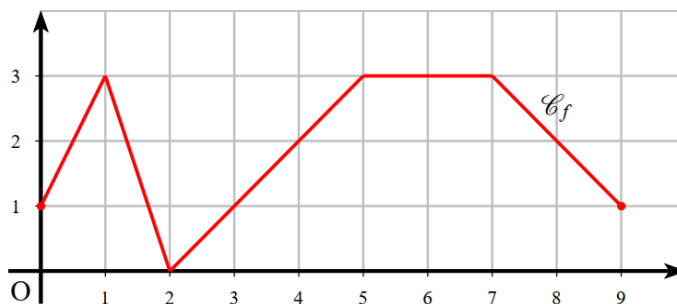
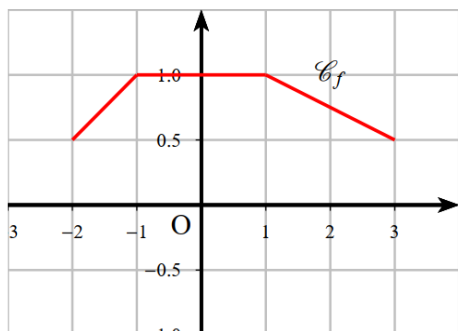


Calcul intégral

Exercice 1

Pour chaque fonction f représentée ci-dessous, calculer l'intégrale I de f sur son ensemble de définition.



Exercice 2

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x - 2$. Représenter les surfaces dont les aires, en unités d'aire, sont égales aux intégrales $I = \int_2^3 f(x) dx$ et $J = \int_3^4 f(x) dx$, puis les calculer.

Exercice 3

Dans chacun des cas, vérifier que la fonction f est continue et positive sur l'intervalle donné. Tracer ensuite sa courbe représentative et déterminer géométriquement l'aire sous la courbe.

1. $f(x) = 3x + 4$ sur $[-1; 0]$;
2. $f(x) = 2 - x$ sur $[0; 2]$.

Exercice 4

On considère les fonctions f et g définies par $f(x) = \frac{1}{2}x + 4$ et $g(x) = 1 - x$.

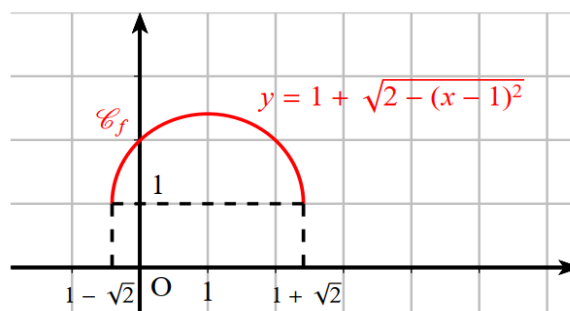
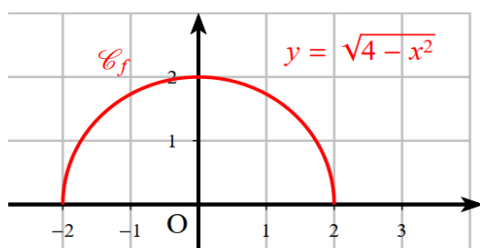
1. Déterminer l'intervalle sur lequel les fonctions f et g sont continues et positives.
2. Déterminer géométriquement les intégrales suivantes :

a. $\int_{-1}^2 f(x) dx$; b. $\int_{-4}^1 f(x) dx$; c. $\int_{-3}^0 g(x) dx$; d. $\int_{-1}^1 g(x) dx$.

Exercice 5

Dans chacun des cas, f est représentée par sa courbe C_f dont une équation est indiquée.

1. Prouver que C_f est un demi-cercle. Préciser son centre et son rayon.
2. Exprimer l'intégrale I de f sur son intervalle de définition puis la calculer. En donner ensuite une valeur approchée puis vérifier le résultat sur votre calculatrice.



Exercice 6

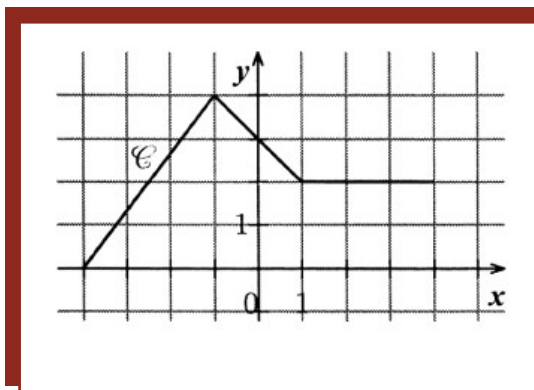
Soit f la fonction définie sur $[-1;1]$ par $f(x) = \sqrt{1-x^2}$. On note C_f sa courbe représentative.

