

Chapitre 10

Probabilités

I. Expérience aléatoire et événement

Définition 1

Une **expérience aléatoire** est une expérience dont le résultat dépend du hasard. Chacun des résultats possibles s'appelle **éventualité** ou **issue**. L'ensemble Ω (ou E) de tous les résultats possibles d'une expérience aléatoire s'appelle l'**univers** de l'expérience.

Exemples

- On jette un dé et on note le résultat obtenu. L'univers de l'expérience aléatoire est alors $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ et chacun des nombres de 1 à 6 sont des issues de l'expérience aléatoire.
- On lance une pièce de monnaie et on regarde la face supérieure.
- On fait tourner une roue marquée sur des secteurs de couleurs différentes et on regarde le secteur marqué par la flèche.

Définition 2

- Un **événement** A est une partie de l'univers Ω (un événement peut donc être constitué de zéro, une ou plusieurs issues de Ω).
- Un **événement élémentaire** est une partie de Ω qui ne contient qu'une seule issue.
- Un **événement impossible** est un événement qui n'est réalisé par aucune issue.
- Un **événement certain** est un événement qui est réalisé par toutes les issues.
- L'**événement contraire** de A , noté $\bar{A}$, est la partie constituée de toutes les issues de Ω qui ne sont pas dans A .

Exemples

Dans l'expérience du jet d'un dé :

- L'événement A : « Obtenir un nombre pair » est un événement constitué des issues 2, 4 et 6 de l'univers. On le note aussi $A = \{2; 4; 6\}$.
- L'événement B : « Obtenir un nombre strictement supérieur à 5 » est un événement élémentaire car la seule issue réalisant cet événement est 6. On le note aussi $B = \{6\}$.
- L'événement C : « Obtenir un nombre supérieur à 8 » est un événement impossible.
- L'événement D : « Obtenir un nombre entier » est un événement certain car quelque soit le nombre obtenu, ce sera un entier.
- L'événement contraire de A est $\bar{A}$: « Ne pas obtenir un nombre pair ». On le note aussi $\bar{A} = \{1; 3; 5\}$.

Définition 3

On appelle **cardinal de A** , noté **Card**(A), l'effectif de l'événement A . Autrement dit, **Card**(A) est égal au nombre d'issues qui réalisent l'événement A .

Exemple

Reprenons l'expérience du jet d'un dé d'univers $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ avec l'événement A : « Obtenir un nombre pair ». Alors $\text{Card}(\Omega) = 6$ et $\text{Card}(A) = 3$.

Remarque

$\text{Card}(\emptyset) = 0$.

Définition 4

Donner une **loi de probabilité** associée à une expérience aléatoire c'est en donner toutes les issues et attribuer une probabilité à chacune d'elles de sorte que la somme des probabilités des issues est égale à 1. On peut présenter les résultats sous la forme d'un tableau.

Exemple

On lance un dé tétraédrique non truqué dont les faces sont numérotées de 1 à 4. On a donc pour chaque résultat une probabilité de $\frac{1}{4}$. Ainsi $P(\{1\}) = P(\{2\}) = P(\{3\}) = P(\{4\}) = \frac{1}{4}$.

Autrement, on résume toutes ces probabilités dans le tableau suivant :

Issue	1	2	3	4
Probabilité	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

II. Probabilité d'un événement**II.1 Loi des grands nombres**

On a simulé n lancers d'un dé équilibré à 6 faces et noté le nombre de fois que le chiffre 4 est sorti. Le tableau suivant résume les résultats obtenus.

Nombre de lancers n	10	50	100	500	1000	10000	100000
Nombre de 4 obtenu	3	10	19	76	161	1681	16649
Fréquence d'apparition du chiffre 4	0,3	0,2	0,19	0,15	0,161	0,1681	0,16649

Si le dé est bien équilibré, le chiffre 4 a une chance sur 6 de sortir, soit $\frac{1}{6} \approx 0,166\dots$.

On peut remarquer que la fréquence d'apparition du chiffre 4 se rapproche de cette valeur théorique quand le nombre de lancers augmente.

Définition 5

Lors d'une expérience répétée n fois, les fréquences obtenues d'un événement A de l'expérience se rapprochent d'une valeur théorique lorsque n devient grand. Cette valeur s'appelle **probabilité de l'événement A** et est notée $P(A)$.

