

Fonction logarithme népérien

Exercice 1

Résoudre les équations suivantes :

- | | | |
|-----------------------------------|-------------------------------|-----------------------------|
| 1. $15 - 7e^x = 0$; | 2. $4e^x - 7 = 5$; | 3. $\ln(5x) = 3$; |
| 4. $1 - 2\ln(x) = 0$; | 5. $e^x = 5$; | 6. $5 - e^{2x+1} = 8$; |
| 7. $\ln(1-x) = 3$; | 8. $\ln(5+3x) = \ln(9-x^2)$; | 9. $e^{2x} + e^x - 6 = 0$; |
| 10. $12 - 4e^x = 0$; | 11. $e^{x+2} - 15 = 0$; | 12. $2 + 3e^x = 11$; |
| 13. $(e^x - 3)(e^{2x} - 4) = 0$; | 14. $(e^{x-2} - 5)^2 = 0$; | 15. $e^x(2e^x + 1) = 15$; |
| 16. $\ln(4-x^2) = 0$; | 17. $e^{2x} - 6e^x - 7 = 0$; | 18. $\ln(1+x) = 3$. |

Exercice 2

Résoudre les inéquations suivantes :

- | | |
|-----------------------------------|---|
| 1. $\ln(5-x) \leq -2$; | 2. $\ln(x^2 - x - 6) < \ln(3x - 1)$; |
| 3. $\ln(3x) \leq 1$; | 4. $\ln(4-x) \leq 0$; |
| 5. $\ln(1+x) \geq \ln(3-2x)$; | 6. $\ln(x^2 - 1) \geq \ln(8)$; |
| 7. $\ln(1+e^x) > 0$; | 8. $\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) > \ln(3)$; |
| 9. $5e^x - 8 > 4 - e^x$; | 10. $e^{-4x} - 2 \geq 0$; |
| 11. $e^{4x+5} < 2e^x$; | 12. $3e^{2x} - 21 < 0$; |
| 13. $\ln(49 - x^2) > \ln(24)$; | 14. $(2e^x - 8)(7 - e^x) > 0$; |
| 15. $(2 - e^x)(5 - e^{3x}) > 0$; | 16. $\ln(2x+1) \geq \ln(3-x)$. |

Exercice 3

Simplifier les expressions suivantes :

- | | |
|--|--|
| 1. $e^{\ln(2)} - e^{\ln(7)}$; | 2. $3e^{\ln(5)} + 5e^{-\ln(3)}$; |
| 3. $\ln(e^{-4}) \times \ln(e^3)$; | 4. $e^{\ln(3)} + e^{-\ln(3)}$; |
| 5. $\ln(e^3) \times e^{-\ln(3)}$; | 6. $\ln((3+\sqrt{5})^7) + \ln((3-\sqrt{5})^7)$; |
| 7. $\ln(2\sqrt{3}) + 2\ln(\sqrt{3})$; | 8. $\ln\left(\frac{3e^2}{\sqrt{e}}\right)$; |
| 9. $\ln(e^2 - 1) - \ln(1+e)$; | 10. $\frac{\ln(125)}{\ln(25)}$; |
| 11. $3\ln(e^4) + \ln(\sqrt{e})$; | 12. $\ln(e^2\sqrt{e}) - \ln\left(\frac{1}{e}\right)$; |
| 13. $\ln\left(\frac{\sqrt{e}}{e}\right)$; | 14. $\frac{(\ln(e^3))^2}{\ln(e^4)}$. |

Exercice 4

Exprimer en fonction de $\ln(2)$ et $\ln(3)$ les expressions suivantes :

- | | |
|---|---|
| 1. $\ln\left(\frac{8}{9}\right)$; | 2. $2\ln(3\sqrt{2}) - 2\ln(2\sqrt{3})$; |
| 3. $\ln\left(\frac{4\sqrt{2}}{27}\right)$; | 4. $\frac{\ln(64)}{\ln(81)} + \frac{\ln(49)}{\ln(7)}$. |

Exercice 5

Vrai ou faux.