1. Vérifier que C_f est un demi-cercle dont on précisera son centre et son rayon.
2. Calculer l'aire du domaine délimité par la courbe C_f , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=-1$ et $x=1$.
3. En déduire $\int_0^1 f(x) dx$.

Exercice 7

Soit f la fonction affine par morceaux définie sur $[-4;4]$ et représentée ci-contre.

Calculer $\int_{-4}^4 f(x) dx$.

**Exercice 8**

Soit f et g les fonctions affines par morceaux définies sur $[-1;5]$ par :

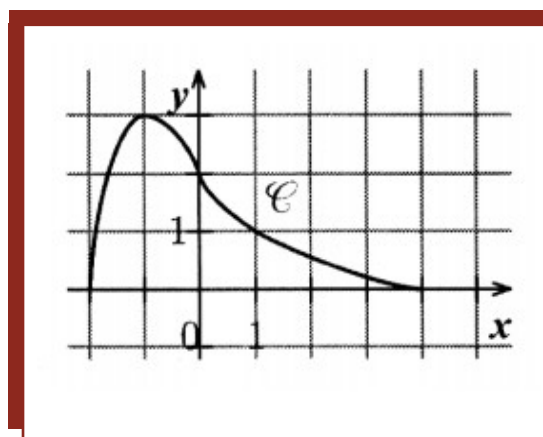
$$f(x) = \begin{cases} x+3 & \text{si } -1 \leq x \leq 0 \\ -x+3 & \text{si } 0 < x \leq 3 \\ x-3 & \text{si } 3 < x \leq 5 \end{cases} \quad \text{et} \quad g(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2} & \text{si } -1 \leq x \leq 1 \\ -\frac{1}{4}x + \frac{5}{4} & \text{si } 1 < x \leq 5 \end{cases}$$

1. Tracer la courbe représentative de la fonction f .
2. Démontrer que la fonction f est continue sur $[-1;5]$.
3. Calculer l'intégrale I de f sur $[-1;5]$.
4. Faites de même pour la fonction g .

Exercice 9

Soit f la fonction définie sur $[-2;4]$ et représentée ci-contre.

1. Justifier que $1 \leq \int_0^1 f(x) dx \leq 2$.
2. Déterminer un encadrement de $\int_{-2}^{-1} f(x) dx$, $\int_{-1}^0 f(x) dx$ et $\int_1^4 f(x) dx$.
3. En déduire un encadrement de $\int_{-2}^4 f(x) dx$.

**Exercice 10**

Soit F la fonction définie par $F(x) = \int_1^x \frac{1}{t} dt$.

1. Déterminer la dérivée de la fonction F sur $[1; +\infty[$.
2. Étudier le sens de variation de la fonction F sur $[1; +\infty[$.

Exercice 11

Soit F la fonction définie par $F(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction F .
2. Déterminer la dérivée de la fonction F . En déduire le sens de variation de la fonction F .
3. Calculer $F(0)$. En déduire le signe de la fonction F .

Exercice 12

Soit F la fonction définie par $F(x) = \int_1^x (\ln t)^2 dt$.

1. Justifier que la fonction F est dérivable sur $[1; +\infty[$.
2. Déterminer la dérivée de la fonction F sur $[1; +\infty[$.
3. Étudier le sens de variation de la fonction F sur $[1; +\infty[$.

Exercice 13

Soit G la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $G(x) = \int_0^{x+2} t^2 e^{3t} dt$.

1. Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $G(x) = F(x+2)$ où F est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ à déterminer.
2. Déterminer la dérivée de la fonction G sur $\mathbb{R}$.
3. Étudier le sens de variation de la fonction G sur $\mathbb{R}$.

Exercice 14

Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = \int_0^x \frac{t-4}{t^2+1} dt$.

1. Déterminer la dérivée de la fonction F sur $\mathbb{R}$.
2. Étudier le sens de variation de la fonction F sur $\mathbb{R}$.

