, correspond ici à l'aire du triangle AIJ qui est égale à 1. On a ainsi vérifié que la fonction f est une densité.
- Par définition, la probabilité de l'événement $[X \in [-1; 1]]$ est égale à l'aire du domaine délimité par la courbe C_f , l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = -1$ et $x = 1$. Ce domaine est le triangle AIJ dont l'aire est égale à 1. Ainsi, il est certain que X prend ses valeurs dans cet intervalle. On peut même d'ailleurs démontrer que l'intervalle $[-1; 1]$ est le plus petit intervalle tel que la probabilité que X y prenne ses valeurs est égale à 1. En dehors de cet intervalle, on constate que la densité est nulle.
- L'aire du domaine D est déterminée ici au moyen d'arguments géométriques. Mais on peut également déterminer cette aire à l'aide d'un calcul intégral. En effet, comme la densité f est une fonction continue et positive sur $\left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{3}\right]$, on a la relation suivante : $D = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{3}} f(x) dx$.

Par la relation de Chasles, il en découle :

$$D = \int_{-\frac{1}{2}}^0 (x+1) dx + \int_0^{\frac{1}{3}} (-x+1) dx = \left[\frac{x^2}{2} + x \right]_{-\frac{1}{2}}^0 + \left[-\frac{x^2}{2} + x \right]_0^{\frac{1}{3}} = -\left(\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^2}{2} - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^2}{2} + \frac{1}{3} \right) = \frac{47}{72}$$

Propriété 4

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans un intervalle I qui suit la loi à densité f . Alors :
Pour tous réels a et b de I , $P(X \in [a; b]) = P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x) dx$.

Remarque

Dans le cas où l'intervalle $[a; b]$ n'est pas borné (par exemple $\mathbb{R}$), on admet que $\int_I f(x) dx$ est un nombre fini que l'on peut visualiser par l'aire sous la courbe d'un « domaine infini » et que les propriétés usuelles de l'intégrale sont encore vraies dans ce cas : linéarité, relation de Chasles, etc...

Propriété 5

Soit X une variable aléatoire qui suit une loi à densité f sur I . Alors :

- $\int_I f(x) dx = 1$.
- Pour tout réel a de I , $P(X = a) = \int_a^a f(x) dx = 0$.
- Pour tout réel a de I , $P(X > a) = 1 - P(X \leq a)$.
- Pour tous réels a et b , $P(a < X < b) = P(X < b) - P(X \leq a)$.
- $P(X \notin J) = 1 - P(X \in J)$.
- Pour tout intervalle J et K inclus dans I , $P(X \in J \cup K) = P(X \in J) + P(X \in K) - P(X \in J \cap K)$.

Remarques

- Il est possible d'obtenir un événement de probabilité nulle sans que celui-ci soit vide.
- Pour une loi continue, dans les calculs de probabilités, on peut remplacer des inégalités larges par des inégalités strictes et réciproquement. Par exemple, $P(X > a) = P(X \geq a)$.
- Si J et K sont deux événements disjoints, alors $P(X \in J \cup K) = P(X \in J) + P(X \in K)$.

Exemple

Dans l'exemple précédent, on a :

$$P\left(-\frac{1}{2} \leq X \leq \frac{1}{3}\right) = P\left(-\frac{1}{2} < X \leq \frac{1}{3}\right) = P\left(-\frac{1}{2} \leq X < \frac{1}{3}\right) = P\left(-\frac{1}{2} < X < \frac{1}{3}\right)$$

I.5 Fonction de répartition**Propriété 6**

Soit X une variable aléatoire continue de densité f dont la courbe représentative est notée C_f . La fonction de répartition associée à la variable aléatoire X est la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$F(x) = P(X \leq x) = P(X \in]a; x])$$
Remarques

- Une loi de probabilité d'une variable aléatoire continue est entièrement déterminée soit par la connaissance de la fonction de densité f , soit par la connaissance de la fonction de répartition. Cela s'explique par le lien fort entre ces deux fonctions. En effet, sur tout intervalle J où la fonction de répartition F est dérivable, on a pour tout réel $x \in J$, $F'(x) = f(x)$.
- Si la borne inférieure de l'intervalle I est un réel, alors pour tout x de I , $P(X \leq a) = \int_a^x f(x) dx$. La fonction de répartition F est donc la primitive, qui s'annule en a , de la densité de probabilité.
- Si la borne inférieure de l'intervalle I est $-\infty$, alors $P(X \leq x) = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^x f(x) dx$.