1. Pour tout réel x , $\ln(e^x) = x$;
2. Pour tout réel x , $e^{\ln(x)} = x$;
3. Pour tout réel $x > 0$, $\ln(x) > 0$;
4. $e^{\ln(4)} - e^{-\ln(4)} = 3,75$.

Exercice 6

1. On pose $a = \ln(2)$ et $b = \ln(3)$. Exprimer en fonction de a et de b chacun des nombres suivants :

- a. $\ln(6)$; b. $\ln(9)$; c. $\ln\left(\frac{2}{3}\right)$; d. $\ln\left(\frac{1}{12}\right)$; e. $\ln(72)$; f. $\ln\left(\frac{3e^2}{2}\right)$.

2. Pour tout réel $x > 1$, on pose $A = \ln(x^2 - 1) - \ln((x - 1)^2)$.

Écrire A sous la forme d'un logarithme d'un quotient.

Exercice 7

Résoudre les équations suivantes :

1. $\frac{1}{3} \ln(x) = \ln(5)$;
2. $\ln(x(x + 8)) = 2 \ln(3)$;
3. $[\ln(x)]^2 + \ln(x) - 6 = 0$;
4. $\ln(x) + \ln(x + 8) = 2 \ln(3)$;
5. $x - x \ln(x) = 0$;
6. $5 \ln(x) = x \ln(x)$;
7. $[\ln(x)]^2 - 2 \ln(x) = 0$;
8. $\ln(x) - 1 = 0$.

Exercice 8

Résoudre les inéquations suivantes :

1. $5 - 3 \ln(x) \geq 0$;
2. $(\ln(x))^2 - 5 \ln(x) < 0$;
3. $0,7^n \leq 10^{-3}$ (où $n \in \mathbb{N}$) ;
4. $\ln(x - 1) + \ln(x + 4) \leq \ln(6)$;
5. $\ln(x) + \ln(3x - 1) > \ln(2)$;
6. $\ln(x^2 + 1) > -\ln\left(\frac{1}{3}\right)$;
7. $\ln(5 - x) \geq 2 \ln(2) + \ln(3)$;
8. $\ln(x + 2) + \ln(x - 2) > \ln(5)$.

Exercice 9

Résoudre les équations et inéquations suivantes, après avoir déterminer l'ensemble de définition.

1. $\ln\left(\frac{x-1}{2x-3}\right) = 0$;
2. $\ln(4x + 2) - \ln(x - 1) = \ln(x)$;
3. $\ln(2x - 3) + 2 \ln(x + 1) = \ln(x - 3)$;
4. $2(\ln(x))^2 - \ln(x) - 3 < 0$;
5. $\ln\left(\frac{5-4x}{x+3}\right) = 1$;
6. $\frac{1}{2} \ln(x + 3) = \ln(x + 1)$;
7. $(\ln(x))^2 - 7 \ln(x) + 12 \leq 0$;
8. $\ln(x^2 - 4) \leq \ln(2) + \ln(x)$;
9. $(7x - 5) \ln(x + 1) > 0$;
10. $\ln(5 - x) - \ln(3) + \ln(x - 1) \leq 0$.

Exercice 10

Soit les fonctions f , g et h définies sur $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = x + 3 + \ln(x), \quad g(x) = x^2 + 2 \ln(x) \quad \text{et} \quad h(x) = \frac{1}{x} - \ln(x)$$

Déterminer les limites de ces fonctions en 0 et $+\infty$.

Exercice 11

Déterminer les limites des fonctions f suivantes aux bornes de l'ensemble de définition :

1. $f(x) = \frac{2\ln(x)}{x}$;
2. $f(x) = \frac{1}{\ln(x)}$;
3. $f(x) = \frac{\ln(x)+1}{x}$;
4. $f(x) = \frac{x}{3\ln(x)}$;
5. $f(x) = \frac{e}{\ln(x)}$;
6. $f(x) = 10 - 3[\ln(x)]^2$.