Exercice 15

Calculer les intégrales suivantes :

- | | | |
|---|---|---|
| 1. $\int_0^4 (x-3) dx$; | 2. $\int_{-1}^4 (x^2-4x) dx$; | 3. $\int_1^2 \left(x^2 - \frac{1}{x}\right) dx$; |
| 4. $\int_1^5 \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{x}\right) dx$; | 5. $\int_1^2 \left(t^2 + t - \frac{2}{t}\right) dt$; | 6. $\int_{\ln 2}^{\ln 3} e^x dx$; |
| 7. $\int_1^{-3} (x^2-4x+3) dx$; | 8. $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx$; | 9. $\int_{-\pi}^0 \sin x dx$; |
| 10. $\int_2^7 \left(t - \frac{3}{t^4}\right) dt$; | 11. $\int_{-1}^1 (x^7 - 3x^3 + 2x) dx$; | 12. $\int_1^e \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - e^x\right) dx$. |

Exercice 16

Soit f la fonction définie sur $]-2; +\infty[$ par $f(x) = \frac{4x^2 + 7x + 1}{x+2}$.

1. Démontrer qu'il existe trois réels a , b et c tels que $f(x) = ax + b + \frac{c}{x+2}$.
2. En déduire la valeur de $I = \int_0^2 f(x) dx$.

Exercice 17

Calculer les intégrales suivantes :

1. $\int_0^9 dx$;
2. $\int_0^2 \frac{3x}{(x^2+1)^2} dx$;
3. $\int_0^3 \frac{1}{x+1} dx$;
4. $\int_0^1 e^{1-2x} dx$;
5. $\int_1^2 \frac{x^3}{x^4+1} dx$;
6. $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{3x}{1-x^2} dx$;
7. $\int_0^1 \cos(x) e^{\sin x} dx$;
8. $\int_3^5 x(x^2+2) dx$;
9. $\int_{-2}^{-1} \frac{x-3}{x} dx$;
10. $\int_{-1}^1 \frac{x}{x^2-4} dt$;
11. $\int_{-1}^2 5e^{3x} dx$;
12. $\int_0^e t e^{t^2-1} dt$;
13. $\int_1^2 \frac{1}{3x-2} dx$;
14. $\int_0^1 \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+5}} dx$;
15. $\int_{-2}^{-1} \frac{x e^{x^2}}{3\sqrt{e^{x^2}}} dx$.

Exercice 18

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{1+e^x}$.

Démontrer que, pour tout réel x , $f(x) = 1 - \frac{e^x}{1+e^x}$. En déduire la valeur de $I = \int_0^1 f(x) dx$.

Exercice 19

Calculer les intégrales suivantes :

1. $\int_1^2 x^{-3} dx$;
2. $\int_0^1 \frac{x}{x^2+3} dx$;
3. $\int_{-1}^2 x e^{x^2} dx$;
4. $\int_0^1 \frac{e^{-x}}{e^{-x}+3} dx$;
5. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos x dx$;
6. $\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{3x+1}} dx$;
7. $\int_0^1 \frac{2x}{\sqrt{x^2+3}} dx$;
8. $\int_1^2 \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} dx$;
9. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos x} dx$;
10. $\int_1^5 \left(\frac{3}{t^2} - 1 \right) dt$;
11. $\int_{-2}^1 x^3 (x^4-1)^2 dx$;
12. $\int_1^4 \left(\frac{1}{\sqrt{u}} + \frac{1}{u^2} \right) du$.

Exercice 20

Soit F la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $F(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$.

Déterminer la dérivée de la fonction F . En déduire le résultat de $I = \int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} dx$.

Exercice 21

Soit f la fonction définie sur $]1; +\infty[$ par $f(x) = \frac{x^2}{(x-1)^2}$.

1. Démontrer qu'il existe trois réels a , b et c tels que $f(x) = a + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{(x-1)^2}$.
2. En déduire la valeur de $I = \int_2^5 f(x) dx$.