II.2 Calculs de probabilité

Définition 6

La probabilité d'un événement A est la **somme des probabilités des événements élémentaires inclus dans A** .

Exemple

On lance un dé équilibré à six faces et on regarde le chiffre inscrit sur la face du dessus.

Soit l'événement A : « La face du dessus est un 1 ou un 6 ». On cherche $P(A)$.

L'événement A est constitué de deux événements élémentaires, qui sont « Obtenir un 1 » et

« Obtenir un 6 ». Or on a $P(\{1\}) = \frac{1}{6}$ et $P(\{6\}) = \frac{1}{6}$. D'où $P(A) = P(\{1\}) + P(\{6\}) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

Propriété 7

- Pour tout événement A , on a $0 \leq P(A) \leq 1$.
- La **somme des probabilités des événements élémentaires vaut 1**.

Remarques

- La probabilité de l'événement certain vaut 1. On la note $P(\Omega) = 1$ (ou $P(E) = 1$).
- La probabilité de l'événement vide vaut 0. On la note $P(\emptyset) = 0$.

Définition 8

Lorsque tous les événements élémentaires d'une expérience aléatoire ont la même probabilité, on dit alors qu'ils sont **équiprobables**. On parle d'**expérience équiprobable** ou de **loi équirépartie**.

Propriété 9

Lors d'une expérience aléatoire ayant n issues équiprobables :

- La probabilité de chaque événement élémentaire est $\frac{1}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{1}{n}$.
- La probabilité d'un événement A est $P(A) = \frac{\text{nombre d'issues favorables à } A}{\text{nombre total d'issues}} = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)}$.

Exemples

Lorsqu'on lance un dé équilibré à six faces, toutes les issues sont équiprobables. Chaque face a autant de « chance » de tomber qu'une autre.

- On a $P(\{1\}) = P(\{2\}) = P(\{3\}) = P(\{4\}) = P(\{5\}) = P(\{6\}) = \frac{1}{6}$.
- Soit l'événement I : « Obtenir un nombre impair ». Il y a trois issues favorables à I parmi six résultats possibles. Donc $P(I) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

II.3 Événement contraire

Propriété 10

La probabilité de l'événement contraire d'un événement A est : $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.

Exemple

Reprenons l'expérience du lancer de dé précédente et l'événement I . Le contraire de l'événement I est l'événement $\bar{I}$: « Obtenir un nombre pair ». On obtient alors $P(\bar{I}) = 1 - P(I) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

Remarque

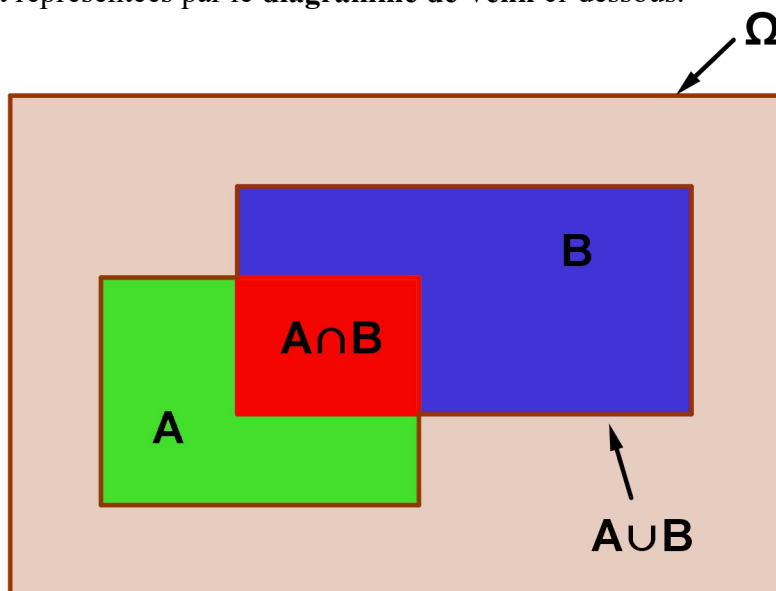
Dans cet exemple, il n'est pas nécessaire de passer par l'événement contraire. On peut effectuer le calcul sans utiliser la propriété 8. Mais dans certains cas, il sera utile (voire indispensable) d'utiliser l'événement contraire pour réduire considérablement les calculs.