Exercice 12

Déterminer les limites suivantes :

1. $\lim_{x \rightarrow 0^+} (e^x + \ln(x))$;
2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x} + \ln(x))$;
3. $\lim_{x \rightarrow e^-} \frac{3}{1 - \ln(x)}$;
4. $\lim_{\substack{x \rightarrow e^2 \\ x > e^2}} \frac{x}{-2 + \ln(x)}$.

Exercice 13

Déterminer les limites suivantes :

1. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{5x^3 \ln(x)}{1 + 4\ln(x)}$;
2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (4\ln(x) - 3x^2 + 8)$;
3. $\lim_{x \rightarrow 0^+} ((\ln(x))^2 + \ln(x) - 5\ln(2))$;
4. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \ln\left(\frac{3x+5}{x-1}\right)$;
5. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(x \ln\left(x + \frac{2}{x}\right)\right)$;
6. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x + \frac{\ln(x)}{2x+1}\right)$.

Exercice 14

Étudier les limites des fonctions suivantes aux bornes de l'ensemble de définition :

1. $f(x) = (\ln(x))^4$ sur $]0; +\infty[$;
2. $f(x) = \frac{1}{\ln(x)}$ sur $]1; +\infty[$;
3. $f(x) = \ln(\ln(x))$ sur $]1; +\infty[$;
4. $f(x) = \frac{\ln(1+3x)}{x}$ sur $]0; +\infty[$.

Exercice 15

Déterminer les limites des fonctions suivantes aux endroits indiqués.

1. $f(x) = \frac{\ln(1 + \sin(x))}{x}$ en 0 ;
2. $f(x) = \ln(\sin(x)) - \ln(x)$ en 0 ;
3. $f(x) = \frac{\ln(x^2 - 3x + 1)}{x}$ en $+\infty$;
4. $f(x) = x \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)$ en 0 ;
5. $f(x) = (\ln(x))^2$ en 0 et $+\infty$;
6. $f(x) = \frac{2\ln(x)+7}{x+\ln(x)}$ en $+\infty$;
7. $f(x) = \frac{\ln(1-4x)}{x}$ en 0 ;
8. $f(x) = \frac{\ln(1+x)}{\tan(x)}$ en 0 ;
9. $f(x) = \frac{x - \ln(x)}{(\ln(x))^2}$ en $+\infty$;
10. $f(x) = \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}$ en $+\infty$;
11. $f(x) = \frac{\ln(1+x)}{x^2}$ en 0^+ ;
12. $f(x) = \ln(\ln(x))$ en 1^+ ;
13. $f(x) = \ln(3x^4 - 4x^3 + 2) - \ln(9x^6 + 1)$ en $+\infty$.
14. $f(x) = (x-1)^2 \ln(x-1)$ en 1.

Exercice 16

Dans chacun des cas, donner l'ensemble de définition de f , sa dérivée f' , l'ensemble de dérivabilité de f , les limites de f et le tableau de variations de f .

1. $f(x) = \ln(x) + \frac{1}{x}$;

2. $f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$;

3. $f(x) = x \ln(x) - x$;

4. $f(x) = -2x^3 + 5 - \ln(x)$;

5. $f(x) = \frac{2 - \ln(x)}{2 + \ln(x)}$;

6. $\frac{\ln(x)}{5x}$;

7. $f(x) = x - 3 - 2x \ln(x)$;

8. $f(x) = (\ln(x))^2 - 6 \ln(x) + \ln(5)$;

9. $f(x) = \frac{x \ln(x) + 1}{e^x}$;

10. $f(x) = x \ln(x) + e$.