Exercice 22

Calculer les intégrales suivantes :

1. $\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{w}} e^{\sqrt{w}} dw$;

2. $\int_0^2 \frac{e^x}{(e^x + 2)^3} dx$;

3. $\int_{-2}^2 (e^x - 4x) dx$;

4. $\int_1^3 \frac{dx}{x+1}$;

5. $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{x} \ln x dx$;

6. $\int_2^3 \left(\frac{1}{2x} - \frac{1}{x^2} \right) dx$;

7. $\int_0^1 \sin\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) dx$;

8. $\int_3^4 \frac{2x+2}{x^2+2x} dx$;

9. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos^3 x dx$;

10. $\int_1^e x \ln x dx$;

11. $\int_0^\pi 2x \sin x dx$;

12. $\int_0^3 x \sqrt{3-x} dx$.

Exercice 23

1. Calculer $I = \int_0^1 e^{2x} dx$ et $J = \int_0^1 e^{-2x} dx$.

2. En déduire la valeur de $K = \int_0^1 (3e^{2x} - 5e^{-2x}) dx$.

Exercice 24

Sachant que $\int_0^2 f(x) dx = 2$ et $\int_0^2 g(x) dx = -3$, calculer $I = \int_0^2 5f(x) dx$, puis $J = \int_0^2 \frac{1}{4} f(x) dx$ et enfin $K = \int_0^2 (6f(x) - 3g(x)) dx$.

Exercice 25

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$. On suppose que $\int_1^3 f(x) dx = 5$, $\int_6^3 f(x) dx = -2$ et $\int_6^{10} f(x) dx = 7$. Calculer $\int_1^{10} f(x) dx$.

Exercice 26

1. Énoncer et démontrer la relation de Chasles pour les intégrales.

2. En utilisant la relation de Chasles, calculer $\int_{-1}^2 |x| dx$.

Exercice 27

Soit $I = \int_0^1 \frac{e^{2x}}{1+e^{2x}} dx$ et $J = \int_0^1 \frac{1}{1+e^{2x}} dx$.

Calculer I et $I+J$. En déduire J .

Exercice 28

Soit $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1+2\sin x} dx$ et $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2x)}{1+2\sin x} dx$. Calculer I et $I+J$. En déduire J .

Exercice 29

1. Démontrer que pour tout réel $x \in [0; 1]$, on a $1 \leq e^{x^2} \leq e^x$.

2. En déduire un encadrement de $\int_0^1 e^{x^2} dx$.

Exercice 30

1. Démontrer que pour tout réel $x \in [0; 8]$, on a $1 \leq \sqrt{x+1} \leq 3$.
2. En déduire un encadrement de $I = \int_0^8 \sqrt{x+1} dx$.

Exercice 31

1. Démontrer que pour tout réel $x \in [0; 1]$, on a $e^{-x} \leq e^{-x^2}$.
2. En déduire un encadrement de xe^{-x} sur $[0; 1]$.
3. Déterminer alors un encadrement de $\int_0^1 e^{x^2} dx$.

Exercice 32

1. Donner un encadrement de la fonction $\ln$ sur $[1; 2]$.
2. En déduire un encadrement de $\int_1^2 x^2 \ln x dx$.

Exercice 33

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sqrt{1 + \cos^2 x}$.
Déterminer un encadrement de $f(x)$ puis un encadrement de $\int_0^\pi f(x) dx$.

Exercice 34

1. Démontrer que pour tout réel t supérieur ou égal à 1, on a $t \leq \sqrt{t^2 + 1} \leq t\sqrt{2}$.
2. Soit x un réel strictement positif. Démontrer que $\frac{\ln 2}{\sqrt{2}} \leq \int_x^{2x} \frac{dt}{\sqrt{t^2 + 1}} \leq \ln 2$.

Exercice 35

Comparer, sans les calculer, les réels $I = \int_1^2 x e^x dx$ et $J = \int_1^2 x^2 e^x dx$.

Exercice 36

Démontrer les encadrements suivants :

1. $2 \leq \int_1^9 \frac{dx}{1 + \sqrt{x}} \leq 4$;
2. $\frac{1}{2} \leq \int_0^1 \frac{dx}{1 + x^3} \leq 1$;
3. $\sqrt{2} \leq \int_1^2 \sqrt{1 + x^3} dx \leq 3$;
4. $2e^{-4} \leq \int_0^2 \frac{dx}{e^{x^2}} \leq 2$;
5. $2 \ln 3 \leq \int_2^4 \ln(x^2 - 1) dx \leq 2 \ln 3 + 5$.

