Probabilités

I. Expérience aléatoire et événement

Une **expérience aléatoire** est une expérience dont le résultat dépend du hasard. Chacun des résultats possibles s'appelle **éventualité** ou **issue**. L'ensemble Ω (ou E) de tous les résultats possibles d'une expérience aléatoire s'appelle l'**univers** de l'expérience.

• Un **événement** A est une partie de l'univers Ω (un événement peut donc être constitué de zéro, une ou plusieurs issues de Ω).
• Un **événement élémentaire** est une partie de Ω qui ne contient qu'une seule issue.
• Un **événement impossible** est un événement qui n'est réalisé par aucune issue.
• Un **événement certain** est un événement qui est réalisé par toutes les issues.
• L'**événement contraire** de A, noté $\overline{A}$, est la partie constituée de toutes les issues de Ω qui ne sont pas dans A.

Donner une **loi de probabilité** associée à une expérience aléatoire c'est en donner toutes les issues et attribuer une probabilité à chacune d'elles de sorte que la somme des probabilités des issues est égale à 1. On peut présenter les résultats sous la forme d'un tableau.

II. Probabilité d'un événement

II.1 Loi des grands nombres

On a simulé n lancers d'un dé équilibré à 6 faces et noté le nombre de fois que le chiffre 4 est sorti. Le tableau suivant résume les résultats obtenus.

Nombre de lancers n	10	50	100	500	1000	10000	100000
Nombre de 4 obtenu	3	10	19	76	161	1681	16649
Fréquence d'apparition du chiffre 4	$0{,}3$	$0{,}2$	$0{,}19$	$0{,}15$	$0{,}161$	$0{,}1681$	$0{,}16649$

Si le dé est bien équilibré, le chiffre 4 a une chance sur 6 de sortir, soit $\frac{1}{6} \approx 0{,}166\ldots$.

On peut remarquer que la fréquence d'apparition du chiffre 4 se rapproche de cette valeur théorique quand le nombre de lancers augmente.

Lors d'une expérience répétée n fois, les fréquences obtenues d'un événement A de l'expérience se rapprochent d'une valeur théorique lorsque n devient grand. Cette valeur s'appelle **probabilité de l'événement $\mathbf{A}$** et est notée $\mathbf{P}(\mathbf{A})$.

II.2 Calculs de probabilité

La probabilité d'un événement A est la **somme des probabilités des événements élémentaires inclus dans A**.

• Pour tout événement A, on a $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$.
• La **somme des probabilités des événements élémentaires vaut 1**.

Remarques
• La probabilité de l'événement certain vaut 1. On la note $P(\Omega)=1$ (ou $P(E)=1$).
• La probabilité de l'événement vide vaut 0. On la note $P(\emptyset)=0$.

Lorsque tous les événements élémentaires d'une expérience aléatoire ont la même probabilité, on dit alors qu'ils sont **équiprobables**. On parle d'**expérience équiprobable** ou de **loi équirépartie.**

Lors d'une expérience aléatoire ayant n issues équiprobables :
• La probabilité de chaque événement élémentaire est $\frac{1}{n}$.
• La probabilité d'un événement A est $P(A)=\frac{\text{nombre d'issues favorables à } A}{\text{nombre total d'issues}}$.

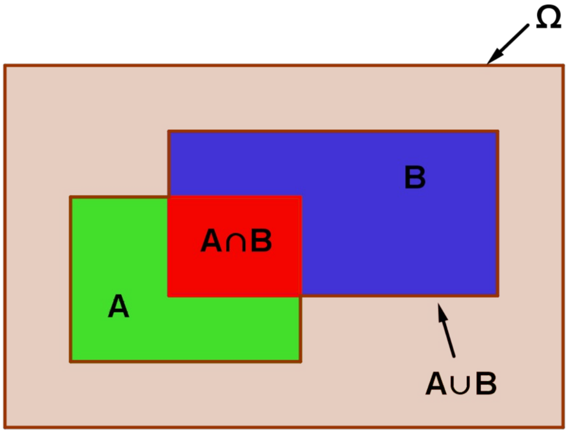
III.3 Événement contraire

La probabilité de l'**événement contraire** d'un événement A est : $P(\overline{A})=1-P(A)$

III. Réunion et intersection d'événements

• L'événement « **A et B** », noté $A \cap B$, s'appelle l'intersection des événements A et B.
Il est réalisé lorsque **les deux événements sont réalisés simultanément**.
• L'événement « **A ou B** », noté $A \cup B$, s'appelle la **réunion** des événements A et B.
Il est réalisé lorsqu'**au moins l'un des deux événements est réalisé**.

