Chapitre 10

Probabilités

I. Expérience aléatoire et événement

Définition 1

Une **expérience aléatoire** est une expérience dont le résultat dépend du hasard. Chacun des résultats possibles s'appelle **éventualité** ou **issue**. L'ensemble Ω (ou E) de tous les résultats possibles d'une expérience aléatoire s'appelle l'**univers** de l'expérience.

Exemples

• On jette un dé et on note le résultat obtenu. L'univers de l'expérience aléatoire est alors $\Omega=\{1;2;3;4;5;6\}$ et chacun des nombres de 1 à 6 sont des issues de l'expérience aléatoire.
• On lance une pièce de monnaie et on regarde la face supérieure.
• On fait tourner une roue marquée sur des secteurs de couleurs différentes et on regarde le secteur marqué par la flèche.

Définition 2

• Un **événement** A est une partie de l'univers Ω (un événement peut donc être constitué de zéro, une ou plusieurs issues de Ω).
• Un **événement élémentaire** est une partie de Ω qui ne contient qu'une seule issue.
• Un **événement impossible** est un événement qui n'est réalisé par aucune issue.
• Un **événement certain** est un événement qui est réalisé par toutes les issues.
• L'**événement contraire** de A, noté $\overline{A}$, est la partie constituée de toutes les issues de Ω qui ne sont pas dans A.

Exemples

Dans l'expérience du jet d'un dé :
• L'événement A : « Obtenir un nombre pair » est un événement constitué des issues 2, 4 et 6 de l'univers. On le note aussi $A=\{2;4;6\}$.
• L'événement B : « Obtenir un nombre strictement supérieur à 5 » est un événement élémentaire car la seule issue réalisant cet événement est 6. On le note aussi $B=\{6\}$.
• L'événement C : « Obtenir un nombre supérieur à 8 » est un événement impossible.
• L'événement D : « Obtenir un nombre entier » est un événement certain car quelque soit le nombre obtenu, ce sera un entier.
• L'événement contraire de A est $\overline{A}$: « Ne pas obtenir un nombre pair ». On le note aussi $\overline{A}=\{1;3;5\}$.

Définition 3

Donner une **loi de probabilité** associée à une expérience aléatoire c'est en donner toutes les issues et attribuer une probabilité à chacune d'elles de sorte que la somme des probabilités des issues est égale à 1. On peut présenter les résultats sous la forme d'un tableau.

Exemple

On lance un dé tétraédrique non truqué dont les faces sont numérotées de 1 à 4. On a donc pour chaque résultat une probabilité de $\frac{1}{4}$. Ainsi $P(\{1\})=P(\{2\})=P(\{3\})=P(\{4\})=\frac{1}{4}$.

Autrement, on résume toutes ces probabilités dans le tableau suivant :

Issue	1	2	3	4
Probabilité	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

II. Probabilité d'un événement

II.1 Loi des grands nombres

On a simulé n lancers d'un dé équilibré à 6 faces et noté le nombre de fois que le chiffre 4 est sorti. Le tableau suivant résume les résultats obtenus.

Nombre de lancers n	10	50	100	500	1000	10000	100000
Nombre de 4 obtenu	3	10	19	76	161	1681	16649
Fréquence d'apparition du chiffre 4	$0,3$	$0,2$	$0,19$	$0,15$	$0,161$	$0,1681$	$0,16649$

Si le dé est bien équilibré, le chiffre 4 a une chance sur 6 de sortir, soit $\frac{1}{6}\approx 0,166\dots$.

On peut remarquer que la fréquence d'apparition du chiffre 4 se rapproche de cette valeur théorique quand le nombre de lancers augmente.

Définition 4

Lors d'une expérience répétée n fois, les fréquences obtenues d'un événement A de l'expérience se rapprochent d'une valeur théorique lorsque n devient grand. Cette valeur s'appelle **probabilité de l'événement $\mathbf{A}$** et est notée $\mathbf{P(A)}$.

II.2 Calculs de probabilité

Définition 5

La probabilité d'un événement A est la **somme des probabilités des événements élémentaires inclus dans $\mathbf{A}$**.

Exemple

On lance un dé équilibré à six faces et on regarde le chiffre inscrit sur la face du dessus.
Soit l'événement A : « La face du dessus est un 1 ou un 6 ». On cherche $P(A)$.
L'événement A est constitué de deux événements élémentaires, qui sont « Obtenir un 1 » et « Obtenir un 6 ». Or on a $P(\{1\})=\frac{1}{6}$ et $P(\{6\})=\frac{1}{6}$. D'où $P(A)=P(\{1\})+P(\{6\})=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$.