III. Réunion et intersection d'événements

Définition 11

- L'événement « **A et B** », noté $A \cap B$, s'appelle l'**intersection** des événements A et B . Il est réalisé lorsque **les deux événements sont réalisés simultanément**.
- L'événement « **A ou B** », noté $A \cup B$, s'appelle la **réunion** des événements A et B . Il est réalisé lorsqu'**au moins l'un des deux événements est réalisé**.

Ces situations sont représentées par le **diagramme de Venn** ci-dessous.

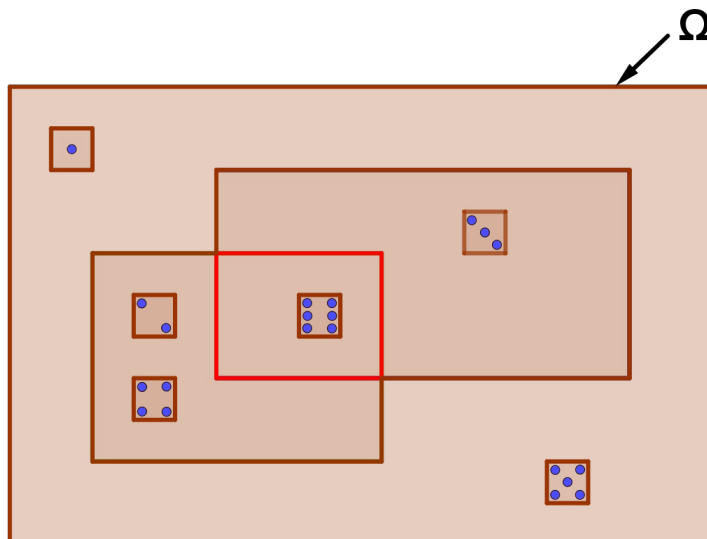


Exemple

On lance un dé équilibré à six faces. Soit les événements suivants :

A : « Obtenir un nombre pair » et B : « Obtenir un multiple de 3 ».

On a alors $A \cap B = \{6\}$ et $A \cup B = \{2; 3; 4; 6\}$.

**Théorème 12**

Soit A et B deux événements d'une même expérience aléatoire. On a alors :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Exemples

• On tire au hasard une carte dans un jeu de 32 cartes. On considère les événements :

A : « Tirer un roi »

B : « Tirer un cœur »

Calculons $P(A \cup B)$.

On a alors $P(A) = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$ et $P(B) = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}$.

L'événement $A \cap B$: « Tirer un roi de cœur » est un événement élémentaire et $P(A \cap B) = \frac{1}{32}$.

On en déduit donc $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{4}{32} + \frac{8}{32} - \frac{1}{32} = \frac{11}{32}$.

Définition 13

Si l'événement $A \cap B$ ne contient aucun élément (c'est-à-dire que $A \cap B = \emptyset$), on dit que les événements A et B sont **incompatibles** (ou **disjoints**).

Propriété 14

Si deux événements A et B sont **incompatibles**, alors $P(A \cap B) = 0$.

Pour conséquence, on en déduit que $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Exemple

On tire au hasard une carte dans un jeu de 32 cartes. On considère les événements suivants :

A : « Tirer un pique »

B : « Tirer un cœur »

Calculons $P(A \cup B)$.

On a $P(A) = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}$ et $P(B) = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}$.

De plus, les événements A et B sont incompatibles ($A \cap B = \emptyset$). D'où $P(A \cap B) = 0$.

On a donc $P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

Remarque

A et $\bar{A}$ sont incompatibles car $A \cap \bar{A} = \emptyset$.

IV. Probabilités conditionnelles**Définition 15**

Soit A et B deux événements tels que $\text{Card}(A)$ soit non nul.

La **probabilité conditionnelle** que l'événement B se réalise sachant que l'événement A est réalisé est notée $P_A(B)$, et elle est définie par :

$$P_A(B) = \frac{\text{Card}(A \cap B)}{\text{Card}(A)}$$

Remarques

• $P_A(B)$ se lit « probabilité de B sachant A ».

