Chapitre 10

Dérivation

I. Nombre dérivé

f est une fonction définie sur un intervalle I, a et $a+h$ sont deux réels de l'intervalle I, avec $h\neq 0$.

I.1 Taux d'accroissement

Définition 1

Soit f une fonction définie sur un intervalle contenant les réels a et b. Le **taux de variation** de la fonction f entre a et b est le réel défini par le quotient $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Exemple

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^2-2$. Son taux de variation entre 0 et 2 est :

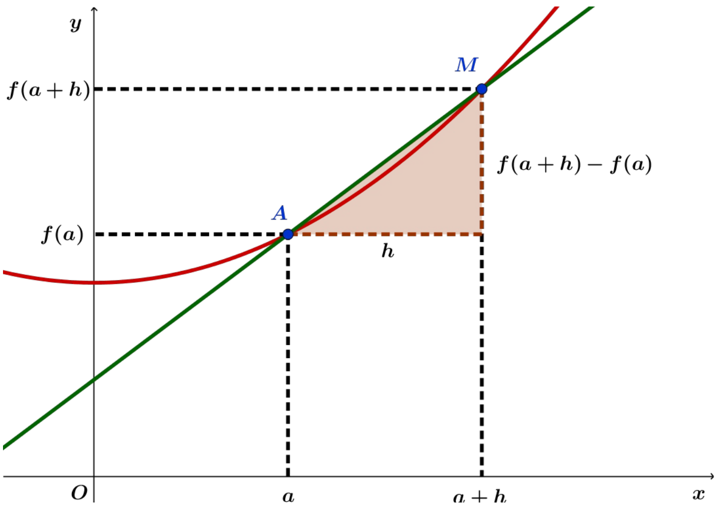
$$\frac{f(2)-f(0)}{2-0}=\frac{2^2-2-(0^2-2)}{2}=\frac{4-2-0+2}{2}=\frac{4}{2}=2$$

Définition 2

Le **taux d'accroissement** de f entre a et $a+h$ est $\tau(h)=\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$.

Remarques

- $\tau(0)$ n'existe pas, mais on va s'intéresser aux valeurs de t lorsque h se rapproche de plus en plus de 0.
- Le taux d'accroissement de f entre a et $a+h$ est le **coefficient directeur** de la droite (AM) avec $\mathrm{A}(a;f(a))$ et $\mathrm{M}(a+h;f(a+h))$. On appelle cette droite une sécante à la courbe.



Exemple

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^2$. Soit le point $A(1;1)$ et h un réel.
On pose $M(1+h;f(1+h))$.
Le coefficient directeur de la droite (AM) est le taux d'accroissement $\tau(h)$ et il vaut

$$\tau(h)=\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\frac{(a+h)^2-a^2}{h}=\frac{a^2+2ah+h^2-a^2}{h}=\frac{2ah+h^2}{h}=\frac{h(2a+h)}{h}=2a+h$$

I.2 Nombre dérivé

Définition 3

Si, lorsque h se rapproche le plus possible de 0, $\tau(h)$ semble valoir une valeur réelle, on dit que f est dérivable en a. Cette valeur réelle est appelée **nombre dérivé** de f en a, et est notée $f'(a)$. On écrit alors : $f'(a)=\lim\limits_{h\to 0}\tau(h)$, soit $f'(a)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$.

Remarques

• Ce dernier terme se lit « limite quand h tend vers 0 de $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ ». On utilise ici la notion de limite qui n'est pas au programme.
• Il est possible qu'une fonction ne soit pas dérivable en un point.

Exemple

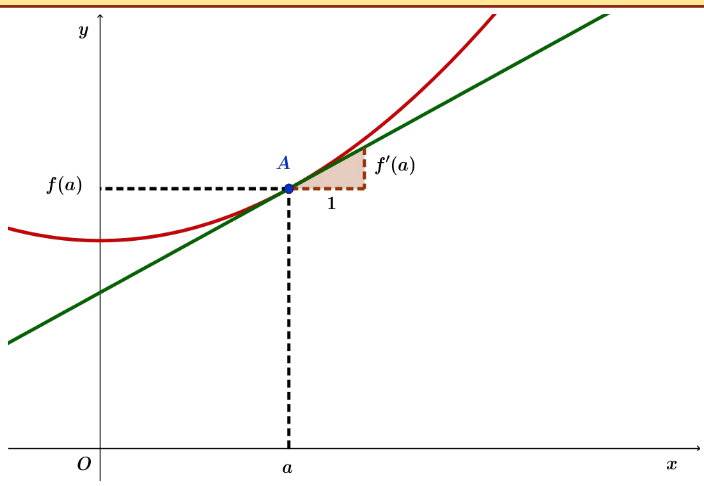
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^2$. Calculer le nombre dérivé en 2.