Exercice 37

Dans un repère orthonormé, tracer les courbes représentatives des fonctions carrée et racine carrée sur $[0; 1]$. Sachant que $\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$, calculer $\int_0^1 \sqrt{x} dx$ en utilisant une symétrie axiale.

Exercice 38

On donne la valeur moyenne $\mu = 2$ d'une fonction f sur l'intervalle $[1; 4]$. Calculer $\int_1^4 f(x) dx$.

Exercice 39

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{2e^{0,04x}}{e^{0,04x} + 19}$.

1. Déterminer une primitive de f .
2. Calculer la valeur moyenne de f sur l'intervalle $[50; 100]$. En donner une valeur exacte puis une valeur approchée à 10^{-2} .

Exercice 40

Calculer la valeur moyenne sur l'intervalle $[-1; 1]$ de la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{1-x^2}$. (Indication : on pourra penser au cercle de centre O et de rayon 1)

Exercice 41

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = xe^{2-x}$.

1. Démontrer que la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = (-x-1)e^{2-x}$ est une primitive de f .
2. Déterminer la valeur moyenne de f sur $[0; 4]$.

Exercice 42

1. Déterminer la valeur moyenne sur $[1; 4]$ de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{3x}$.
2. La fonction f précédente modélise l'augmentation d'une population sur trois ans. Déterminer une valeur approchée de l'augmentation chaque année de cette population.

Exercice 43

Un point mobile est étudié sur l'intervalle de temps $[0; 20]$. Le temps est exprimé en seconde. Sa vitesse en $m.s^{-1}$ est donnée par $v(t) = 2t^2 + 3t$.

1. Calculer la distance parcourue par ce mobile sur cet intervalle de temps.
2. Calculer la valeur moyenne de la fonction v sur $[0; 20]$.
3. Que représente cette valeur moyenne ?

Exercice 44

Une substance médicamenteuse est injectée par voie intraveineuse. Dans les heures qui suivent l'injection, la substance est éliminée par les reins.

On suppose que la quantité q de substance présente dans le sang, exprimé en milligrammes, à l'instant t , exprimé en heures, est donnée par $q(t) = 10e^{-0,15t}$ pour t variant de 0 à 12 heures. Calculer, à un dixième de milligramme près, la quantité moyenne de substance médicamenteuse présente dans le sang chaque heure pendant les dix heures qui suivent l'injection.

Exercice 45

Soit f une fonction continue sur $[a; b]$ et telle que pour tout x de $[a; b]$, $m \leq f(x) \leq M$.

1. Démontrer que $m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq M$.
2. Déterminer un encadrement sur $[0; 3]$ de la valeur moyenne de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$.
3. Déterminer un encadrement sur $[0; 3]$ de la valeur moyenne de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sqrt{1+x^2}$.

Exercice 46

Soit f et g les fonctions définies sur $[1;2]$ par $f(x)=x^2$ et $g(x)=x$. On appelle C_f et C_g les courbes représentatives de ces deux fonctions dans un repère orthogonal d'unité 3 cm en abscisse et 1 cm en ordonnée.

1. Construire les courbes représentatives de f et g dans le repère précisé ci-dessus.
2. Calculer l'aire A , en unités d'aire, de la surface délimitée par les courbes C_f et C_g et les droites d'équations $x=1$ et $x=2$.
3. Donner l'aire de cette surface en cm^2 .

Exercice 47

Soit f et g les fonctions définies sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=x^2$ et $g(x)=\frac{1}{x}$.

On appelle C_f et C_g les courbes représentatives des fonctions f et g .

1. Démontrer que, pour tout réel $x > 1$, $x^2 > \frac{1}{x}$.
2. Calculer l'aire, en unités d'aire, de la surface délimitée par les courbes C_f et C_g et les droites d'équations $x=1$ et $x=e$.

Exercice 48

Soit f la fonction définie sur $[-2;2]$ par $f(x)=4-x^2$. Soit A , B et C les points de la courbe représentative C_f de f d'abscisses respectives -2 , 2 et 0 .

1. Construire la courbe C_f et le triangle ABC .
2. Déterminer l'aire A_1 , en unités d'aire, du triangle ABC .
3. Déterminer l'aire A_2 , en unités d'aire, de la surface délimitée par la parabole, le segment $[AB]$ et les droites d'équations $x=-2$ et $x=2$.
4. Déterminer le rapport $\frac{A_2}{A_1}$.