• Si la probabilité de l'événement B est également non nulle, on peut définir la probabilité conditionnelle que l'événement A se réalise sachant que l'événement B est réalisé, notée $P_B(A)$ et définie par :

$$P_B(A) = \frac{\text{Card}(A \cap B)}{\text{Card}(B)}$$

• En classe de Première, on verra la formule de la probabilité conditionnelle sous la forme :

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \quad \text{ou} \quad P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Ces formules s'écriront aussi de la manière suivante :

$$P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B) \quad \text{ou} \quad P(A \cap B) = P(B) \times P_B(A)$$

Propriété 16

La probabilité $P_A(B)$ vérifie bien $0 \leq P_A(B) \leq 1$ et $P_A(B) + P_A(\bar{B}) = 1$.

Exemple

Un sachet de 100 bonbons contient 40 bonbons acidulés, les autres bonbons sont à la guimauve. 18 des bonbons à la guimauve sont au parfum orange et 10 des bonbons acidulés sont au parfum orange. Les bonbons qui ne sont pas au parfum orange sont à la fraise.

On choisit un bonbon au hasard dans ce sachet. On note les événements suivants :

A : « Le bonbon est acidulé »

G : « Le bonbon est à la guimauve »

F : « Le bonbon est à la fraise »

O : « Le bonbon est au parfum orange »

De l'énoncé découle immédiatement la probabilité des événements A, G et $A \cap O$:

$$P(A) = \frac{40}{100} = 0,4, \quad P(G) = \frac{60}{100} = 0,6 \quad \text{et} \quad P(A \cap O) = \frac{10}{100} = 0,1.$$

De plus comme 18 des bonbons à la guimauve sont au parfum orange, on en déduit également une probabilité conditionnelle : la probabilité O sachant l'événement G :

$$P_G(O) = \frac{\text{Card}(G \cap O)}{\text{Card}(G)} = \frac{18}{60} = 0,3$$

À partir de ces données, on peut déduire la probabilité d'autres événements. À titre d'exemples :

- La probabilité que le bonbon choisi au hasard dans ce sachet soit un bonbon au parfum orange sachant qu'il est acidulé est :

$$P_A(O) = \frac{\text{Card}(A \cap O)}{\text{Card}(A)} = \frac{10}{40} = 0,25$$

- La probabilité que le bonbon choisi au hasard dans ce sachet soit un bonbon à la guimauve et au parfum orange est :

$$P(G \cap O) = P(G) \times P_G(O) = 0,6 \times 0,3 = 0,18$$

V. Utilisation de tableaux

Les tableaux à double entrées permettent une présentation claire de certaines expériences aléatoires et facilitent le calcul des probabilités conditionnelles.

	B	$\bar{B}$	Total
A	$\text{Card}(A \cap B)$	$\text{Card}(A \cap \bar{B})$	$\text{Card}(A)$
$\bar{A}$	$\text{Card}(\bar{A} \cap B)$	$\text{Card}(\bar{A} \cap \bar{B})$	$\text{Card}(\bar{A})$
Total	$\text{Card}(B)$	$\text{Card}(\bar{B})$	$\text{Card}(\Omega)$

Définition 17

- $\text{Card}(A \cap B)$ se lit à l'intersection de la ligne A et de la colonne B.
- $\text{Card}(A)$ (respectivement $\text{Card}(B)$) se lit sur la dernière colonne (respectivement la dernière ligne).
- $P_A(B)$ (ou $P_B(A)$) s'obtient en calculant le quotient des deux cardinaux adéquats :

$$P_A(B) = \frac{\text{Card}(A \cap B)}{\text{Card}(A)} \quad \text{et} \quad P_B(A) = \frac{\text{Card}(A \cap B)}{\text{Card}(B)}$$

Exemples

• On a demandé à 180 adolescents quel était leur genre de film préféré et on a consigné les résultats dans le tableau ci-dessous.

	Filles	Garçons	Total
Comédie	75	25	100
Action	45	35	80
Total	120	60	180

On choisit au hasard un adolescent qui a participé à cette étude. On considère les événements suivants :

A : « l'adolescent choisi préfère les films d'actions »

F : « l'adolescent choisi est une fille ».

Calculons $P(A \cap F)$ et $P(A \cup F)$.