On a $\tau(h)=\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\frac{(2+h)^2-2^2}{h}=\frac{4+4h+h^2-4}{h}=\frac{4h+h^2}{h}=\frac{h(4+h)}{h}=4+h$

D'où $f'(2)=\lim\limits_{h\to 0}\tau(h)=\lim\limits_{h\to 0}4+h=4$. Donc f est dérivable en 2 et $f'(2)=4$.

Définition 4

On constate que, lorsque h tend vers 0, les sécantes en A tendent vers une droite particulière, nommée **tangente** à C_f en A : aux alentours du point $A(a,f(a))$, elle est semblable à la courbe.



Définition 5

Lorsque f est dérivable en a, on appelle **tangente** à la courbe C_f au point d'abscisse a la droite T passant par $A(a; f(a))$ dont **le coefficient directeur est le nombre dérivé $f'(a)$**.

Propriété 6

Soit f une fonction dérivable en a. L'équation de la tangente T à la courbe C_f au point d'abscisse a est : $T : y = f'(a)(x-a) + f(a)$.

Exemple

Soit la fonction carrée $f(x)=x^2$. Le nombre dérivé de f en 2 est 4 (exemple précédent).
On sait alors que la tangente à la courbe C_f au point d'abscisse 2 a pour équation :

$$T : y = f'(2) \times (x-2) + f(2)$$

Or $f(2)=2^2=4$ et $f'(2)=4$.
Donc $T : y = 4(x-2)+4 = 4x-8+4 = 4x-4$

II. Fonction dérivée

Définition 7

Soit une fonction f définie sur un intervalle I.
On dit que f est dérivable sur I si elle est dérivable en tout point x de I.
On appelle fonction dérivée de f et on note f' la fonction qui à chaque x associe $f'(x)$.

Remarques

Toutes les fonctions usuelles vues en première sont dérivables sur leur domaine de définition.

III. Dérivées des fonctions usuelles

Propriété 8

Les **fonctions constantes** de la forme $f(x)=k$ où $k \in \mathbb{R}$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et ont pour dérivée $f'(x)=0$.

Propriété 9

Les **fonctions affines** de la forme $f(x)=mx+p$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et ont pour dérivée $f'(x)=m$.

Remarque

La dérivée d'une fonction affine est donc une fonction constante.

Propriété 10

La **fonction carrée** $f(x)=x^2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et a pour dérivée $f'(x)=2x$.

Propriété 11

La **fonction cube** $f(x)=x^3$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et a pour dérivée $f'(x)=3x^2$.

IV. Opérations sur les fonctions dérivées

Propriété 12

Soit u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I .
La fonction $u+v$ est dérivable sur I et $(u+v)'=u'+v'$.

Exemple

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^2+x$. f est de la forme $u+v$ avec $u(x)=x^2$ et $v(x)=x$. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x)=2x+1$.

Propriété 13

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I et k un nombre réel.
La fonction ku est dérivable sur I et $(ku)'=ku'$.

Exemple

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $3x^4$. f est de la forme ku avec $k=3$ et $u(x)=x^4$.
La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x)=3\times 4x^3=12x^3$.

Propriété 14

Soit f une **fonction polynomiale** de la forme $f(x)=a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1 x+a_0$ définie sur $\mathbb{R}$ avec n un entier naturel inférieur ou égal à 3 et $a_n\neq 0$.
La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x)=na_n x^{n-1}+(n-1)a_{n-1}x^{n-2}+\ldots+a_1$.

Exemple

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=5x^3-7x^2+2x-1$. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a $f'(x)=3\times 5x^2-2\times 7x+2=16x^3+15x^2-14x+2$.

V. Sens de variation d'une fonction

V.1 Du sens de variation d'une fonction au signe de la dérivée

Théorème 15

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I .
- Si f est **croissante** sur I , alors pour tout réel x de I , $\boldsymbol{f'(x)\geqslant 0}$.
- Si f est **décroissante** sur I , alors pour tout réel x de I , $\boldsymbol{f'(x)\leqslant 0}$.
- Si f est **constante** sur I , alors pour tout réel x de I , $\boldsymbol{f'(x)=0}$.