Exercice 49

Soit f et g les fonctions définies sur $[0;\pi]$ par $f(x)=\sin x$ et $g(x)=\sin^2 x$.

1. Étudier le sens de variation de ces deux fonctions sur $[0;\pi]$.
2. Étudier la position relative de ces deux courbes.
3. Tracer leurs courbes représentatives dans un même repère d'unité graphique 1 cm en abscisse et 2 cm en ordonnée.
4. Calculer l'aire, en cm^2 , de la surface délimitée entre ces deux courbes.

Exercice 50

Soit f et g les fonctions définies sur $[0;1]$ par $f(x)=x^2$ et $g(x)=\sqrt{x}$.

1. Calculer $I = \int_0^1 f(x) dx$.
2. Vérifier que la fonction $F: x \rightarrow x\sqrt{x}$ est dérivable sur $[0;1]$, puis calculer sa dérivée.

En déduire le calcul de $J = \int_0^1 g(x) dx$, puis celui de $I + J$.

3. On note C_f et C_g les courbes représentatives de f et g . Quel lien géométrique existe-t-il entre les courbes C_f et C_g ? Calculer à nouveau la somme $I + J$ en s'appuyant sur un graphique.

Exercice 51

Soit A_t l'aire du domaine délimité par la courbe d'équation $y = \frac{1}{x}$, la droite d'équation $y = 0$ et les droites d'équations $x = 1$ et $x = t$ (avec $t \geq 1$). Déterminer t telle que l'aire A_t soit égale à 1.

Exercice 52

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par $f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$.

1. Étudier le sens de variation de la fonction f et construire sa courbe représentative dans un repère d'unités 2 cm en abscisse et 6 cm en ordonnée.
2. Démontrer que la fonction F définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par $F(x) = -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x}$ est une primitive de f .
3. Déterminer l'aire, en cm^2 , de la surface comprise entre la courbe C_f , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$.

Exercice 53

On considère les fonctions affines f , g et h définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x, \quad g(x) = 3 - \frac{1}{2}x \quad \text{et} \quad h(x) = \frac{1}{4}x + \frac{3}{4}$$

Soit E , F et G les points d'intersection respectifs de C_f et C_g , C_g et C_h , C_f et C_h .

1. Représenter les courbes C_f , C_g et C_h dans un repère orthonormé.
2. Déterminer algébriquement les coordonnées des points E , F et G . On les placera dans le graphique précédent ainsi que le point $H\left(2; \frac{5}{4}\right)$.
3. Calculer $\int_1^2 f(x)dx$ et $\int_1^2 h(x)dx$, puis en déduire la valeur de l'aire du triangle EGH .
4. Calculer $\int_2^3 g(x)dx$ et $\int_2^3 h(x)dx$, puis en déduire la valeur de l'aire du triangle EFH .
5. Calculer l'aire du triangle EFG .

Problèmes

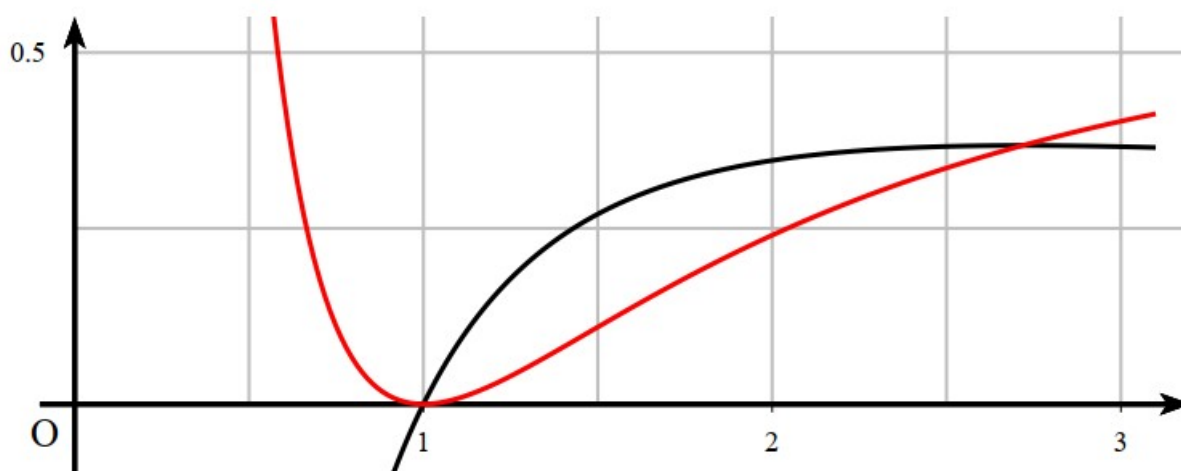
Problème 1

...Étude classique...