Propriété 6

• Pour tout événement A , on a $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$.
• La **somme des probabilités des événements élémentaires vaut 1**.

Remarques

• La probabilité de l'événement certain vaut 1. On la note $P(\Omega)=1$ (ou $P(E)=1$).
• La probabilité de l'événement vide vaut 0. On la note $P(\varnothing)=0$.

Définition 7

Lorsque tous les événements élémentaires d'une expérience aléatoire ont la même probabilité, on dit alors qu'ils sont **équiprobables**. On parle d'**expérience équiprobable** ou de **loi équirépartie.**

Propriété 8

Lors d'une expérience aléatoire ayant n issues équiprobables :

• La probabilité de chaque événement élémentaire est $\frac{1}{n}$.

• La probabilité d'un événement A est $P(A)=\frac{\text{nombre d'issues favorables à } A}{\text{nombre total d'issues}}$.

Exemples

Lorsqu'on lance un dé équilibré à six faces, toutes les issues sont équiprobables. Chaque face a autant de « chance » de tomber qu'une autre.

• On a $P(\{1\})=P(\{2\})=P(\{3\})=P(\{4\})=P(\{5\})=P(\{6\})=\frac{1}{6}$.

• Soit l'événement I : « Obtenir un nombre impair ». Il y a trois issues favorables à I parmi six résultats possibles. Donc $P(I)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$.

II.3 Événement contraire

Propriété 9

La probabilité de l'**événement contraire** d'un événement A est : $P(\overline{A})=1-P(A)$.

Exemple

Reprenons l'expérience du lancer de dé précédente et l'événement I . Le contraire de l'événement I est l'événement $\overline{I}$: « Obtenir un nombre pair ». On obtient alors $P(\overline{I})=1-P(I)=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$.

Remarque

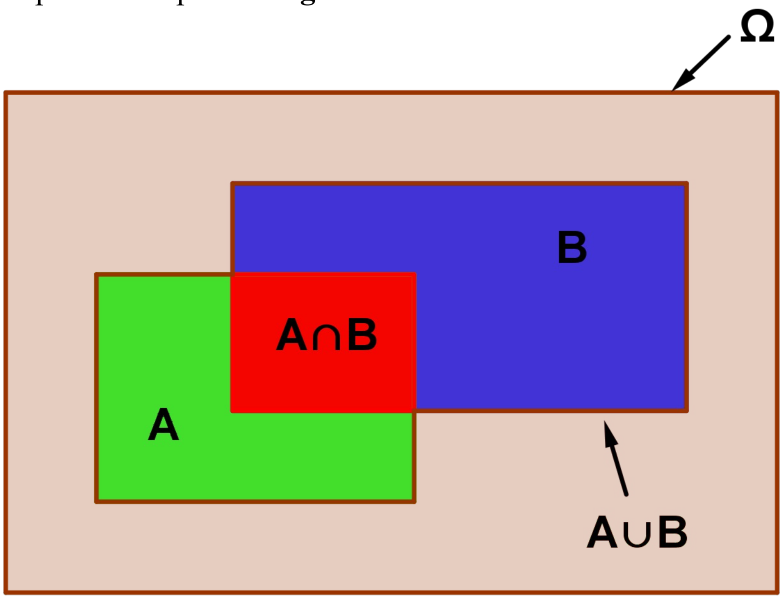
Dans cet exemple, il n'est pas nécessaire de passer par l'événement contraire. On peut effectuer le calcul sans utiliser la propriété 8. Mais dans certains cas, il sera utile (voire indispensable) d'utiliser l'événement contraire pour réduire considérablement les calculs.

III. Réunion et intersection d'événements

Définition 10

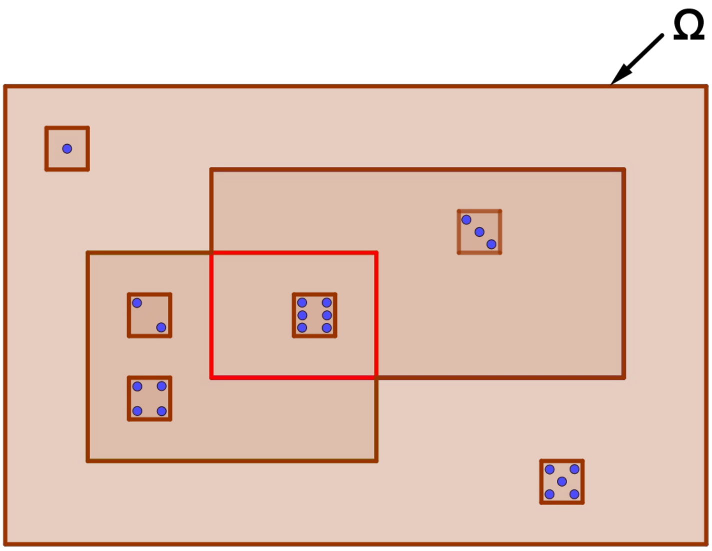
• L'événement « **A et B** », noté $A \cap B$, s'appelle l'**intersection** des événements A et B.
Il est réalisé lorsque **les deux événements sont réalisés simultanément**.
• L'événement « **A ou B** », noté $A \cup B$, s'appelle la **réunion** des événements A et B.
Il est réalisé lorsqu'**au moins l'un des deux événements est réalisé**.