Exemple

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=-4x+3$. f est une fonction affine strictement décroissante car son coefficient directeur est strictement négatif ($-4<0$). D'après le théorème précédent, on en conclut que la fonction dérivée de f est (strictement) négative.
Vérification : f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x)=-4$. f' est bien (strictement) négative.

V.2 Du signe de la dérivée au sens de variation de la fonction

Théorème 16

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I.
- Si pour tout réel x de I, $\boldsymbol{f'(x)\geqslant 0}$, alors la fonction f est **croissante** sur I.
- Si pour tout réel x de I, $\boldsymbol{f'(x)\leqslant 0}$, alors la fonction f est **décroissante** sur I.
- Si pour tout réel x de I, $\boldsymbol{f'(x)=0}$, alors la fonction f est **constante** sur I.
- Si f' est **strictement positive** (respectivement **strictement négative**) sur I, sauf éventuellement pour un nombre fini de valeurs de x où f' s'annule, alors f est **strictement croissante** (respectivement **strictement décroissante**) sur I.

Remarque

Dans de nombreux cas il sera nécessaire de dériver pour étudier les variations d'une fonction, car l'étude du signe de la dérivée sera plus simple que l'étude des variations de la fonction initiale.
Mais attention, ceci n'est pas toujours le cas !

Exemples

- Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=2x+1$.
f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x)=2$. Comme $f'(x)>0$, la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ (nous pourrions ici simplement déterminer que f est strictement croissante car le coefficient directeur est strictement positif).
- Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=2x^3$.
f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x)=2\times 3x^2=6x^2$. Un carré est toujours positif (ou nul), la fonction dérivée f' est donc positive sur $\mathbb{R}$, sauf en 0 où elle s'annule.
Ainsi, f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
- Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^2+3x-8$.
f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x)=2x+3$. Or $f'(x)\geqslant 0 \Leftrightarrow 2x+3\geqslant 0 \Leftrightarrow 2x\geqslant -3 \Leftrightarrow x\geqslant -\frac{3}{2}$.

On en déduit le tableau suivant :

x	$-\infty$		$-\frac{3}{2}$		$+\infty$
signe de f'		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	$-\frac{41}{4}$	$\nearrow$	

Ainsi la fonction f est décroissante sur $\left]-\infty;-\frac{3}{2}\right]$ et croissante sur $\left[-\frac{3}{2};+\infty\right[$.

Remarques

Une flèche dans le tableau de variation d'une fonction f indiquera dorénavant :
• la stricte croissance ou décroissance de f sur l'intervalle correspondant.
• la continuité (ou absence de rupture) de la courbe C_f sur cet intervalle.

Par la suite, on prendra l'habitude de construire un tableau de variations avec le signe de la dérivée puis les variations de la fonction f.

VI. Extremum d'une fonction

Théorème 17

Soit une fonction f définie sur un intervalle I et a un réel de I.
• On dit que le réel M est le **maximum** de f sur I, **atteint** en a, si $f(a)=M$ et si pour tout réel x de I, on a $f(x)\leqslant M$.
• On dit que le réel m est le **minimum** de f sur I, **atteint** en a, si $f(a)=m$ et si pour tout réel x de I, on a $f(x)\geqslant m$.
• Un **extremum** de f sur I est **un maximum ou un minimum** de f sur I.
• On dit que le réel L est un **maximum** (respectivement **minimum**) **local** de f sur I s'il existe un intervalle ouvert J contenu dans I, tel que L est le maximum (respectivement minimum) de f sur J.

Remarques

• Les pluriels de "minimum", "maximum" et "extremum" sont "minima", "maxima" et "extrema".
• Graphiquement, il s'agit pour le maximum du plus haut "sommet" de la courbe, et pour le minimum du plus bas "sommet" de la courbe.

Exemple

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=-x^2+4x-3$.
f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x)=-2x+4$. $f'(x)\geqslant 0 \Leftrightarrow 2x+4\geqslant 0 \Leftrightarrow 2x\geqslant -4 \Leftrightarrow x\leqslant 2$.
On en déduit le tableau suivant :

x	$-\infty$		2		$+\infty$
signe de f'		+	0	−	
$f(x)$		↗	1	↘	

Ainsi $f(2)=1$ est le maximum de f sur $\mathbb{R}$.