On considère f et g les fonctions définies sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ et $g(x) = \frac{\ln^2 x}{x}$.

On note C_f et C_g les courbes respectives des fonctions f et g .

1. Démontrer que les courbes C_f et C_g admettent deux points communs dont on précisera les coordonnées.
2. Étudier la position relative des courbes C_f et C_g .
3. On a tracé les courbes C_f et C_g . Identifier chaque courbe puis déterminer l'aire A en cm^2 de la partie du plan délimitée par les courbes C_f et C_g et par les droites d'équations $x=1$ et $x=e$. L'unité est de 2 cm sur l'axe des abscisses et de 4 cm sur l'axe des ordonnées.



Problème 2

...Encore une étude classique...

Soient f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x$ et $g(x) = 2e^{\frac{x}{2}} - 1$.

On note C_f et C_g les courbes représentatives des fonctions f et g dans un repère orthogonal.

1. a. Pour tout réel x , développer l'expression $\left(e^{\frac{x}{2}} - 1\right)^2$.
 b. Déterminer la position relative des courbes C_f et C_g .
2. Calculer, en unité d'aire, l'aire du domaine compris entre les courbes C_f et C_g et les droites d'équations respectives $x=0$ et $x=1$.

Problème 3

...Longueur de chaîne...

La longueur L d'une chaîne, suspendue entre deux points d'accroche de même hauteur ayant une tension minimale aux extrémités, est donnée par l'expression $L = \int_0^1 (e^{ax} + e^{-ax}) dx$.

Calculer la longueur d'une chaîne ayant une tension minimale aux extrémités, en prenant $1,2$ comme valeur approchée du nombre a .

Problème 4 ...Serre de jardin...**Partie A**

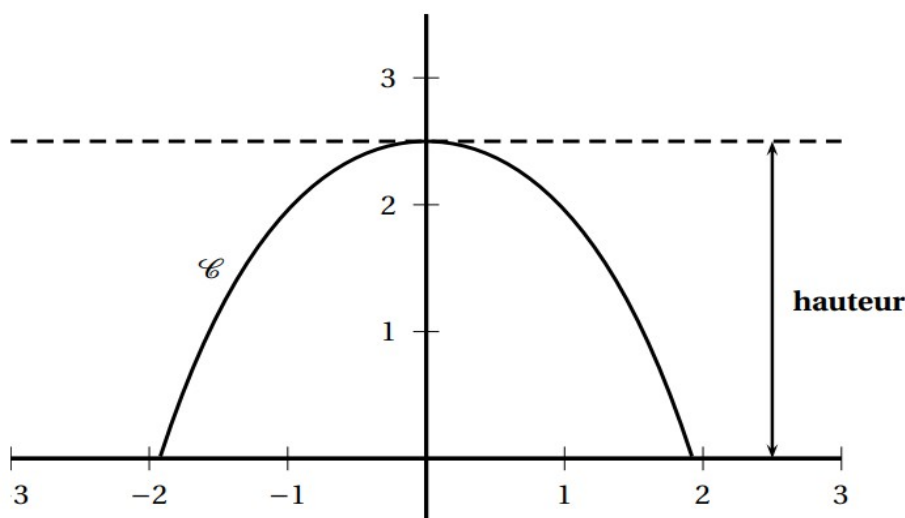
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{7}{2} - \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$.

1. a. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.
 b. Montrer que la fonction f est strictement décroissante sur l'intervalle $[0; +\infty[$.
 c. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet, sur l'intervalle $[0; +\infty[$, une unique solution, que l'on note α .
2. En remarquant que, pour tout réel x , $f(-x) = f(x)$, justifier que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions dans $\mathbb{R}$ et qu'elles sont opposées.