II. Espérance et variance

Après la détermination de la loi de probabilité d'une variable aléatoire, s'ensuit généralement le calcul de certaines de ses caractéristiques telles que l'espérance.

Dans le cas d'une variable aléatoire discrète X , l'espérance notée $E(X)$ est définie par :

$$E(X) = \sum_{i=1}^n x_i P(X = x_i)$$

où les x_i , pour $1 \leq i \leq k$, désignent les valeurs prises par la variable aléatoire X .

Exemple

Prenons l'exemple du lancer de deux dés cubiques équilibrés dont les faces sont numérotées de 1 à 6 et définissons X la variable aléatoire qui associe la somme des deux nombres obtenus.

On peut calculer l'espérance et on obtient : $E(X) = \frac{252}{36} = 7$.

L'interprétation de ce résultat est la suivante : si on lance les deux dés cubiques un grand nombre de fois, la somme des nombres obtenus est en moyenne égale à 7.

Dans le cas d'une variable aléatoire continue, cette somme n'a pas de sens. En effet, une telle variable peut prendre comme valeur tous les nombres réels d'un intervalle I . On a alors recours à la définition qui suit, prolongement naturel du cas discret.

Définition 7

Soit a et b deux nombres réels distincts tels que $a < b$ et X une variable aléatoire de densité f sur $[a; b]$. Alors l'espérance mathématique de X est le réel noté $E(X)$ défini par :

$$E(X) = \int_a^b x f(x) dx$$

Remarque

On peut remarquer l'analogie entre le calcul de l'espérance dans le cas d'une variable aléatoire discrète et celui d'une variable aléatoire continue. Quand on passe du cas discret au cas continu, le

symbole $\sum_{i=1}^n$ devient $\int_a^b$, et « $P(X=x_i)$ » devient « $xf(x)$ ».

De même que pour l'espérance, on procède de manière équivalente pour le calcul de la variance. Dans le cas d'une variable aléatoire discrète X , la variance notée $V(X)$ est définie par :

$$V(X) = \sum_{i=1}^n p_i (x_i - E(X))^2$$

On obtient donc par prolongement la définition suivante dans le cas continu.

Définition 8

Soit a et b deux nombres réels distincts tels que $a < b$ et X une variable aléatoire de densité f sur $[a; b]$. Alors la variance mathématique de X est le réel noté $V(X)$ défini par :

$$V(X) = \int_a^b (x - E(X))^2 f(x) dx$$

Remarque

La variance peut aussi se calculer à l'aide de la formule de Koenig-Huygens :

$$V(X) = \int_a^b x^2 f(x) dx - (E(X))^2$$

Exemple

Soit X suivant une loi de densité $f(x) = 2x$ sur l'intervalle $[0; 1]$.

On a $E(X) = \int_0^1 x \times 2x dx = \int_0^1 2x^2 dx = \left[2 \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = 2 \times \frac{1^3}{3} - 2 \times \frac{0}{3} = \frac{2}{3}$.

Et $V(X) = \int_0^1 \left(x - \frac{2}{3} \right)^2 2x dx = \int_0^1 \left(2x^3 - \frac{8}{3}x^2 + \frac{8}{9}x \right) dx = \left[\frac{x^4}{2} - \frac{8}{9}x^2 + \frac{4}{9}x^2 \right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{8}{9} + \frac{4}{9} = 0 = \frac{1}{18}$.

III. Loi uniforme sur $[0; 1]$

Quand on considère une variable aléatoire donnant un nombre réel choisi au hasard entre 0 et 1, on est dans une situation où la probabilité de chaque issue est la même (équiprobabilité).

Ainsi, dans cette situation on choisira comme densité de probabilité une fonction constante.

Définition 9

On appelle loi uniforme sur $I=[0;1]$ la loi de densité de probabilité f , où f est la fonction constante égale à 1 pour tout x de I . On note $X \sim U([0;1])$.

Propriété 10

Soit X une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[0;1]$. Alors :

$$\forall (c; d \in [0;1])^2, \text{ tel que } c < d, P(c \leq X \leq d) = \int_c^d dx = [x]_c^d = d - c.$$

Remarques

- On peut le voir graphiquement car l'aire du domaine compris entre les droites verticales d'équation $x=c$ et $x=d$ correspond à l'aire d'un rectangle de longueur 1 et de largeur $d-c$. Donc l'aire est égale à $1 \times (d-c) = d-c$.
- La fonction de répartition de la variable aléatoire X est la fonction affine définie par $F(x) = x$.