Exercice 17

Résoudre les équations suivantes :

1. $1 - 2 \ln(x + 3) = 0$;

2. $\ln(x^2 + 4e^x) = 2 + \ln(5)$;

3. $\ln(3x - 8) = \ln(3)$;

4. $\ln(3x - 8) = 0$;

5. $\ln(3x - 8) = 5$;

6. $\ln(3x - 8) = -2$;

7. $\ln(x^2 - 3x + 4) = 3 \ln(2)$;

8. $\frac{1}{2} \ln(-x + 3) = \ln(x - 1)$;

9. $\ln(x^4 + 2x^2 - 1) = \ln(5)$.

Exercice 18

Résoudre les équations suivantes :

1. $\ln(x) + \ln(x + 1) \leq \ln(6)$;

2. $\ln(x(x + 1)) \leq \ln(6)$;

3. $\ln(7x + 3) \geq \ln(2 - x)$;

4. $\ln(e^{2x} - 9) \geq 0$;

5. $\ln((x + 1)(x - 2)) \leq \ln(18)$;

6. $\ln(x + 1) + \ln(x - 2) \leq \ln(18)$;

7. $\ln\left(\frac{1 - x^2}{x - 7}\right) \geq 0$;

8. $\ln(1 - x^2) - \ln(x - 7) \geq 0$.

Exercice 19

Déterminer le tableau de variations (limites comprises) de chacune des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \ln(\ln(x))$;

2. $f(x) = \ln\left(\frac{x + 2}{4 - x}\right)$;

3. $f(x) = (x - 2) \ln(x - 2)$;

4. $f(x) = (\ln(x))^2 - \ln(x^2)$;

5. $f(x) = \ln\left(\frac{1 - 3x}{x}\right)$;

6. $f(x) = (1 - x) \ln(1 - x)$;

7. $f(x) = \ln\left(\frac{e^x + 1}{2e^x + 3}\right)$;

8. $f(x) = x + \ln\left(1 - e^{\frac{x}{2}}\right)$;

9. $f(x) = \ln\left(\frac{x - 1}{x}\right) - \frac{x}{2}$;

10. $f(x) = \ln\left(\frac{e^x - 1}{e^x + 1}\right)$.

Exercice 20

Étudier le signe des fonctions suivantes :

1. $f(x) = 3 \ln(x + 5) - 6$;

2. $g(x) = (x - 4) \ln(x - 2)$;

3. $h(x) = \frac{\ln(x - 1)}{\ln(x + 1)}$;

4. $k(x) = \ln\left(\frac{e^x - 2}{e^x - 1}\right)$.

Problèmes**Problème 1** ...Étude classique...

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par $f(x) = x \ln(x) - 2x + 1$.

1. Déterminer les limites de la fonction f aux bornes de son ensemble de définition.
2. Dresser le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $\mathbb{R}^{+*}$.
3. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $[e; +\infty[$.
Donner un encadrement de α à 10^{-2} près.

Problème 2 ...Preuve...

Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x} - \ln(x)$.

1. Étudier les variations de la fonction f . En déduire que f admet un minimum sur $]0; +\infty[$.
2. En déduire le signe de f puis montrer que, pour tout réel $x > 1$, $0 < \frac{\ln(x)}{x} < \frac{\sqrt{x}}{x}$.
3. En déduire que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$.

Problème 3 ...Inéquation logarithmique...

Pour tout réel x , on pose $P(x) = 2x^3 + 5x^2 + x - 2$.

1. a. Vérifier que $P(-1) = 0$.
b. En déduire une factorisation de $P(x)$.
c. Résoudre alors l'inéquation $P(x) \leq 0$.
2. Utiliser les résultats précédents pour résoudre l'inéquation $2 \ln(x) + \ln(2x+5) \leq \ln(2-x)$.

Problème 4 ...Étude à l'aide d'une fonction auxiliaire...

Soit la fonction f définie sur $I =]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{\ln(x)}{x+1}$.

On note C_f la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé du plan.

Partie A : Étude d'une fonction auxiliaire

Soit la fonction g définie sur I par $g(x) = 1 + x - x \ln(x)$.

