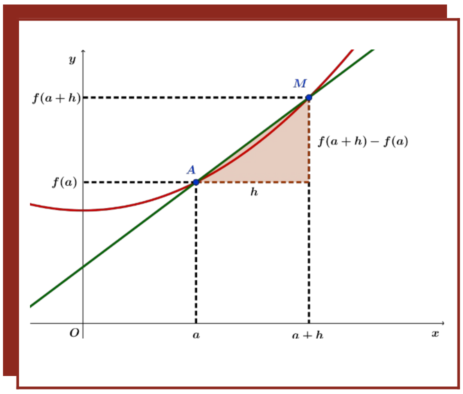
Dérivation

I. Nombre dérivé

I.1 Taux d'accroissement

Soit f une fonction définie sur un intervalle contenant les réels a et b. Le **taux de variation** de la fonction f entre a et b est le réel défini par le quotient $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Le **taux d'accroissement** de f entre a et $a+h$ est $\tau(h)=\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$.



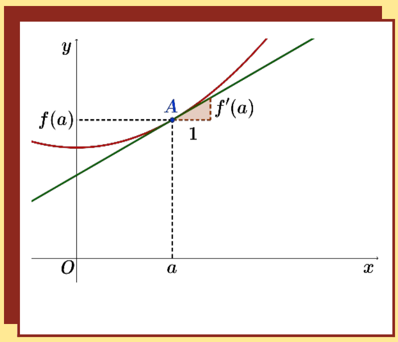
Remarques

• $\tau(0)$ n'existe pas, mais on va s'intéresser aux valeurs de t lorsque h se rapproche de plus en plus de 0.
• Le taux d'accroissement de f entre a et $a+h$ est le **coefficient directeur** de la droite (AM) avec $\mathrm{A}(a;f(a))$ et $\mathrm{M}(a+h;f(a+h))$.
On appelle cette droite une sécante à la courbe.

I.2 Nombre dérivé

Si, lorsque h se rapproche le plus possible de 0, $\tau(h)$ semble valoir une valeur réelle, on dit que f est dérivable en a. Cette valeur réelle est appelée **nombre dérivé** de f en a, et est notée $f'(a)$. On écrit alors : $f'(a)=\lim\limits_{h\to 0}\tau(h)$, soit $f'(a)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$.

On constate que, lorsque h tend vers 0, les sécantes en A tendent vers une droite particulière, nommée **tangente** à C_f en A : aux alentours du point $\mathrm{A}(a,f(a))$, elle est semblable à la courbe.



Lorsque f est dérivable en a, on appelle **tangente** à la courbe C_f au point d'abscisse a la droite T passant par $\mathrm{A}(a;f(a))$ dont **le coefficient directeur est le nombre dérivé $f'(a)$**.

Soit f une fonction dérivable en a. L'**équation** de la tangente T à la courbe C_f au point d'abscisse a est : $\mathrm{T}: y=f'(a)(x-a)+f(a)$.

II. Fonction dérivée

Soit une fonction f définie sur un intervalle I.
On dit que f est dérivable sur I si elle est dérivable en tout point x de I.
On appelle fonction dérivée de f et on note f' la fonction qui à chaque x associe $f'(x)$.

Remarque
Toutes les fonctions usuelles vues en première sont dérivables sur leur domaine de définition.

III. Dérivées des fonctions usuelles

Fonction	D_f	Fonction dérivée	$\mathrm{D}_{f'}$
$f(x)=k$, $k\in\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x)=0$	$\mathbb{R}$
$f(x)=mx+p$	$\mathbb{R}$	$f'(x)=m$	$\mathbb{R}$
$f(x)=x$	$\mathbb{R}$	$f'(x)=1$	$\mathbb{R}$
$f(x)=x^2$	$\mathbb{R}$	$f'(x)=2x$	$\mathbb{R}$
$f(x)=x^3$	$\mathbb{R}$	$f'(x)=3x^2$	$\mathbb{R}$

IV. Opérations sur les fonctions dérivées

Soit f une **fonction polynomiale** de la forme $f(x)=a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1 x+a_0$ définie sur $\mathbb{R}$ avec $n\in\mathbb{N}$ et $a_n\neq 0$.
La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x)=na_n x^{n-1}+(n-1)a_{n-1}x^{n-2}+\ldots+a_1$.

Fonction	Fonction dérivée
$u+v$	$u'+v'$
$u-v$	$u'-v'$
ku, $k\in\mathbb{R}$	ku'

V. Sens de variation d'une fonction

V.1 Du sens de variation d'une fonction au signe de la dérivée

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I.
• Si f est **croissante** sur I, alors pour tout réel x de I, $\boldsymbol{f'(x) \geqslant 0}$.
• Si f est **décroissante** sur I, alors pour tout réel x de I, $\boldsymbol{f'(x) \leqslant 0}$.
• Si f est **constante** sur I, alors pour tout réel x de I, $\boldsymbol{f'(x) = 0}$.

Remarque
Dans de nombreux cas il sera nécessaire de dériver pour étudier les variations d'une fonction, car l'étude du signe de la dérivée sera plus simple que l'étude des variations de la fonction initiale.

V.2 Du signe de la dérivée au sens de variation de la fonction

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I.
• Si pour tout réel x de I, $\boldsymbol{f'(x) \geqslant 0}$, alors la fonction f est **croissante** sur I.
• Si pour tout réel x de I, $\boldsymbol{f'(x) \leqslant 0}$, alors la fonction f est **décroissante** sur I.
• Si pour tout réel x de I, $\boldsymbol{f'(x) = 0}$, alors la fonction f est **constante** sur I.
• Si f' est **strictement positive** (respectivement **strictement négative**) sur I, sauf éventuellement pour un nombre fini de valeurs de x où f' s'annule, alors f est **strictement croissante** (respectivement **strictement décroissante**) sur I.

Remarques
Une flèche dans le tableau de variation d'une fonction f indiquera :
• la stricte croissance ou décroissance de f sur l'intervalle correspondant.
• la continuité (ou absence de rupture) de la courbe C_f sur cet intervalle.

VI. Extremum d'une fonction

Soit une fonction f définie sur un intervalle I et a un réel de I.
• On dit que le réel M est le **maximum** de f sur I, **atteint** en a, si $f(a)=\mathrm{M}$ et si pour tout réel x de I, on a $f(x) \leqslant \mathrm{M}$.
• On dit que le réel m est le **minimum** de f sur I, **atteint** en a, si $f(a)=m$ et si pour tout réel x de I, on a $f(x) \geqslant m$.
• Un **extremum** de f sur I est **un maximum ou un minimum** de f sur I.
• On dit que le réel L est un **maximum** (respectivement **minimum**) **local** de f sur I s'il existe un intervalle ouvert J contenu dans I, tel que L est le maximum (respectivement minimum) de f sur J.

Remarques
• Les pluriels de "minimum", "maximum" et "extremum" sont "minima", "maxima" et "extrema".
• Graphiquement, il s'agit pour le maximum du plus haut "sommet" de la courbe, et pour le minimum du plus bas "sommet" de la courbe.