Exemple

Dans un cabinet médical, on a établi, après une étude statistique, que le temps d'attente était complètement aléatoire et variait de façon uniforme jusqu'à une heure maximum. Si on appelle X la variable aléatoire qui correspond au temps d'attente, alors on peut dire que X suit la loi uniforme sur $[0;1]$. Donc la probabilité qu'un patient attend plus d'un quart d'heure est égale à

$$P\left(\frac{1}{4} \leq X \leq 1\right) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}. \text{ Ainsi, un patient a 75\% de chances d'attendre plus d'un quart d'heure.}$$

IV. Loi uniforme sur $[a; b]$

Quand on considère une variable aléatoire donnant un nombre réel choisi au hasard entre a et b , on est dans une situation équiprobable. On choisira donc aussi comme densité de probabilité une fonction constante.

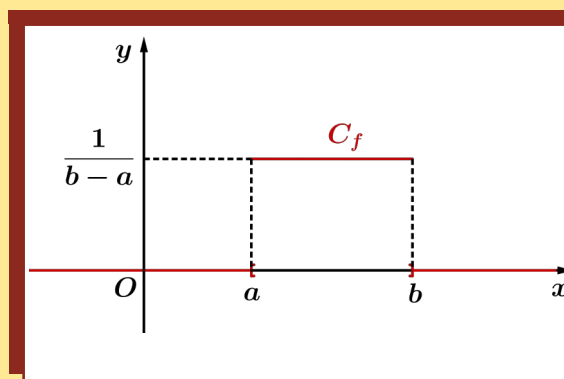
IV.1 Définition**Définition 11**

Soit a et b deux réels tels que $a < b$.

On dit qu'une variable aléatoire continue X suit une loi uniforme sur l'intervalle $[a; b]$ si sa densité f est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{si } a \leq x \leq b \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On note $X \sim U([a; b])$.



Remarque

On peut remarquer que $\int_a^b f(x)dx$ est égal à 1. En effet, $\int_a^b f(x)dx$ est l'aire « sous la courbe », c'est donc l'aire du rectangle de cotés $b-a$ et $\frac{1}{b-a}$.

Propriété 12

Soit une variable aléatoire X qui suit une loi uniforme sur $[a; b]$. Alors :

- $\forall x \in [a; b], P(a \leq X \leq x) = \int_a^x \frac{1}{b-a} dt = \frac{x-a}{b-a}$.
- $\forall (c; d) \in [a; b]^2$, tel que $c < d$, $P(c \leq X \leq d) = \int_c^d \frac{1}{b-a} dx = \frac{d-c}{b-a}$.

Démonstration

- $P(a \leq X \leq x) = \int_a^x \frac{dt}{b-a} = \frac{1}{b-a} \int_a^x dt = \frac{1}{b-a} [t]_a^x = \frac{x-a}{b-a}$.
- $P(c \leq X \leq d) = \int_c^d \frac{dx}{b-a} = \frac{1}{b-a} \int_c^d dt = \frac{1}{b-a} [x]_c^d = \frac{d-c}{b-a}$.

Remarques

- La probabilité d'une loi uniforme est proportionnelle à la longueur de l'intervalle considéré. Si X est une variable aléatoire qui suit une loi uniforme sur l'intervalle I et J un intervalle de I , alors $P(X \in J) = \frac{\text{longueur de } J}{\text{longueur de } I}$.
- Si J et K sont deux intervalles de même longueur inclus dans I , alors $P(X \in J) = P(X \in K)$. D'où le nom de loi uniforme.
- L'instruction « nombre aléatoire » d'un logiciel ou d'une calculatrice permet de modéliser une loi uniforme sur $[a; b]$. On la retrouve sous le nom de « Alea() » ou « random ».

Cas d'utilisations de la loi uniforme

Cette loi modélise un phénomène uniforme sur un intervalle donné. On l'utilise généralement lorsque la situation se ramène à choisir au hasard un réel dans un intervalle $[a; b]$.

Exemple

À l'arrêt des papangues, un bus passe toutes les 10 minutes. Un voyageur ignore les horaires et arrive à cet arrêt de bus. On se demande quelle est la probabilité d'attendre le bus exactement 3 minutes. De même entre 2 et 4 minutes.