Ces situations sont représentées par le **diagramme de Venn** ci-dessous.



Exemple

On lance un dé équilibré à six faces. Soit les événements suivants :
A : « Obtenir un nombre pair » et B : « Obtenir un multiple de 3 ».
On a alors $A \cap B = \{6\}$ et $A \cup B = \{2;3;4;6\}$.



Théorème 11

Soit A et B deux événements d'une même expérience aléatoire. On a alors :
$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$.

Exemples

• On tire au hasard une carte dans un jeu de 32 cartes. On considère les événements :
A : « Tirer un roi »
B : « Tirer un cœur »
Calculons $P(A\cup B)$.

On a alors $P(A)=\frac{4}{32}=\frac{1}{8}$ et $P(B)=\frac{8}{32}=\frac{1}{4}$.

L'événement $A\cap B$: « Tirer un roi de cœur » est un événement élémentaire et $P(A\cap B)=\frac{1}{32}$.

On en déduit donc $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\frac{4}{32}+\frac{8}{32}-\frac{1}{32}=\frac{11}{32}$.

Définition 12

Si l'événement $A\cap B$ ne contient aucun élément (c'est-à-dire que $A\cap B=\emptyset$), on dit que les événements A et B sont **incompatibles** (ou **disjoints**).

Propriété 13

Si deux événements A et B sont **incompatibles**, alors $P(A\cap B)=0$.
Pour conséquence, on en déduit que $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$.

Exemple

On tire au hasard une carte dans un jeu de 32 cartes. On considère les événements suivants :
A : « Tirer un pique »
B : « Tirer un cœur »
Calculons $P(A\cup B)$.

On a $P(A)=\frac{8}{32}=\frac{1}{4}$ et $P(B)=\frac{8}{32}=\frac{1}{4}$.

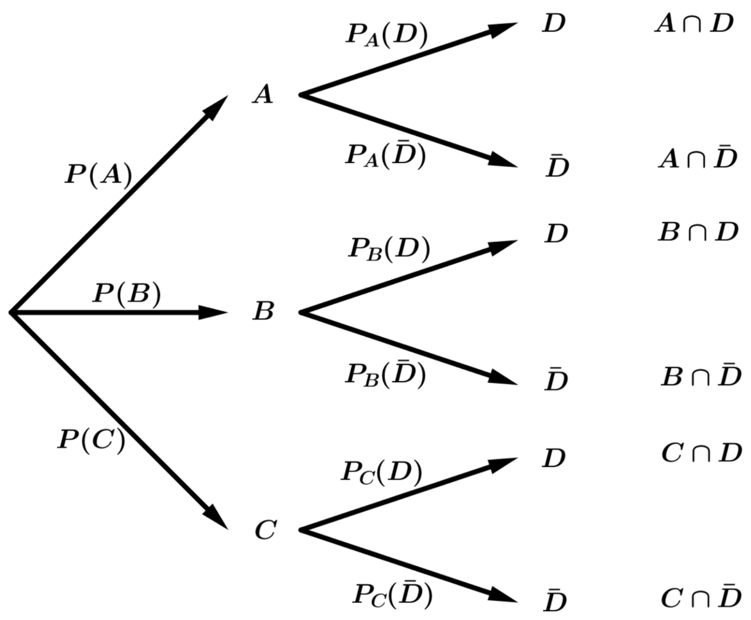
De plus, les événements A et B sont incompatibles ($A\cap B=\emptyset$). D'où $P(A\cap B)=0$.

On a donc $P(A\cup B)=P(A)+P(B)=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$.

Remarque

A et $\overline{A}$ sont incompatibles car $A\cap\overline{A}=\emptyset$.

IV. Règles d'utilisation d'un arbre de probabilités



Remarque

$P_A(D)$ se lit probabilité de D sachant A. Il s'agit de la probabilité d'avoir l'événement D sachant que l'événement A est réalisé.

Règle 1

La somme des probabilités sur les branches partant d'un même nœud est égale à 1.

Exemple

$P(A)+P(B)+P(C)=1$.