1. Étudier les limites de g aux bornes de son ensemble de définition.
2. Étudier les variations de la fonction g et dresser son tableau de variations.
3. Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution sur I notée α .
4. Déterminer un encadrement de α d'amplitude 10^{-2} .
5. En déduire le signe de la fonction g sur I .

Partie B : Étude de la fonction f

1. Étudier les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

2. Justifier que f est dérivable sur I . Montrer que pour tout $x \in]0; +\infty[$, $f'(x) = \frac{g(x)}{x(1+x)^2}$.

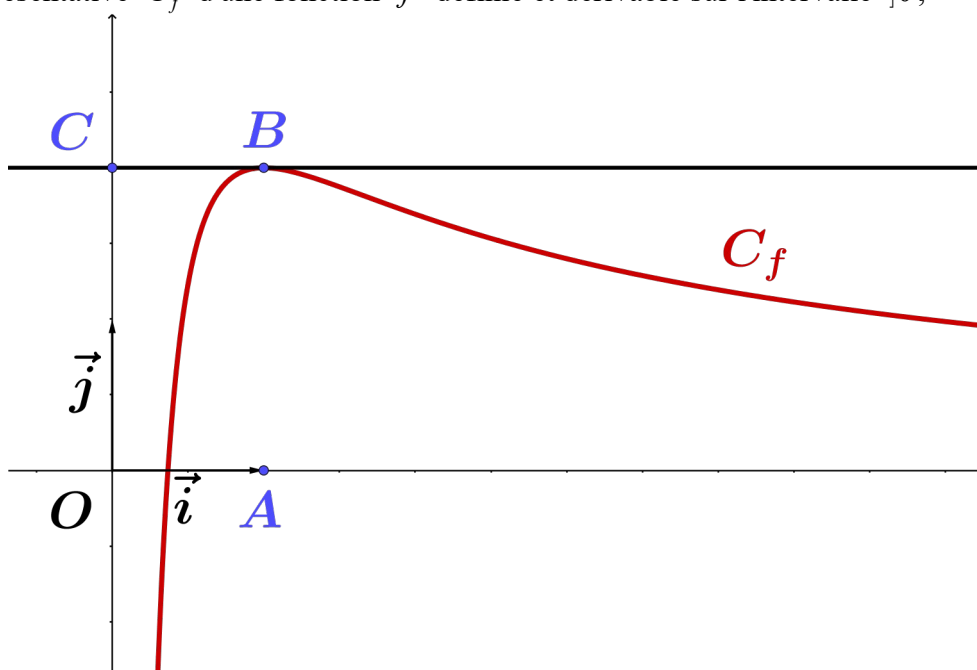
3. En déduire le signe de f' puis dresser le tableau de variations de f sur I .

4. Montrer que $f(\alpha) = \frac{1}{\alpha}$ puis déterminer un encadrement de $f(\alpha)$.

5. Déterminer l'équation réduite de la tangente T à C_f au point d'intersection de C_f et de l'axe des abscisses.

Problème 5 ...Des inconnues...

Sur le graphique ci-dessous, on a tracé dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ la courbe représentative C_f d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $]0; +\infty[$.



On dispose des informations suivantes :

- les points A , B et C ont pour coordonnées respectives $(1;0)$, $(1;2)$ et $(0;2)$
- la courbe C_f passe par le point B et la droite (BC) est tangente à C_f en B
- il existe deux réels positifs a et b tels que pour tout $x \in]0; +\infty[$, $f(x) = \frac{a + b \ln(x)}{x}$

1. a. En utilisant le graphique, donner les valeurs de $f(1)$ et $f'(1)$.
 b. Vérifier que pour tout $x \in]0; +\infty[$, $f'(x) = \frac{(b-a) - b \ln(x)}{x^2}$.
 c. En déduire les réels a et b .
2. a. Justifier que pour tout $x \in]0; +\infty[$, $f'(x)$ a le même signe que $-\ln(x)$.
 b. Déterminer les limites de f en 0 et $+\infty$.
 c. En déduire le tableau de variations de f .