On note T la variable aléatoire représentant le temps d'attente, en minutes. On suppose que T suit la loi uniforme $U([0; 10])$. On a $P(T=3)=0$ et $P(2 \leq T \leq 4) = \frac{4-2}{10-0} = \frac{2}{10} = 0,2$.

IV.2 Fonction de répartition

Propriété 13

Soit une variable aléatoire X qui suit une loi uniforme sur $[a; b]$. Alors la fonction de répartition de X est la fonction définie sur $[a; b]$ par $F(x) = \frac{x-a}{b-a}$.

IV.3 Espérance et variance

Propriété 14

Soit une variable aléatoire X qui suit une loi uniforme sur $[a; b]$.

L'espérance de X est $E(X) = \frac{a+b}{2}$ et la variance de X est $V(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$.

Remarque

$E(X)$ correspond au centre de l'intervalle $[a; b]$.

Exemple

Dans l'exemple précédent, on a $E(T) = \frac{0+10}{2} = 5$.

Donc l'attente moyenne de notre voyageur à l'arrêt de bus des papangues est de 5 minutes.

De plus, $V(T) = \frac{(10-0)^2}{12} = \frac{100}{12} = \frac{25}{3} \approx 8,33$.

V. Loi exponentielle

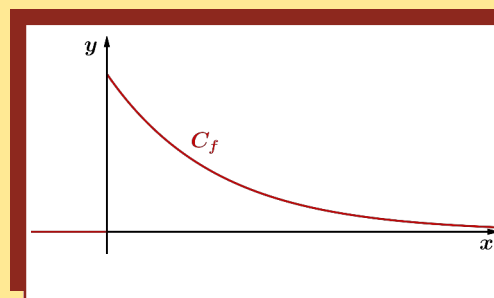
V.1 Définition

Définition 15

On dit qu'une variable aléatoire continue X suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ si sa densité f est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

On note $X \sim \varepsilon(\lambda)$.



Remarque

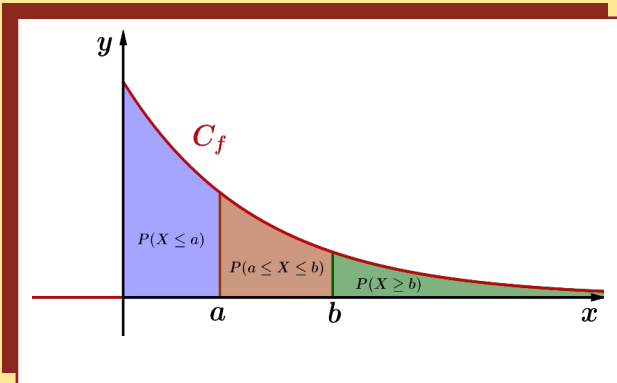
$f(0) = \lambda e^{-\lambda \cdot 0} = \lambda e^0 = \lambda$. Donc l'ordonnée à l'origine de la courbe représentative de f est égale à λ .

Propriété 16

Soit X une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

Alors, pour tous réels a et b :

- $P(X \leq a) = 1 - e^{-\lambda a}$.
- $P(a \leq X \leq b) = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}$.
- $P(X \geq b) = e^{-\lambda b}$.

**Démonstration**

- $P(X \leq a) = P(0 \leq X \leq a) = \int_0^a f(x) dx = \int_0^a \lambda e^{-\lambda x} dx = [-e^{-\lambda x}]_0^a = -e^{-\lambda a} - (-e^0) = 1 - e^{-\lambda a}$.
- $P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x) dx = \int_a^b \lambda e^{-\lambda x} dx = [-e^{-\lambda x}]_a^b = -e^{-\lambda b} - (-e^{-\lambda a}) = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}$.
- $P(X \geq b) = 1 - P(X < b) = 1 - (1 - e^{-\lambda b}) = e^{-\lambda b}$.

V.2 Fonction de répartition**Propriété 17**

Soit une variable aléatoire X qui suit la loi exponentielle. Alors la fonction de répartition de X est la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$.

V.3 Espérance**Propriété 18**

L'espérance d'une variable aléatoire X qui suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ est définie par :

$$E(X) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x t f(t) dt = \frac{1}{\lambda}$$

Démonstration

Soit g la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $g(x) = xf(x) = \lambda x e^{-\lambda x}$.

Par définition de l'espérance, on a $E(X) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x t f(t) dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x g(t) dt$.

