

Calcul intégral

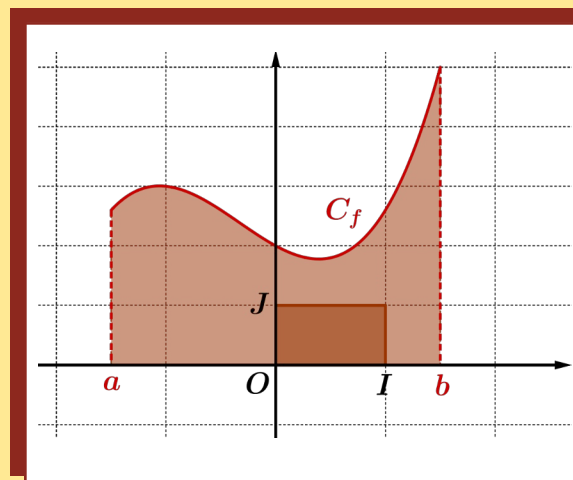
I. Intégrale d'une fonction continue positive

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a; b]$ (avec $a \leq b$) et C_f sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O; I, J)$. On appelle :

- **unité d'aire** l'aire du rectangle construit à l'aide des points O , I et J . On la note **u.a.** .

- **Domaine sous la courbe** le domaine délimité par la courbe C_f , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=a$ et $x=b$. Ce domaine est l'ensemble des points $M(x; y)$ tels que :
 $a \leq x \leq b$ et $0 \leq y \leq f(x)$

- **Intégrale de f sur $[a; b]$** la mesure de l'aire, en unité d'aire, du domaine situé sous la courbe. On la note $\int_a^b f(x) dx$.



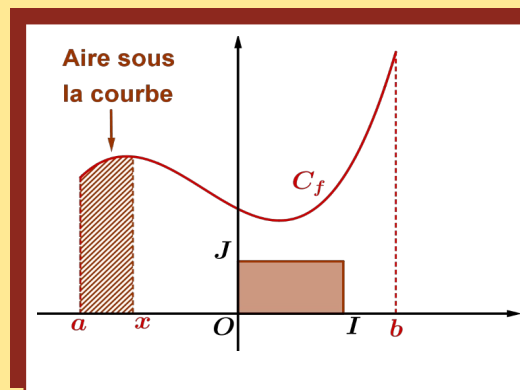
II. Primitive d'une fonction continue

Théorème fondamental

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a; b]$. La fonction F définie par

$F(x) = \int_a^x f(t) dt$ est dérivable sur $[a; b]$ et a pour dérivée f . Ainsi $F' = f$.

La fonction F est la primitive de f sur $[a; b]$ qui s'annule en a .



Soit f une fonction continue définie sur un intervalle I .

On appelle **primitive** de f sur I toute fonction F dérivable sur l'intervalle I telle que :

$$\text{Pour tout réel } x \in I, F'(x) = f(x)$$

Toute fonction continue sur un intervalle I admet des primitives sur I .

III. Intégrale d'une fonction continue quelconque

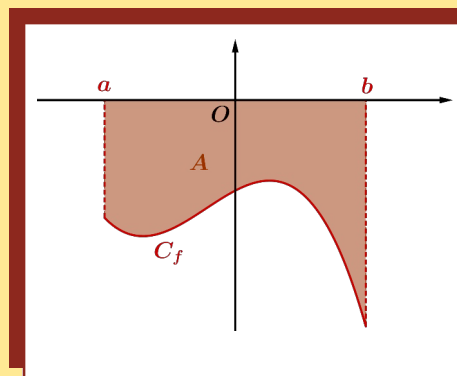
Soit f une fonction continue sur un intervalle I , F une primitive de f et a et b deux réels de I . L'intégrale de f entre a et b est définie par :

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Soit f une fonction continue et négative sur un intervalle I et a et b deux réels de I .

On appelle intégrale de f sur $[a; b]$, et on note $\int_a^b f(x) dx$, l'opposé de l'aire A , en unités d'aire, délimitée par la courbe C_f , l'axe des abscisses et les droites d'équation $x=a$ et $x=b$.

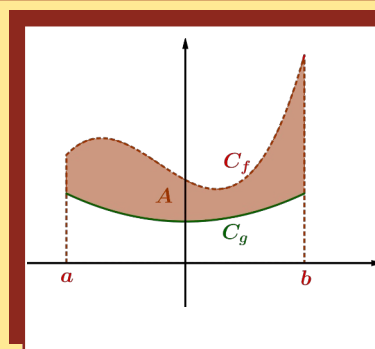
Ainsi $A = -\int_a^b f(x) dx$.



Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[a; b]$ telles que $f(x) \geq g(x)$.