Problème 6 ...Logarithme et suite...

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = e^3$ et pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = e \sqrt{u_n}$.

On note (v_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $v_n = \ln(u_n) - 2$.

1. Démontrer que (v_n) est une suite géométrique. On précisera sa raison et son premier terme.
2. En déduire v_n , puis $\ln(u_n)$, en fonction de n .
3. Déterminer la limite de (v_n) . En déduire que la suite (u_n) converge vers e^2 .

Problème 7 ...Étude moins classique...

On considère la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{(\ln(x))^2}{x}$.

On note C_f la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

1. Déterminer la limite en 0 de la fonction f et interpréter graphiquement le résultat.

2. a. Démontrer que, pour tout x appartenant à $]0; +\infty[$, $f(x) = 4 \left(\frac{\ln(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} \right)^2$.

b. En déduire que l'axe des abscisses est une asymptote à C_f au voisinage de $+\infty$.

3. On admet que f est dérivable sur $]0; +\infty[$ et on note f' sa fonction dérivée.

a. Démontrer que, pour tout x appartenant à $]0; +\infty[$, $f'(x) = \frac{\ln(x)(2 - \ln(x))}{x^2}$.

b. Étudier le signe de $f'(x)$ selon les valeurs du nombre réel x strictement positif.

c. Calculer $f(1)$ et $f(e^2)$. On obtient alors le tableau de variations ci-dessous.

x	0	1	e^2	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	0	$\frac{4}{e^2}$	0

4. Démontrer que l'équation $f(x) = 1$ admet une unique solution α sur $]0; +\infty[$ et donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-2} .

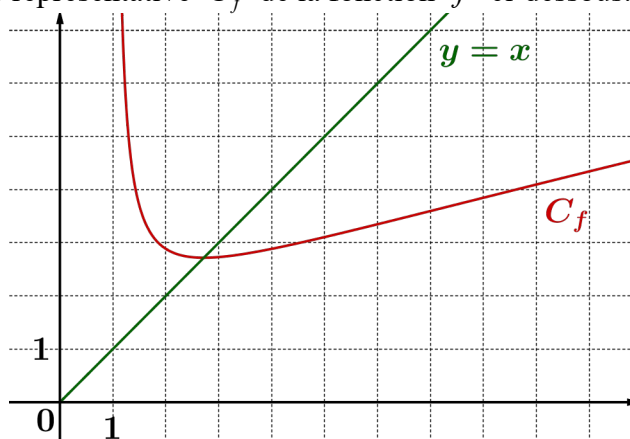
Problème 8 ...Logarithme et récurrence...

Soit f la fonction définie sur $]1; +\infty[$ par $f(x) = \frac{x}{\ln(x)}$.

1. Déterminer les limites de f en 1 et $+\infty$. Étudier les variations de f sur $]1; +\infty[$.

2. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 9$ et pour tout entier n , $u_{n+1} = f(u_n)$.

a. On a tracé la courbe représentative C_f de la fonction f ci-dessous.



Placer les termes u_0 , u_1 et u_2 sur l'axe des abscisses.

Quelle conjecture peut-on faire sur les variations et le comportement de la suite (u_n) ?

b. Démontrer par récurrence que, pour tout entier n , $u_n \geq e$.

c. Calculer la quantité $u_{n+1} - u_n$ puis donner les variations de la suite (u_n) . En déduire que la suite (u_n) converge vers un réel l .