Il faut trouver une primitive de la fonction g . Pour cela, on va dériver g .

La fonction g est dérivable sur $[0; +\infty[$ en tant que composée de telles fonctions.

$$\forall x \in [0; +\infty[, g'(x) = \lambda e^{-\lambda x} - \lambda^2 x e^{-\lambda x} = \lambda e^{-\lambda x} - \lambda g(x). \text{ D'où } \forall x \in [0; +\infty[, g(x) = e^{-\lambda x} - \frac{1}{\lambda} g'(x).$$

On peut alors déterminer une primitive de g et calculer l'intégrale précédente :

$$\int_0^x \left(e^{-\lambda t} - \frac{1}{\lambda} g'(t) \right) dt = \left[-\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda t} - \frac{1}{\lambda} g(t) \right]_0^x = -\frac{1}{\lambda} (e^{-\lambda x} + g(x) - 1 - g(0)) = -\frac{1}{\lambda} (e^{-\lambda x} + \lambda x e^{-\lambda x} - 1).$$

Il faut maintenant déterminer la limite cette expression.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} -\lambda x = -\infty \text{ et } \lim_{X \rightarrow -\infty} e^X = 0, \text{ donc par composition, } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-\lambda x} = 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} -\lambda x = -\infty \text{ et } \lim_{X \rightarrow -\infty} X e^X = 0 \text{ par croissances comparées. Par composition, } \lim_{x \rightarrow +\infty} \lambda x e^{-\lambda x} = 0.$$

$$\text{Par somme, } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-\lambda x} + \lambda x e^{-\lambda x} - 1 = -1 \text{ et par produit } \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{1}{\lambda} (e^{-\lambda x} + \lambda x e^{-\lambda x} - 1) = \frac{1}{\lambda}.$$

$$\text{Ainsi, } E(X) = \frac{1}{\lambda}.$$

V.4 Loi sans vieillissement

Définition 19 (Absence de mémoire)

Une variable aléatoire X à valeurs positives suit une loi sans vieillissement si :

$$\forall t > 0 \text{ et } \forall h > 0, P_{X \geq t}(X \geq t+h) = P(X \geq h)$$

Remarques

- On dit aussi que la variable aléatoire est **sans mémoire**.
- On dit que la durée de vie d'un appareil est sans vieillissement ou sans mémoire lorsque la probabilité que l'appareil fonctionne encore h années supplémentaires, sachant qu'il fonctionne à l'instant t , ne dépend pas de t . Ceci est valable si l'appareil n'est pas sujet à un phénomène d'usure. On retrouve cette propriété en ce qui concerne la durée de vie d'un noyau radioactif.

Propriété 20

La loi exponentielle est une loi sans mémoire.

Démonstration

$$\text{Par définition, on a } P_{X \geq t}(X \geq t+h) = \frac{P((X \geq t+h) \cap (X \geq t))}{P(X \geq t)}.$$

Or l'ensemble $\{X \geq t+h\}$ est inclus dans l'événement $\{X \geq t\}$. Donc $(X \geq t+h) \cap (X \geq t) = X \geq t+h$.

$$\text{Ainsi } P_{X \geq t}(X \geq t+h) = \frac{P(X \geq t+h)}{P(X \geq t)} = \frac{e^{-\lambda(t+h)}}{e^{-\lambda t}} = \frac{e^{-\lambda t} e^{-\lambda h}}{e^{-\lambda t}} = e^{-\lambda h} = P(T \geq h).$$

Remarque

On admettra que la loi exponentielle est la seule loi sans mémoire. Autrement dit, toute variable aléatoire à densité sans vieillissement suit une loi exponentielle.

Exemple

La durée de vie, en année, d'un composant électronique est une variable aléatoire notée T qui suit une loi sans vieillissement de paramètre λ . Une étude statistique a montré que pour ce type de composant, la durée de vie ne dépasse pas 5 ans avec une probabilité de 0,675.

- Cherchons une valeur arrondie de λ à 10^{-3} près.

Si T vérifie une loi sans mémoire, T suit donc une loi exponentielle. Si la durée de vie ne dépasse pas 5 ans avec une probabilité de 0,675, on a donc $P(T \leq 5) = \int_0^5 \lambda e^{-\lambda t} dt = [-e^{-\lambda t}]_0^5 = -e^{-5\lambda} + 1$.