On appelle A l'aire comprise entre les deux courbes et les droites d'équation $x=a$ et $x=b$.

Ainsi $A = \int_a^b (f - g)(x) dx$.



IV. Propriétés de l'intégrale

Soit f et g des fonctions continues sur un intervalle I et α et β des réels.

- Pour tout $a \in I$, $\int_a^a f(x) dx = 0$.
- Pour tout $(a; b) \in I^2$, $\int_b^a f(x) dx = -\int_a^b f(x) dx$.
- **Relation de Chasles** : Pour tout $(a; b; c) \in I^3$, $\int_a^c f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx$.
- **Linéarité** : Pour tout $(a; b) \in I^2$, $\int_a^b (\alpha f + \beta g)(x) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx$.

Parité

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et a un réel.

- Si f est paire, alors $\int_{-a}^0 f(x) dx = \int_0^a f(x) dx$.
- Si f est impaire, alors $\int_{-a}^0 f(x) dx = -\int_0^a f(x) dx$.

Remarques

- Si une fonction est paire, alors d'après la relation de Chasles, on a :

$$\int_{-a}^a f(x) dx = \int_{-a}^0 f(x) dx + \int_0^a f(x) dx = \int_0^a f(x) dx + \int_0^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$$

- Si une fonction est impaire, alors d'après la relation de Chasles, on a :

$$\int_{-a}^a f(x) dx = \int_{-a}^0 f(x) dx + \int_0^a f(x) dx = -\int_0^a f(x) dx + \int_0^a f(x) dx = 0$$

Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle I , a et b des réels de I tels que $a \leq b$.

Positivité

- Si f est positive sur $[a; b]$, alors $\int_a^b f(x) dx \geq 0$.

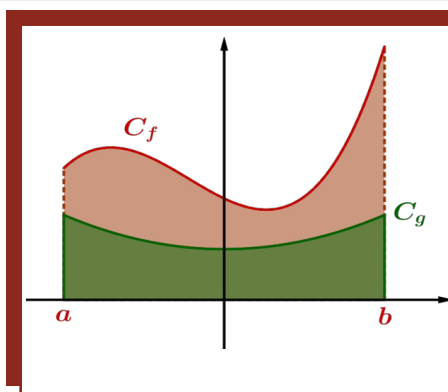
- Si f est négative sur $[a; b]$, alors $\int_a^b f(x) dx \leq 0$.

Inégalité

Si pour tout $x \in [a; b]$, $f(x) \geq g(x)$, alors $\int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx$.

Remarque

Dans le cas où f et g sont positives sur $[a; b]$, si $f(x) \geq g(x)$ alors l'aire sous la courbe représentative de f est inférieure ou égale à l'aire sous la courbe représentative de g .



Valeur moyenne

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et a et b deux réels de I tels que $a < b$.

La **valeur moyenne** de la fonction f sur $[a; b]$ est le réel μ défini par :

$$\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

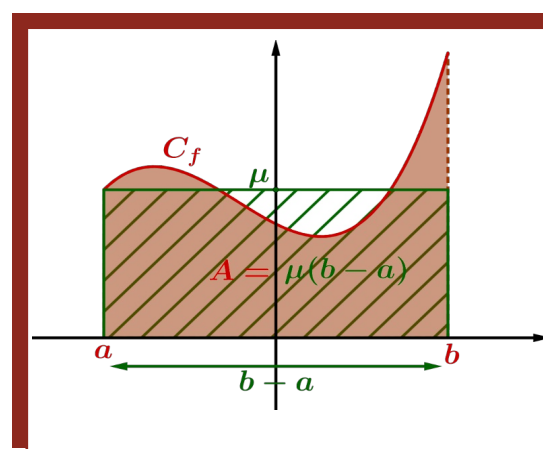
Interprétation graphique

La valeur moyenne μ est telle que :

$$\int_a^b f(x) dx = \mu(b-a)$$

Ainsi, lorsque f est continue et positive sur un intervalle $[a; b]$, la valeur moyenne μ peut-être interprété comme la hauteur du rectangle de base $b-a$ et ayant la même aire que le domaine A sous la courbe C_f .

Ainsi $A = \int_a^b f(x) dx = \mu(b-a)$.



Inégalité de la moyenne

Soit f une fonction continue sur un intervalle I , a et b deux réels de I tels que $a \leq b$.
 Soit deux réels m et M tels que pour tout $x \in [a; b]$, $m \leq f(x) \leq M$. Alors :

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$$

Interprétation graphique

Si la fonction f est bornée sur $[a; b]$ par deux constantes m et M positives, alors l'inégalité de la moyenne traduit le fait que l'aire sous la courbe C_f sur $[a; b]$ est comprise entre les aires des rectangles construits sur $[a; b]$ et de hauteurs respectives m et M .

