

Probabilités

I. Expérience aléatoire et événement

Une **expérience aléatoire** est une expérience dont le résultat dépend du hasard. Chacun des résultats possibles s'appelle **éventualité** ou **issue**. L'ensemble Ω (ou E) de tous les résultats possibles d'une expérience aléatoire s'appelle l'**univers** de l'expérience.

- Un **événement** A est une partie de l'univers Ω (un événement peut donc être constitué de zéro, une ou plusieurs issues de Ω).
- Un **événement élémentaire** est une partie de Ω qui ne contient qu'une seule issue.
- Un **événement impossible** est un événement qui n'est réalisé par aucune issue.
- Un **événement certain** est un événement qui est réalisé par toutes les issues.
- L'**événement contraire** de A , noté $\bar{A}$, est la partie constituée de toutes les issues de Ω qui ne sont pas dans A .

On appelle **cardinal de** A , noté **Card**(A), l'effectif de l'événement A . Autrement dit, **Card**(A) est égal au nombre d'issues qui réalisent l'événement A .

Donner une **loi de probabilité** associée à une expérience aléatoire c'est en donner toutes les issues et attribuer une probabilité à chacune d'elles de sorte que la somme des probabilités des issues est égale à 1. On peut présenter les résultats sous la forme d'un tableau.

II. Probabilité d'un événement

II.1 Loi des grands nombres

On a simulé n lancers d'un dé équilibré à 6 faces et noté le nombre de fois que le chiffre 4 est sorti. Le tableau suivant résume les résultats obtenus.

Nombre de lancers n	10	50	100	500	1000	10000	100000
Nombre de 4 obtenu	3	10	19	76	161	1681	16649
Fréquence d'apparition du chiffre 4	0,3	0,2	0,19	0,15	0,161	0,1681	0,16649

Si le dé est bien équilibré, le chiffre 4 a une chance sur 6 de sortir, soit $\frac{1}{6} \approx 0,166\dots$.

On peut remarquer que la fréquence d'apparition du chiffre 4 se rapproche de cette valeur théorique quand le nombre de lancers augmente.

Lors d'une expérience répétée n fois, les fréquences obtenues d'un événement A de l'expérience se rapprochent d'une valeur théorique lorsque n devient grand. Cette valeur s'appelle **probabilité de l'événement** A et est notée **P**(A).

II.2 Calculs de probabilité

La probabilité d'un événement A est la **somme des probabilités des événements élémentaires inclus dans A** .

- Pour tout événement A , on a $0 \leq P(A) \leq 1$.
- La **somme des probabilités des événements élémentaires vaut 1**.

Remarques

- La probabilité de l'événement certain vaut 1. On la note $P(\Omega)=1$ (ou $P(E)=1$).
- La probabilité de l'événement vide vaut 0. On la note $P(\emptyset)=0$.

Lorsque tous les événements élémentaires d'une expérience aléatoire ont la même probabilité, on dit alors qu'ils sont **équiprobables**. On parle d'**expérience équiprobable** ou de **loi équirépartie**.

Lors d'une expérience aléatoire ayant n issues équiprobables :

- La probabilité de chaque événement élémentaire est $\frac{1}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{1}{n}$.
- La probabilité d'un événement A est $P(A) = \frac{\text{nombre d'issues favorables à } A}{\text{nombre total d'issues}} = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)}$.

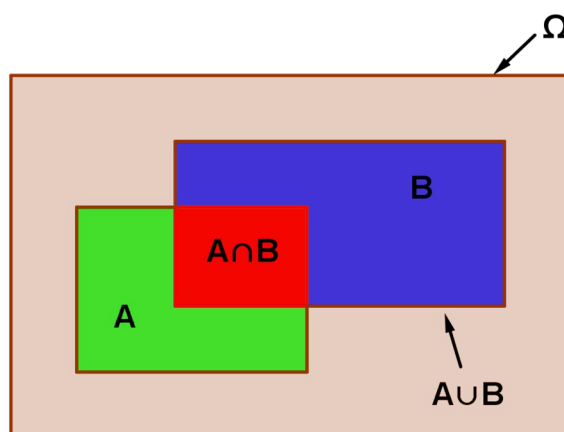
III.3 Événement contraire

La probabilité de l'**événement contraire** d'un événement A est : $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

III. Réunion et intersection d'événements

- L'événement « **A et B** », noté $A \cap B$, s'appelle l'**intersection** des événements A et B . Il est réalisé lorsque **les deux événements sont réalisés simultanément**.
- L'événement « **A ou B** », noté $A \cup B$, s'appelle la **réunion** des événements A et B . Il est réalisé lorsqu'**au moins l'un des deux événements est réalisé**.

Ces situations sont représentées par le **diagramme de Venn** ci-dessous.



Soit A et B deux événements d'une même expérience aléatoire. On a alors :
 $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Si l'événement $A \cap B$ ne contient aucun élément (c'est-à-dire que $A \cap B = \emptyset$), on dit que les événements A et B sont **incompatibles** (ou **disjoints**).

Si deux événements A et B sont **incompatibles**, alors $P(A \cap B) = 0$.
 Pour conséquence, on en déduit que $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Remarque

A et $\bar{A}$ sont incompatibles car $A \cap \bar{A} = \emptyset$.

IV. Probabilités conditionnelles

Soit A et B deux événements tels que $\text{Card}(A)$ soit non nul.
 La **probabilité conditionnelle** que l'événement B se réalise sachant que l'événement A est réalisé est notée $P_A(B)$, et elle est définie par :

$$P_A(B) = \frac{\text{Card}(A \cap B)}{\text{Card}(A)}$$

La probabilité $P_A(B)$ vérifie bien $0 \leq P_A(B) \leq 1$ et $P_A(B) + P_A(\bar{B}) = 1$.