Alors $-e^{-5\lambda} + 1 = 0,675 \Leftrightarrow -e^{-5\lambda} = -0,325 \Leftrightarrow e^{-5\lambda} = 0,325 \Leftrightarrow -5\lambda = \ln 0,325$.

Ainsi $\lambda = -\frac{\ln 0,325}{5} \approx 0,225$.

• Cherchons les probabilités qu'un composant de ce type dure moins de 8 ans, puis plus de 10 ans et enfin au moins 8 ans sachant qu'il fonctionne encore au bout de 3 ans (on arrondira à 10^{-3} près).

On a $P(T \leq 8) = P(T < 8) = 1 - e^{-0,225 \times 8} \approx 0,835$ et $P(T \geq 10) = P(T \geq 10) = e^{-0,225 \times 8} \approx 0,105$.

De plus, $P_{T \geq 3}(T \geq 8) = P_{T \geq 3}(T \geq 3 + 5) = P(T \geq 5) = e^{-0,225 \times 5} \approx 0,325$.

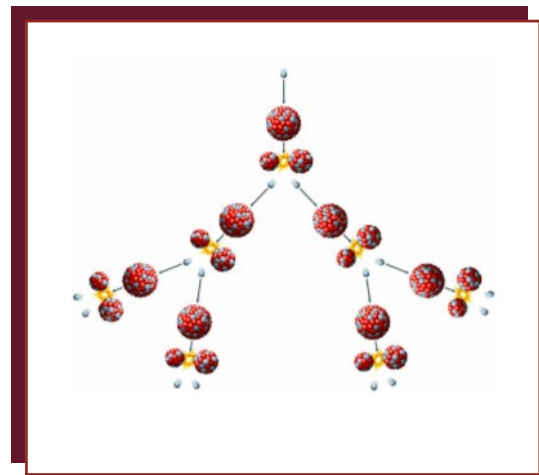
• Cherchons l'espérance de ce composant (on arrondira à 10^{-2} près).

On a $E(T) = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{0,225} \approx 4,44$. L'espérance de vie de ce composant est d'environ 4 ans et demi.

V.5 Application à la physique

La désintégration radioactive est un phénomène aléatoire. c'est à dire que l'on ne peut pas, à l'échelle « microscopique », dire quand un noyau va se désintégrer.

Néanmoins, à l'échelle macroscopique, on a pu établir que la durée de vie d'un noyau radioactif suit une loi de durée de vie sans vieillissement, c'est à dire une loi exponentielle de paramètre λ , λ étant la constante radioactive (en s^{-1}) qui caractérise un radionucléide.



On appelle T la variable aléatoire associée à la durée de vie d'un noyau. La probabilité p qu'un noyau ne soit pas désintégré à l'instant t est donc :

$$p = P(T \geq t) = e^{-\lambda t}$$

Si au départ on compte N_0 noyaux au bout d'un temps t , on en comptera $N(t)$ qui vérifie :

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$$

On appelle demi-vie $t_{1/2}$, le temps nécessaire pour que le nombre de radionucléides soit divisé par deux. On a alors $e^{-\lambda t_{1/2}} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow -\lambda t_{1/2} = \ln\left(\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow -\lambda t_{1/2} = -\ln 2 \Leftrightarrow t_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda}$.

Propriété 21

Soit X une variable aléatoire qui suit une loi de durée de vie sans vieillissement.

On appelle demi-vie la durée $t_{1/2}$ tel que $P(X > t_{1/2}) = \frac{1}{2}$. On obtient alors : $t_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda}$.

Remarque

La durée de vie moyenne τ d'un radionucléide est donnée par l'espérance mathématique :

$$\tau = \frac{1}{\lambda} \text{ où } \lambda = \frac{\ln 2}{t_{1/2}} \text{ et donc } \tau = \frac{t_{1/2}}{\ln 2} \approx 1,44 t_{1/2}$$

Définition 22

Soit X une variable aléatoire qui suit une loi de durée de vie sans vieillissement.
La durée de vie moyenne τ est donnée par l'espérance mathématique :

$$\tau = \frac{t_{1/2}}{\ln 2} \approx 1,44 t_{1/2}$$

Remarque

La demi-vie $t_{1/2}$ n'est pas égale à la durée de vie moyenne $\tau = E(X)$ car la courbe de densité de probabilité C_f n'est pas symétrique par rapport à la droite verticale d'équation $x = E(X)$.