Règle 2

La probabilité de l'événement correspondant à un chemin est obtenue en multipliant les probabilités portées par ses branches.

Exemple

$P(A \cap D)=P(A) \times P_A(D)$.

Règle 3

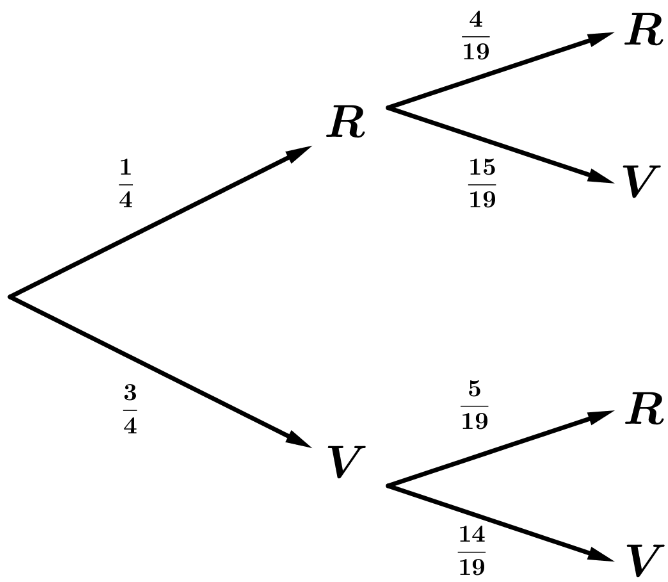
La probabilité de l'événement correspondant à plusieurs chemins est obtenue en additionnant les probabilités de chacun de ces chemins.

Exemple

$P(D)=P(A \cap D)+P(B \cap D)+P(C \cap D)$.

Exemple

À la fin d'une séance de cours, le professeur de mathématiques donne l'exercice suivant à préparer pour le lendemain : « Une urne contient 5 boules de couleur rouge et 15 boules de couleur verte ». On tire au hasard, sans remise et successivement deux boules dans cette urne. La probabilité que les deux boules soient de couleur rouge est de $\frac{1}{19}$. Représenter la situation par un arbre pondéré.
Calculer la probabilité qu'au moins une des deux boules soit de couleur verte ».
On note les événements suivants :
V : « La boule tirée est verte » ; R : « La boule tirée est rouge » ;
A : « Au moins une des deux boules tirées est verte ».



On a $P(A)=1-P(R\cap R)=1-\frac{1}{19}=\frac{18}{19}$.

La probabilité qu'au moins une des deux boules soit de couleur verte est $\frac{18}{19}$.

V. Utilisation de tableaux

Les tableaux à double entrées permettent une présentation claire de certaines expériences aléatoires et facilitent le calcul des probabilités conditionnelles.

	B	$\overline{\mathbf{B}}$	**Total**
A	$P(A\cap B)$	$P(A\cap \overline{B})$	$P(A)$
$\overline{\mathbf{A}}$	$P(\overline{A}\cap B)$	$P(\overline{A}\cap \overline{B})$	$P(\overline{A})$
Total	$P(B)$	$P(\overline{B})$	1

Exemples

• On a demandé à 180 adolescents quel était leur genre de film préféré et on a consigné les résultats dans le tableau ci-dessous.

	Filles	**Garçons**	**Total**
Comédie	75	25	100
Action	45	35	80
Total	120	60	180

On choisit au hasard un adolescent qui a participé à cette étude. On considère les événements suivants :
A : « l'adolescent choisi préfère les films d'actions »
F : « l'adolescent choisi est une fille ».
Calculons $P(A\cap F)$ et $P(A\cup F)$.

Dans le tableau, on peut lire qu'il y a 45 filles qui préfèrent les films d'actions. Sachant que, sur les 180 adolescents qui ont été interrogés, 45 sont des filles qui préfèrent les films d'action, on a alors :

$$P(A\cap F)=\frac{45}{180}=\frac{1}{4}$$

On trouve dans le tableau que $P(F)=\frac{120}{180}=\frac{2}{3}$ et que $P(A)=\frac{80}{180}=\frac{4}{9}$.
D'où $P(A\cup F)=P(A)+P(F)-P(A\cap F)=\frac{2}{3}+\frac{4}{9}-\frac{1}{4}=\frac{31}{36}$.

• Un club sportif rassemble 180 membres répartis en juniors et seniors. On compte 135 seniors dont 81 hommes. Il y a 27 garçons parmi les juniors.
En choisissant une femme au hasard, calculons la probabilité d'avoir une junior.

	J	**S**	**Total**
H	27	81	108
F	18	54	72
Total	45	135	180

On a $\frac{18}{72}=0,25$. Il y a donc une junior sur quatre parmi les femmes.