Dans le tableau, on peut lire qu'il y a 45 filles qui préfèrent les films d'actions. Sachant que, sur les 180 adolescents qui ont été interrogés, 45 sont des filles qui préfèrent les films d'action, on a alors :

$$P(A \cap F) = \frac{45}{180} = \frac{1}{4}$$

Ainsi 25% des adolescents sont des filles qui préfèrent les films d'actions.

On trouve dans le tableau que $P(F) = \frac{120}{180} = \frac{2}{3}$ et que $P(A) = \frac{80}{180} = \frac{4}{9}$.

D'où $P(A \cup F) = P(A) + P(F) - P(A \cap F) = \frac{2}{3} + \frac{4}{9} - \frac{1}{4} = \frac{31}{36}$.

Ainsi il y a environ 86,11 % des adolescents qui sont des filles ou qui préfèrent les films d'actions.

Remarque

On peut calculer $P(A \cup F)$ de manières différentes sans passer par la formule reliant l'intersection à la réunion. Trois autres calculs sont alors possibles :

• $P(A \cup F) = \frac{\text{Card}(A) + \text{Card}(F) - \text{Card}(A \cap F)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{120 + 80 - 45}{180} = \frac{155}{180} = \frac{31}{36}$ qui revient à utiliser la

formule à l'aide des cardinaux par simple lecture du tableau

• $P(A \cup F) = 1 - \frac{\text{Card}(\overline{A \cup F})}{\text{Card}(\Omega)} = 1 - \frac{\text{Card}(\overline{A} \cap \overline{F})}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{180 - 35}{180} = \frac{155}{180} = \frac{31}{36}$ qui revient à utiliser

l'événement contraire à l'aide des cardinaux

• $P(A \cup F) = \frac{\text{Card}(\overline{A} \cap F) + \text{Card}(A \cap F) + \text{Card}(A \cap \overline{F})}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{75 + 45 + 35}{180} = \frac{155}{180} = \frac{31}{36}$ qui revient à

utiliser les cardinaux des intersections adéquates

- Un club sportif rassemble 180 membres répartis en juniors et seniors. On compte 135 seniors dont 81 hommes. Il y a 27 garçons parmi les juniors.

En choisissant une femme au hasard, calculons la probabilité d'avoir une junior.

	J	S	Total
H	27	81	108
F	18	54	72
Total	45	135	180

On cherche ici $P_F(J)$, c'est-à-dire la probabilité de choisir un junior sachant que c'est une femme.

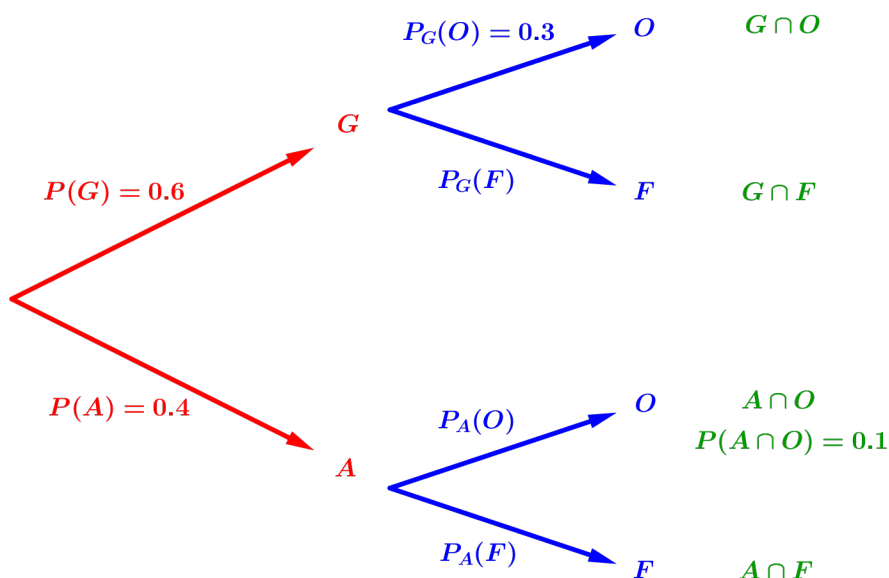
On a $P_F(J) = \frac{\text{Card}(F \cap J)}{\text{Card } F} = \frac{18}{72} = 0,25$. Il y a donc une junior sur quatre parmi les femmes.