Partie B

Les serres en forme de tunnel sont fréquemment utilisées pour la culture des plantes fragiles ; elles limitent les effets des intempéries ou des variations de température. Elles sont construites à partir de plusieurs arceaux métalliques identiques qui sont ancrés au sol et supportent une bâche en plastique. Le plan est rapporté à un repère orthonormé d'unité 1 mètre. La fonction f et le réel α sont définis dans la **partie A**. Dans la suite de l'exercice, on modélise un arceau de serre par la courbe C de la fonction f sur l'intervalle $[-\alpha; \alpha]$.

On a représenté ci-dessous la courbe C sur l'intervalle $[-\alpha; \alpha]$.



On admettra que la courbe C admet l'axe des ordonnées pour axe de symétrie.

1. Calculer la hauteur d'un arceau.
2. a. Dans cette question, on se propose de calculer la valeur exacte de la longueur de la courbe C sur l'intervalle $[0; \alpha]$. On admet que cette longueur est donnée, en mètre, par l'intégrale :

$$I = \int_0^\alpha \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$$

Montrer que, pour tout réel x , on a : $1 + f'(x)^2 = \frac{(e^x + e^{-x})^2}{4}$.

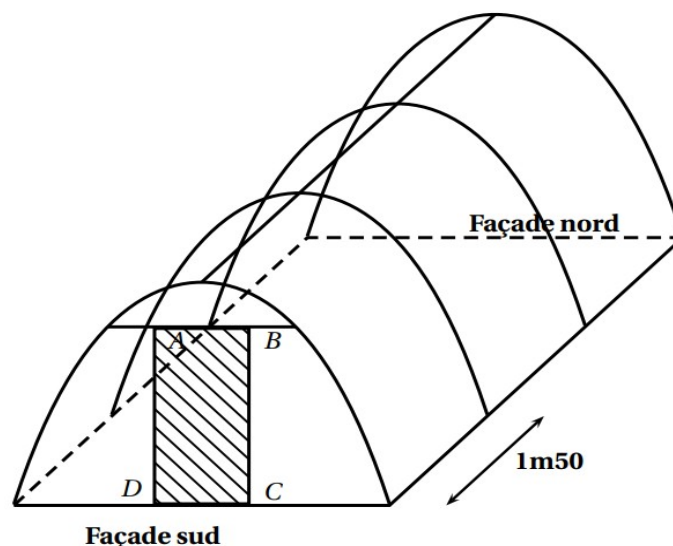
- b. En déduire la valeur de l'intégrale I en fonction de α .
 Justifier que la longueur d'un arceau, en mètre, est égale à $e^\alpha - e^{-\alpha}$.

Partie C

On souhaite construire une serre de jardin en forme de tunnel.

On fixe au sol quatre arceaux métalliques, dont la forme est celle décrite dans la partie précédente, espacés de 1,5 mètre, comme indiqué sur le schéma ci-dessous.

Sur la façade sud, on prévoit une ouverture modélisée sur le schéma par le rectangle ABCD de largeur 1 mètre et de longueur 2 mètres.



On souhaite connaître la quantité, exprimée en m^2 , de bâche plastique nécessaire pour réaliser cette serre.

Cette bâche est constituée de trois parties, l'une recouvrant la façade nord, l'autre la façade sud (sauf l'ouverture), la troisième partie de forme rectangulaire recouvrant le toit de la serre.

1. Montrer que la quantité de bâche nécessaire pour recouvrir les façades sud et nord est donnée, en m^2 , par :

$$A = 4 \int_0^\alpha f(x) dx - 2$$

2. On prend 1,92 pour valeur approchée de α . Déterminer, au m^2 près, l'aire totale de la bâche plastique nécessaire pour réaliser cette serre.

Problème 5 ...Égalité d'aires...

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par $f(x) = ke^{-kx}$, où k est un nombre réel strictement positif, et on appelle C_f sa représentation graphique dans le repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$. On considère les points A et B de la courbe C_f d'abscisses respectives 0 et 1.

Le point C a pour coordonnées $(1; 0)$.

1. Déterminer une primitive de la fonction f sur $[0; +\infty[$.

2. Exprimer, en fonction de k , l'aire du triangle OCB et celle du domaine D délimité par l'axe des ordonnées, la courbe C_f et le segment [OB].

3. Montrer qu'il existe une unique valeur du réel k strictement positive telle que l'aire du domaine D vaut le double de celle du triangle OCB.