V. Utilisation de tableaux

Les tableaux à double entrées permettent une présentation claire de certaines expériences aléatoires et facilitent le calcul des probabilités conditionnelles.

	B	$\bar{B}$	Total
A	$\text{Card}(A \cap B)$	$\text{Card}(A \cap \bar{B})$	$\text{Card}(A)$
$\bar{A}$	$\text{Card}(\bar{A} \cap B)$	$\text{Card}(\bar{A} \cap \bar{B})$	$\text{Card}(\bar{A})$
Total	$\text{Card}(B)$	$\text{Card}(\bar{B})$	$\text{Card}(\Omega)$

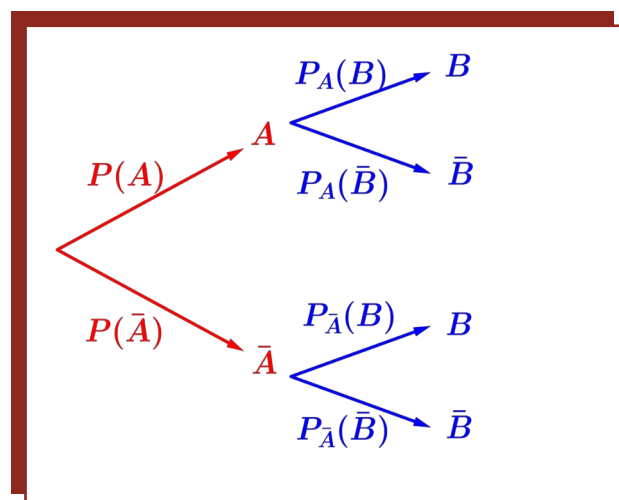
- $\text{Card}(A \cap B)$ se lit à l'intersection de la ligne A et de la colonne B .
- $\text{Card}(A)$ (respectivement $\text{Card}(B)$) se lit sur la dernière colonne (respectivement la dernière ligne).
- $P_A(B)$ (ou $P_B(A)$) s'obtient en calculant le quotient des deux cardinaux adéquats :

$$P_A(B) = \frac{\text{Card}(A \cap B)}{\text{Card}(A)} \quad \text{et} \quad P_B(A) = \frac{\text{Card}(A \cap B)}{\text{Card}(B)}$$

VI. Arbre pondéré et calculs de probabilité

- La probabilité de l'événement correspondant à un chemin est obtenue en multipliant les probabilités portées par ses branches.
- La somme des probabilités sur les branches partant d'un même nœud est égale à 1.
- La probabilité de l'événement correspondant à plusieurs chemins est obtenue en additionnant les probabilités de chacun de ces chemins (**formule des probabilités totales**).

Le cas le plus fréquent correspond à la partition la plus simple (A et $\bar{A}$). Si on connaît les probabilités de B et $\bar{B}$ par l'intermédiaire de A et $\bar{A}$, on a l'arbre suivant :



- Le produit des probabilités inscrites sur chaque branche d'un chemin donne la probabilité de l'intersection des événements placés sur ce chemin.

$$P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$$
- La somme des probabilités inscrites sur les branches issues d'un même nœud est égale à 1 (loi des nœuds).

$$P_A(B) + P_A(\bar{B}) = 1$$
- La probabilité d'un événement E est la somme des probabilités des chemins qui aboutissent à E .

$$P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B)$$

$$= P(A) \times P_A(B) + P(\bar{A}) \times P_{\bar{A}}(B)$$

Exemple

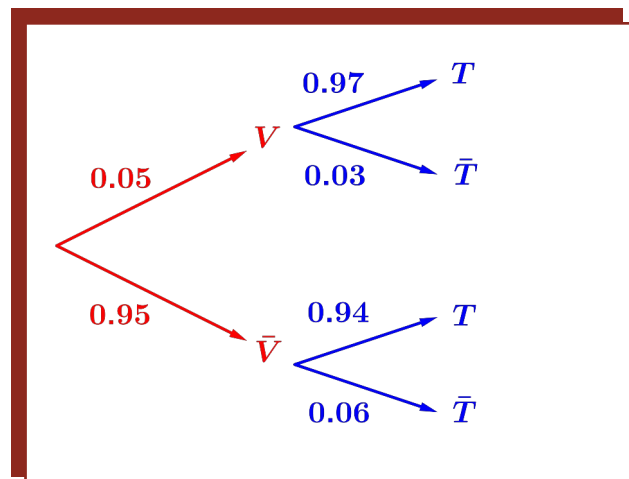
Dans un pays, il y a 5% de la population contaminée par le coronavirus. On dispose d'un test de dépistage de ce virus qui a les propriétés suivantes

- La probabilité qu'une personne contaminée ait un test positif est de 0,97 (sensibilité du test).
- La probabilité qu'une personne non contaminée ait un test négatif est de 0,94 (spécificité du test). On fait passer un test à une personne choisie au hasard dans cette population.

On note les événements suivants :

V : « la personne est contaminée par le virus »

T : « le test est positif »



- La probabilité que le test soit positif est :

$$P(T) = P(V \cap T) + P(\bar{V} \cap T)$$

$$= 0,05 \times 0,97 + 0,95 \times 0,94$$

$$= 0,9415$$

- La probabilité que la personne soit contaminée sachant que le test est positif est :

$$P_T(V) = \frac{P(V \cap T)}{P(T)}$$

$$= \frac{0,05 \times 0,97}{0,9415}$$

$$= 0,051514$$