VI. Arbre pondéré et calculs de probabilité

Dans certains cas, il s'avère utile de traduire une situation ou de modéliser une expérience aléatoire par un arbre. La construction de cet arbre peut permettre par exemple de dénombrer.

On y indique les probabilités des événements considérés. On parle alors d'un **arbre pondéré** ou **arbre de probabilités**.

On reprend l'exemple de la partie I, qui peut être modélisé par l'arbre pondéré suivant :



Le **premier niveau** de l'arbre précise les deux types possibles (guimauve ou acidulé) du bonbon choisi au hasard dans le sachet. On indique sur les branches du premier niveau issues du nœud les probabilités correspondant au fait qu'il soit à la guimauve ou acidulé.

Le **deuxième niveau** de l'arbre indique les parfums possibles sachant le type du bonbon. Ce deuxième niveau est composé de deux branches issues du nœud G et de deux branches issues du nœud A . On indique sur les branches de ce deuxième niveau les probabilités que le bonbon soit au parfum orange ou au parfum fraise sachant qu'il est à la guimauve ou acidulé. Ce sont les **probabilités conditionnelles** de l'événement F ou O sachant l'événement G ou A .

Chaque succession de branches est appelé **chemin**. Cet arbre a donc quatre chemins qui sont les événements $G \cap O$, $G \cap F$, $A \cap O$ et $A \cap F$. Ces chemins sont sur un même niveau, ce qui n'est pas toujours le cas, car un arbre n'est pas nécessairement symétrique (c'est un cas qui arrive rarement mais qui existe).

Généralement, les données dont on dispose ne nous permettent pas d'indiquer immédiatement sur toutes les branches d'un arbre pondéré les probabilités correspondantes. On a recours pour les déterminer à certaines règles qui découlent de la définition de la probabilité conditionnelle et des propriétés de sa loi.

Propriété 18

- La probabilité de l'événement correspondant à un chemin est obtenue en multipliant les probabilités portées par ses branches.
- La somme des probabilités sur les branches partant d'un même nœud est égale à 1.
- La probabilité de l'événement correspondant à plusieurs chemins est obtenue en additionnant les probabilités de chacun de ces chemins (**formule des probabilités totales**).

Exemple

• La probabilité d'un chemin est le produit des probabilités indiquées sur les branches du chemin qui aboutissent à ce chemin. Donc :

$$P(G \cap O) = P(G) \times P_G(O) = 0,6 \times 0,3 = 0,18$$

$$P(A) \times P_A(O) = P(A \cap O), \text{ c'est-à-dire } 0,4 \times P_A(O) = 0,1. \text{ Par suite, } P_A(O) = \frac{0,1}{0,4} = 0,25$$

• La somme des probabilités indiquées sur les branches issues d'un même nœud est égale à 1. Donc :

$$\text{À partir du nœud } G : P_G(O) + P_G(F) = 1 \text{ donc } P_G(F) = 1 - 0,3 = 0,7$$

$$\text{À partir du nœud } A : P_A(O) + P_A(F) = 1 \text{ donc } P_A(F) = 1 - 0,25 = 0,75$$

Ces deux probabilités étant connues, on peut à l'aide de la propriété 3 utilisée au point 1 (probabilité d'un chemin) déterminer les deux autres probabilités :

$$P(G \cap F) = P(G) \times P_G(F) = 0,6 \times 0,7 = 0,42$$

$$P(A \cap F) = P(A) \times P_A(F) = 0,4 \times 0,75 = 0,3$$

• Une fois l'arbre pondéré complété, on peut être amené à déterminer la probabilité d'un événement qui ne peut pas être directement lue sur l'arbre. Dans l'exemple précédent, on peut s'intéresser à la probabilité que le bonbon choisi au hasard dans le sachet soit à la fraise. Il suffit dans ce cas d'appliquer la formule des probabilités totales :

L'événement F est associé au chemin $A \cap F$ et au chemin $G \cap F$. Par la **formule des probabilités totales**, on obtient :

$$P(F) = P(A \cap F) + P(G \cap F) = 0,3 + 0,42 = 0,72$$

La probabilité qu'un bonbon choisi au hasard dans le sachet soit à la fraise est de 0,72.

On généralise par la suite la **formule des probabilités totales**.