Ces situations sont représentées par le **diagramme de Venn** ci-dessous.



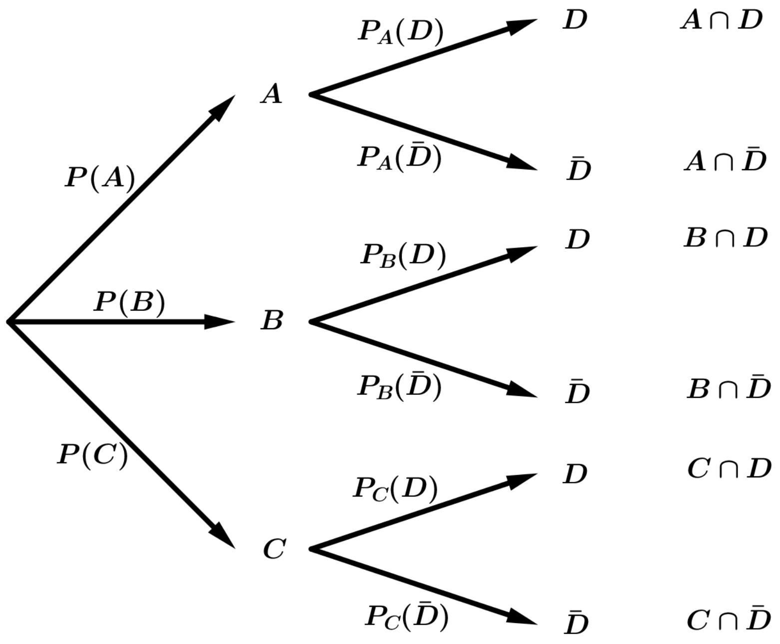
Soit A et B deux événements d'une même expérience aléatoire. On a alors :
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Si l'événement $A \cap B$ ne contient aucun élément (c'est-à-dire que $A \cap B = \varnothing$), on dit que les événements A et B sont **incompatibles** (ou **disjoints**).

Si deux événements A et B sont **incompatibles**, alors $P(A \cap B) = 0$.
Pour conséquence, on en déduit que $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Remarque
A et $\overline{A}$ sont incompatibles car $A \cap \overline{A} = \varnothing$.

IV. Règles d'utilisation d'un arbre de probabilités



Remarque
$P_A(D)$ se lit probabilité de D sachant A . Il s'agit de la probabilité d'avoir l'événement D sachant que l'événement A est réalisé.

Règle 1
La somme des probabilités sur les branches partant d'un même nœud est égale à 1.
Règle 2
La probabilité de l'événement correspondant à un chemin est obtenue en multipliant les probabilités portées par ses branches.
Règle 3
La probabilité de l'événement correspondant à plusieurs chemins est obtenue en additionnant les probabilités de chacun de ces chemins.

V. Utilisation de tableaux

Les tableaux à double entrées permettent une présentation claire de certaines expériences aléatoires et facilitent le calcul des probabilités conditionnelles.

	B	**$\overline{B}$**	**Total**
A	$P(A\cap B)$	$P(A\cap \overline{B})$	$P(A)$
$\overline{A}$	$P(\overline{A}\cap B)$	$P(\overline{A}\cap \overline{B})$	$P(\overline{A})$
Total	$P(B)$	$P(\overline{B})$	1

Exemple
On a demandé à 180 adolescents quel était leur genre de film préféré et on a consigné les résultats dans le tableau ci-dessous.

	Filles	**Garçons**	**Total**
Comédie	75	25	100
Action	45	35	80
Total	120	60	180

On choisit au hasard un adolescent qui a participé à cette étude. On considère les événements suivants :
A : « l'adolescent choisi préfère les films d'actions »
F : « l'adolescent choisi est une fille ».
Calculons $P(A\cap F)$ et $P(A\cup F)$.

Dans le tableau, on peut lire qu'il y a 45 filles qui préfèrent les films d'actions. Sachant que, sur les 180 adolescents qui ont été interrogés, 45 sont des filles qui préfèrent les films d'action, on a alors :

$$P(A\cap F)=\frac{45}{180}=\frac{1}{4}$$

On trouve dans le tableau que $P(F)=\frac{120}{180}=\frac{2}{3}$ et que $P(A)=\frac{80}{180}=\frac{4}{9}$.

D'où $P(A\cup F)=P(A)+P(F)-P(A\cap F)=\frac{2}{3}+\frac{4}{9}-\frac{1}{4}=\frac{31}{36}$.