3. La fonction f est continue sur l'intervalle $[e; +\infty[$. Déterminer la limite l .

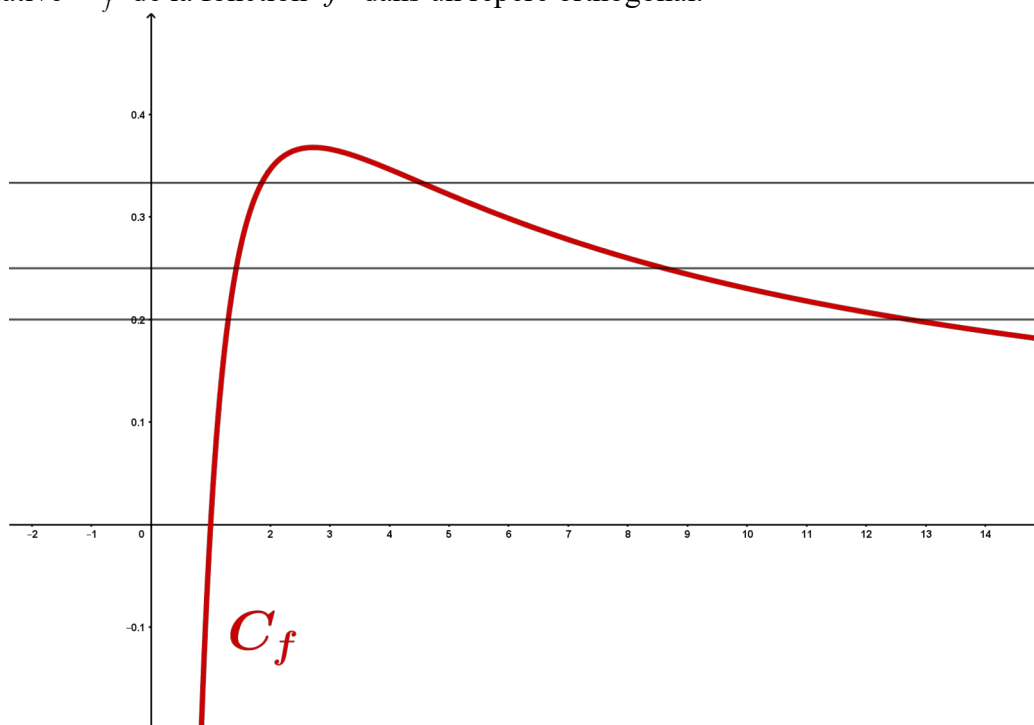
Problème 9 ...Équation...

Dans tout l'exercice, n désigne un entier naturel strictement positif. Le but de l'exercice est d'étudier l'équation $(E_n): \frac{\ln(x)}{x} = \frac{1}{n}$ ayant pour inconnue le nombre réel strictement positif x .

Partie A

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$.

On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $]0; +\infty[$. On donne ci-dessous la courbe représentative C_f de la fonction f dans un repère orthogonal.



1. Étudier les variations de la fonction f .
2. Déterminer son maximum.

Partie B

1. Montrer que, pour $n \geq 3$, l'équation $f(x) = \frac{1}{n}$ possède une unique solution sur $[1; e]$ notée α_n .
2. D'après ce qui précède, pour tout $n \geq 3$, le nombre réel α_n est solution de l'équation (E_n) .
 - a. Sur le graphique de la partie A sont tracées les droites D_3 , D_4 et D_5 d'équations respectives $y = \frac{1}{3}$, $y = \frac{1}{4}$ et $y = \frac{1}{5}$. Conjecturer le sens de variation de la suite (α_n) .
 - b. Comparer pour tout $n \geq 3$, $f(\alpha_n)$ et $f(\alpha_{n+1})$. Déterminer le sens de variation de la suite (α_n) .
 - c. En déduire que la suite (α_n) converge. Il n'est pas demandé de calculer sa limite.
3. On admet que, pour tout $n \geq 3$, l'équation (E_n) possède une autre solution β_n telle que :

$$1 \leq \alpha_n \leq e \leq \beta_n$$
 - a. On admet que la suite (β_n) est croissante. Établir que, pour tout $n \geq 3$, $\beta_n \geq n \frac{\beta_3}{3}$.
 - b. En déduire la limite de la suite (β_n) .